1 L-periodisen funktion Fourier'n sarjaesitys

Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on itseisesti integroituva välillä $[a, a+L]$, jossa $a \in \mathbb{R}$ ja $L > 0$. Määritellään

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{L} \int_a^{a+L} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}(x-a)} \mathrm{d}x$$

Tällöin funktion f *Fourier'n sarja välin "päätepistekannassa"* on

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}(x-a)}$$

- Jos f toteuttaa Dirichlet'n ehdot, on $S(x) = f(x)$ jokaisessa sen L–periodisen jatkeen jatkuvuuspisteessä $x \in [a, a+L]$
- Funktiolle f voi toki tehdä myös esityksen "normaalikannassa" käyttäen funktioita $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}x}$. Tämän sarjan kertoimet ovat $\widehat{f}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}a}$. *Lähes poikkeuksetta muokataan ensin annettua funktiota siten, että haluttu kehitysväli alkaa origosta, eli $a = 0$*

2 Funktionormi

$$\|f\| := \sqrt{\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}x}$$

- Fourier'n sarjat liittyvät valintaan $E = [a, a + L]$
- *Fourier'n muunnos liittyy valintaan $E = \mathbb{R}$*, eli vastaa integrointia koko reaaliakselin yli
- Määritellään funktionormin avulla vastaava *funktioavaruus* $L^2(E)$, jolle pätee
  1. $\|f\| := \sqrt{\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}x}$
  2. $f \in L^2(E)$, jos $\|f\| < \infty$
  3. $f \in L^2(E)$ on *nollafunktio*, jos $\|f\| = 0$ (merkitään "$f = 0$")
  4. Jos $f, g \in L^2(E)$, niiden välinen *etäisyys* $= \|f - g\|$
  5. Jos $f, g \in L^2(E)$, merkitään $f = g$, jos $\|f - g\| = 0$

Seuraavat vektoreiden pituuksille pätevät ominaisuudet pätevät myös funktionormille:

- $\|f\| \geq 0$, kaikilla $f \in L^2(E)$.
- Jos $\alpha \in \mathbb{C}$ ja $f \in L^2(E)$, määritellään funktio $h := \alpha f$ kaavalla $h(x) = \alpha f(x)$, $x \in E$. Tällöin $\alpha f \in L^2(E)$ ja $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$.
- Jos $f, g \in L^2(E)$, määritellään funktio $h := f + g$ kaavalla $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in E$.
- Kolmioepäyhtälö pätee myös normille,

$$\big| \|f\| - \|g\| \big| \leq \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \ .$$

4 Skalaaritulo eli sisätulo

Funktionormia vastaava skalaaritulo

$$\langle g|f\rangle := \int g(x)^* f(x)\mathrm{d}x\,, \qquad f,g \in L^2(E)$$

- Skalaaritulo on hyvin määritelty, sillä

$$|\,\langle g|f\rangle\,| \leq \int |g(x)||f(x)|\mathrm{d}x \leq \|g\|\,\|f\|$$

$\Rightarrow$ *skalaaritulon määrittelevä integraali on itseisesti suppeneva* kaikilla $f,g \in L^2(E)$

Hölderin epäyhtälö

Kaikilla (mitallisilla) funktioilla f,g pätee

$$\int |g(x)||f(x)|\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int |g(x)|^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int |f(x)|^2\mathrm{d}x}$$

5 Skalaaritulon perusominaisuuksia

- $\langle f|f\rangle = \|f\|^2 \geq 0$, jossa $\langle f|f\rangle = 0$, jos ja vain jos $\|f\| = 0$
- (Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö) $|\langle f|g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|$
- (konjugaattisymmetrinen) $\langle f|g\rangle^* = \langle g|f\rangle$
- (lineaarinen toisessa argumentissa) $\langle f|\alpha g_1 + \beta g_2\rangle = \alpha\langle f|g_1\rangle + \beta\langle f|g_2\rangle$, aina kun $f, g_1, g_2 \in L^2(E)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- (konjugaattilineaarinen ensimmäisessä argumentissa) $\langle \alpha f_1 + \beta f_2|g\rangle = \alpha^*\langle f_1|g\rangle + \beta^*\langle f_2|g\rangle$, aina kun $f_1, f_2, g \in L^2(E)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

6 Ortogonaaliset joukot

- Funktiot $f, g \in L^2(E)$ ovat *ortogonaaliset*, jos niiden skalaaritulo on nolla: $\langle f|g\rangle = 0$
- Funktiojono $f_n \in L^2(E)$ on *ortonormaali*, jos mitkä tahansa kaksi sen funktiota ovat ortogonaaliset ja lisäksi jokaisen funktion normi on yksi. Tämä toteutuu jos ja vain jos

$$\langle f_m|f_n\rangle = \delta_{m,n} = \mathbb{1}_{\{m=n\}} = \begin{cases} 1\,, & \text{jos } m = n\,, \\ 0\,, & \text{jos } m \neq n\,. \end{cases}$$

