1 Fourier'n muunnos

Fourier'n muunnos

Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **Fourier'n muunnos** $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ määritellään

$$\widehat{f}(p) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x$$

Määritellään **Fourier'n käänteismuunnos** funktiolle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}p\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

- Jos $f \in L^2(\mathbb{R})$, suppenee sen Fourier'n muunnoksen määrittelevä integraali melkein kaikkialla ja $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$. *Käänteismuunnoskaava* $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f] = f$ pätee funktionormissa ja vastaavalla tavalla melkein kaikissa pisteissä
- Jos $f \notin L^2(\mathbb{R})$, mutta se on *itseisesti integroituva*, voi käänteismuunnoskaava silti päteä kaikissa pisteissä

2 Kaksipuolinen Laplacen muunnos

- Oletetaan, että $a < b$ ja f toteuttaa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\sigma x}|f(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty\,, \quad \text{kaikilla } a < \sigma < b$$

eli $\mathrm{e}^{-\sigma x} f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Tällöin

Funktion f **kaksipuolinen Laplacen muunnos** $F = \mathcal{B}f$ määritellään pääarvointegraalina ($s \in \mathbb{C}$)

$$F(s) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-sx} f(x) \mathrm{d}x\,, \qquad a < \operatorname{Re} s < b$$

Arvo $f(x)$ saadaan melkein kaikkialla **käänteismuunnoksesta**

$$f(x) = \int_{\sigma - \mathrm{i}\infty}^{\sigma + \mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{sx} F(s) \frac{\mathrm{d}s}{2\pi \mathrm{i}} \qquad (a < \sigma < b)$$

3 Kommentteja

- Integraalimerkintä tarkoittaa pääarvointegraalia: integroidaan yli polkujen $\gamma_M(p) := \sigma + \mathrm{i}p$, $p \in [-M, M]$, ja sitten $M \to \infty$
- Jos lisäksi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\sigma x} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty \,, \qquad a < \sigma < b$$

  on kaksipuolinen Laplacen muunnos $F(s)$ analyyttinen funktio kun $a < \mathrm{Re}\, s < b$
- Yllä oleva tulos pätee myös, kun $a = -\infty$ tai $b = \infty$
- Funktion f kaksipuolisesta Laplacen muunnoksesta voidaan käyttää myös merkintöjä $\mathcal{B}f$ tai $\mathcal{B}[f]$

4 Laplacen muunnos

- Laplacen muunnos $\mathcal{L}f =$ *nollajatkeen kaksipuolisena Laplacen muunnoksena*, eli $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{B}[g](s)$, kun $g(x) := \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} f(x)$
- *Oletetaan*, että löytyy $a \in \mathbb{R}$, jolle funktio f toteuttaa

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at} |f(t)| \mathrm{d}t\,, \quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2at} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \quad < \infty$$

Funktion f **Laplacen muunnos** $F = \mathcal{L}f$ määritellään

$$F(s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t) \mathrm{d}t\,, \qquad \mathrm{Re}\, s > a$$

ja tällöin $f(x)$ saadaan melkein kaikkialla **käänteismuunnoksesta**

$$f(t) = \int_{\sigma - \mathrm{i}\infty}^{\sigma + \mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{ts} F(s) \frac{\mathrm{d}s}{2\pi \mathrm{i}} \qquad (\sigma > a)$$

Lisäksi $F(s)$ *on* ***analyyttinen koko puolitasossa*** $\mathrm{Re}\, s > a$.

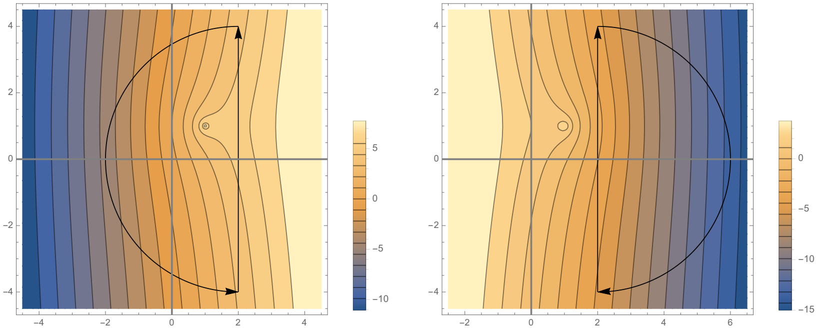
- Käänteismuunnoskaava esittää nollajatketta $g \quad \Rightarrow$

$$\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{ts} F(s) \frac{\mathrm{d}s}{2\pi\mathrm{i}} = \begin{cases} f(t)\,, & \text{kun } t \geq 0\,, \\ 0\,, & \text{kun } t < 0\,. \end{cases}$$