- Jonosta (f_n) voidaan muodostaa *lineaarikombinaatiota*:

  valitaan jonon indeksit n_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, näihin kuuluvat vakiot $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ja määritellään funktio $h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_{n_i}$ kaavalla

$$h(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_{n_i}(x)$$

- Ortonormaali funktiojono (e_n) on *täydellinen*, jos sen lineaarikombinaatioiden avulla voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti (funktionormissa) mitä tahansa funktiota $f \in L^2(E)$.

  Toisin sanoen, jokaista tarkkuutta $\varepsilon > 0$ kohti täytyy löytyä jonon indeksit n_i ja vakiot $\alpha_i \in \mathbb{C}$, joilla

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_{n_i} \right\| < \varepsilon \, .$$

- Täydellistä ortonormaalia funktiojonoa kutsutaan avaruuden $L^2(E)$ *ortonormaaliksi kannaksi*

- Funktion $f \in L^2(E)$ *komponentit* c_n ortonormaalissa kannassa (e_n) määritellään sisätuloina

$$c_n := \langle e_n | f \rangle$$

8 Besselin epäyhtälö

Olkoon (e_n) ortonormaali funktiojono avaruudessa $L^2(E)$, $f \in L^2(E)$ ja $c_n := \langle e_n | f \rangle$ vastaavat komponentit. Tällöin

$$\|f\|^2 \geq \sum_n |c_n|^2 \quad \text{ja} \quad \left\| f - \sum_n c_n e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_n |c_n|^2 \geq 0 \,.$$

- Erityisesti siis aina $\sum_n |c_n|^2 < \infty$
- Funktio $\sum_n c_n e_n$ on lisäksi paras approksimaatio funktiosta f jonon (e_n) lineaarikombinaatioiden avulla: jos $\alpha_n \in \mathbb{C}$ on jono kertoimia ja löytyy jokin indeksi m, jolla $\alpha_m \neq c_m$, pätee

$$\left\| f - \sum_n \alpha_n e_n \right\| > \left\| f - \sum_n c_n e_n \right\|$$

9 Parsevalin kaava

Ortonormaali funktiojono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on avaruuden $L^2(E)$ ortonormaali kanta täsmälleen silloin, kun kaikilla $f \in L^2(E)$ pätee

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n|f\rangle|^2$$

Tällöin
$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle e_n|f\rangle\, e_n \right\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n|f\rangle\, e_n = \sum_{n=1}^{\infty} |e_n\rangle\, \langle e_n|f\rangle$$

Plancherelin kaava

Jos (e_n) on avaruuden $L^2(E)$ *ortonormaali kanta*, on funktioiden $f, g \in L^2(E)$ sisätulo annettavissa komponenttien avulla:

$$\langle f|g\rangle = \sum_{n} \langle f|e_n\rangle\, \langle e_n|g\rangle$$

10 Fourier'n sarjat ja ortonormaali kanta

- Lauseen 6.5 todistuksessa nähtiin, että kun $k', k \in \mathbb{Z}$, pätee

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)x}\mathrm{d}x = \mathbb{1}_{\{k'=k\}} = \begin{cases} 0\,, & \text{jos } k'-k \neq 0 \\ 1\,, & \text{jos } k'-k = 0 \end{cases}$$

- Näin ollen funktiot

$$e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,, \quad x \in [0, 2\pi],\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

  muodostavat *ortonormaalin jonon* avaruudessa $L^2([0, 2\pi])$

- Tämä jono on itse asiassa *täydellinen*
  (Mitä tahansa $f \in L^2(E)$ voi approksimoida mielivaltaisen tarkasti normissa jollain Dirichlet'n ehdot toteuttavalla funktiolla)

- $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ on siis avaruuden $L^2([0, 2\pi])$ eräs *ortonormaali kanta*

- Koordinaatit tässä kannassa saadaan Fourier'n kertoimien avulla

$$\langle e_k | f\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}_k$$

11 Parsevalin kaava Fourier'n sarjoille

- Olkoon $f, g \in L^2([0, 2\pi])$ ja $\widehat{f}_k$, $\widehat{g}_k$ niiden Fourier'n kertoimet
- Olkoon a_k, b_k funktion f trigonometrisen sarjan kertoimet

Parsevalin kaava

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}_k\right|^2$$
$$= \pi \left[\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)\right]$$

Plancherelin kaava

$$\int_0^{2\pi} f(x)^* g(x) \mathrm{d}x = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k^* \, \widehat{g}_k$$

- Jos f on 2π-periodinen, voi näissä kaavoissa korvata integrointivälin $[0, 2\pi]$ välillä $[-\pi, \pi]$

12 Fourier'n muunnos

- Edellä tutkittiin periodisten funktioiden esittämistä Fourier'n sarjan avulla
  $\Rightarrow$ onnistui periodisuusvälin yli otetuilla Fourier'n kertoimilla
- Löytyykö mitään vastaavaa, jos luovutaan periodisuudesta, mutta halutaan silti esitys, joka pätee koko reaaliakselilla?

12 Fourier'n muunnos

- Edellä tutkittiin periodisten funktioiden esittämistä Fourier'n sarjan avulla
  $\Rightarrow$ onnistui periodisuusvälin yli otetuilla Fourier'n kertoimilla
- Löytyykö mitään vastaavaa, jos luovutaan periodisuudesta, mutta halutaan silti esitys, joka pätee koko reaaliakselilla?

Fourier'n muunnos

Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **Fourier'n muunnos** $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ määritellään

$$\widehat{f}(p) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x$$

Määritellään **Fourier'n käänteismuunnos** funktiolle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}p\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

13 Fourier'n muunnoksen perusominaisuuksia

- Funktiota $\widehat{f}$ voidaan merkitä myös symboleilla $\mathcal{F}f$ tai $\mathcal{F}[f]$
- Fourier'n muunnos ja käänteismuunnos ovat lähes identtisiä operaatioita: $(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}g)(-x)$
- Muita yleisesti käytettyjä määritelmiä

$$(\mathcal{F}f)(k) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi kx}\mathrm{d}x\,, \quad (\mathcal{F}^{-1}g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi kx}\mathrm{d}k$$

$$(\mathcal{F}f)(p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\mathrm{d}x$$

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}p$$

- Muunnoksista tulee symmetrisempiä, $(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = (\mathcal{F}g)(-x)$
- Ensimmäinen, $p = 2\pi k$ muuttujanvaihdolla saatu, versio johtaa helpoimpiin normalisaatioihin

- Jos funktio on **neliöintegroituva**, eli $f \in L^2(\mathbb{R})$, suppenee sen Fourier'n muunnoksen määrittelevä integraali melkein kaikkialla ja $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$. Käänteismuunnoskaava $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f] = f$ pätee funktionormissa ja vastaavalla tavalla melkein kaikissa pisteissä.
- (Lisä) Jos f on ns. **Schwartzin funktio**, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on sitä myös sen Fourier'n muunnos, eli $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Tällöin käänteismuunnoskaava pätee pisteittäin, eli $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f](x) = f(x)$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$. Lisäksi tässä kaavassa sekä Fourier'n muunnoksen että käänteismuunnoksen integraalit ovat itseisesti suppenevia.

- Fourier'n käänteismuunnoskaavastakin tulee tyypillisesti funktion f "hyppykohdassa" arvo hypyn puolestavälistä: jos f on epäjatkuva pisteessä x, mutta sillä on vasen ja oikea raja-arvo tässä pisteessä, on tyypillisesti

$$(\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f])(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

- Joukko $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sisältää kaikki ne funktiot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, jotka ovat mielivaltaisen monta kertaa derivoituvia ja joiden derivaatat häviävät äärettömyydessä nopeammin kuin mikään potenssi. Toisin sanoen vaaditaan, että jokaisella $k, n \in \mathbb{N}_0$ löytyy jokin yläraja $C_{k,n}$, jolla

$$|x^n f^{(k)}(x)| \leq C_{k,n}\,, \qquad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}\,.$$

- Funktioita $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ kutsutaan myös **nopeasti väheneviksi funktioiksi** (engl. *rapidly decreasing function*) tai Schwartzin testifunktioiksi

16 Fourier'n kosini- ja sinimuunnokset

Fourier'n kosinimuunnos

Funktion $f(x)$, $x > 0$, kosinimuunnos ja sen käänteismuunnos:

$$(\mathcal{F}_c f)(p) = \int_0^\infty f(x)\cos(px)\mathrm{d}x\,, \quad p > 0$$

$$(\mathcal{F}_c^{-1} g)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(p)\cos(px)\mathrm{d}p\,, \quad x > 0$$

Fourier'n sinimuunnos

Funktion $f(x)$, $x > 0$, sinimuunnos ja sen käänteismuunnos:

$$(\mathcal{F}_s f)(p) = \int_0^\infty f(x)\sin(px)\mathrm{d}x\,, \quad p > 0$$

$$(\mathcal{F}_s^{-1} g)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(p)\sin(px)\mathrm{d}x\,, \quad x > 0$$

17 Riemannin–Lebesguen lemma

Oletetaan, että $C := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$. Tällöin Fourier'n muunnokselle $\widehat{f}$ pätee:

1. $\widehat{f}(p)$ on jatkuva funktio.
2. $\left|\widehat{f}(p)\right| \leq C$ kaikilla $p \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{p\to\infty} \widehat{f}(p) = 0 = \lim_{p\to-\infty} \widehat{f}(p)$.