- Muuttujan nimi vaihdettu t:ksi, sillä Laplacen muunnosta käytetään fysiikassa usein juuri *ajan* suhteen otettuna (kiinnostavimmat suureet *eivät* mene nollaan, kun $t \to \infty$)
- Lisätietoja (mm. erilaisia muunnoskaavoja) Wikipediasta (`https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform`)

6 Miten Laplacen muunnosta yleensä käytetään?

1. Tunnetaan (fysikaalisin perustein) vakio $a \in \mathbb{R}$, jolla Lauseen oletukset toteutuvat (esim. $|f(t)| \leq C\mathrm{e}^{at}$)
   $\Rightarrow \quad F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ on määritelty ja analyyttinen, kun $\mathrm{Re}\, s > a$
2. Ratkaistaan $F(s)$ positiivisilla $s > a$, esimerkiksi ottamalla Laplacen muunnos funktion f toteuttamasta differentiaaliyhtälöstä
   Esim. muuttujanvaihdoissa voi huoletta olettaa, että $s > 0$
3. Etsitään F:n (maksimaalinen) analyyttinen jatke alueeseen $\Omega \subset \mathbb{C}$ (Ω sisältää ainakin kaikki arvot s, joille $\mathrm{Re}\, s > a$)
4. Lähdetään liikkeelle käänteismuunnoskaavasta käyttäen polkua $\gamma_M(p) = \sigma - \mathrm{i}p$, jossa $\sigma > a$, $M \gg 1$, ja $p \in [-M, M]$
   Siirretään polkua *vasemmalle* ($\sigma \to -\infty$) Cauchyn lausetta tai residylausetta käyttäen
   Tässä vaiheessa kannattaa käyttää koko analyyttisyysaluetta Ω
5. Saadaan aikaiseksi ratkaisu $f(t)$ tai (eksponentiaalisen) hyvä approksimaatio siitä



Esimerkin 8.5 integrointipolut ($c = 1 + \mathrm{i}$, $M = 4$ ja $\sigma = 2$):

(*Vasen kuva*) $t = 2 > 0$ ja vastaava integrointipolku $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$

(*Oikea kuva*) $t = -2 < 0$ ja vastaava integrointipolku $\gamma_1 \dot{+} \overleftarrow{\gamma_3}$

8 Laplacen muunnoksen ominaisuuksia, I

Funktio, $t > 0$	Laplacen muunnos, $s \in \mathbb{C}$	Tarkennuksia
1	s^{-1}	
e^{ct}	$\dfrac{1}{s-c}$	$c \in \mathbb{C}$
t^c	$\Gamma(c+1)s^{-(c+1)}$	$\mathrm{Re}\, c > -1$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\omega \in \mathbb{C}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\omega \in \mathbb{C}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{c_1 t} - \mathrm{e}^{c_2 t}}{t}$	$\overline{\ln} \dfrac{s-c_2}{s-c_1}$	$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

9 Laplacen muunnoksen ominaisuuksia, II

Funktio, $t > 0$	Laplacen muunnos, $s \in \mathbb{C}$	Tarkennuksia
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$	$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0^+)$	
$t^k f(t)$	$(-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} F(s)$	$k \in \mathbb{N}$
$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$	
$t^{-1} f(t)$	$\int_s^\infty F(s')\mathrm{d}s'$	$t^{-1} f(t)$ integroituva, $s > 0$

(Tässä merkitään $F = \mathcal{L}[f]$ ja $G = \mathcal{L}[g]$)

Laplacen muunnoksen ominaisuuksia, III

Funktio, $t > 0$	Laplacen muunnos, $s \in \mathbb{C}$	Tarkennuksia
$f(t-\tau)\mathbb{1}_{\{t \geq \tau\}}$	$\mathrm{e}^{-\tau s} F(s)$	$\tau \geq 0$
$\mathrm{e}^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	$c \in \mathbb{C}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{t \geq n\tau\}}$	$\frac{1}{s} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-s\tau}}$	$\tau > 0$
$\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) \mathrm{d}\tau$	$F(s)G(s)$	
$f(t)g(t)$	$\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty} F(s-s')G(s') \frac{\mathrm{d}s'}{2\pi\mathrm{i}}$	$\sigma >$ "a" g:lle

(Tässä merkitään $F = \mathcal{L}[f]$ ja $G = \mathcal{L}[g]$)