- Ei päde kaikille $f \in L^2(\mathbb{R})$
- Kohdan 3 voi myös ilmaista sanomalla, että näillä oletuksilla $\widehat{f}(p) = o(1)$, kun $|p| \to \infty$, eli "f häviää äärettömyydessä"
- Yleinen nyrkkisääntö:

  Mitä säännöllisempi funktio f on, sitä nopeammin sen Fourier'n muunnos häviää äärettömyydessä

18 Derivaatan Fourier'n muunnos

Oletetaan, että $C := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$. Tällöin Fourier'n muunnokselle $\widehat{f}$ pätee:

1. Jos f on jatkuvasti derivoituva funktio, jolle $f(x) = o(1)$, kun $|x| \to \infty$, ja sen derivaatta f' on **itseisesti integroituva**, $\Rightarrow \quad \widehat{f}(p) = o(|p|^{-1})$, kun $|p| \to \infty$, ja lisäksi pätee

$$\mathcal{F}[f'](p) = \mathrm{i}p\widehat{f}(p)\,, \quad p \in \mathbb{R}$$

2. Olkoon f on n kertaa jatkuvasti derivoituva, $f^{(k)}$ on itseisesti integroituva $0 < k \leq n$ ja $f^{(k)}(x) = o(1)$, kun $|x| \to \infty$ ja $0 \leq k < n \quad \Rightarrow \quad$ kaikilla $0 < k \leq n$,

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](p) = (\mathrm{i}p)^k\widehat{f}(p)\,, \quad p \in \mathbb{R}$$
$$\widehat{f}(p) = o(|p|^{-k})\,, \quad |p| \to \infty$$

3. Jos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pätee tämä kaikilla $k \in \mathbb{N}$

19 Konvoluutio

Funktioiden f, g konvoluutio on funktio h,

$$h(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\,.$$

- Tätä merkitään $h = f * g$
- Jos sekä f että g ovat *itseisesti integroituvia*, suppenee konvoluution määrittelevä integraali itseisesti melkein kaikilla x ja myös funktio $h = f * g$ on tällöin itseisesti integroituva
- *Konvoluutio on symmetrinen*: $f * g = g * f$

20 Konvoluution Fourier'n muunnos

Fourier'n muunnos muuttaa konvoluution tuloksi:

$$\mathcal{F}[f * g](p) = \widehat{f}(p)\widehat{g}(p)\,, \qquad p \in \mathbb{R}\,,$$

ainakin, kun f ja g ovat itseisesti integroituvia

- *Tyypillisesti $f * g$ on säännöllisempi kuin kumpikaan funktioista f ja g*

  $\Rightarrow$ voidaan silottaa mitattua signaalia g ottamalla konvoluutio esim. Schwartzin funktion f kanssa

21 Versio Fubinin lauseesta

Oletetaan, että

1. E', E mitallisia joukkoja (esimerkiksi jotain reaaliakselin rajoitettuja tai rajoittamattomia välejä)
2. $F(x', x)$, $x' \in E'$, $x \in E$, jatkuva tai raja jatkuvista funktioista

Fubinin lause

Jos jompikumpi alla olevista iteroiduista integraaleista on äärellinen,

$$\int_{E'} \left[\int_E |F(x', x)| \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}x' < \infty \quad \text{tai} \quad \int_E \left[\int_{E'} |F(x', x)| \mathrm{d}x' \right] \mathrm{d}x < \infty \,,$$

niin **molemmat** näistä integraaleista ovat äärellisiä ja vastaavissa suppenevissa integraaleissa saa tehdä integrointijärjestyksen vaihdon:

$$\int_{E'} \int_E F(x', x) \mathrm{d}x \mathrm{d}x' = \int_E \int_{E'} F(x', x) \mathrm{d}x' \mathrm{d}x = \int_{E' \times E} F(x', x) \mathrm{d}(x', x) \,.$$

22 Parsevalin ja Plancherelin kaavat

Olkoot $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ja merkitään niiden Fourier'n muunnoksia $\widehat{f}$ ja $\widehat{g}$. Tällöin $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^2(\mathbb{R})$, ja pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^* f(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(p)^* \widehat{f}(p) \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(p)\right|^2 \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}$$

- Kaavat voidaan ilmaista tiiviimmin funktionormin ja skalaaritulon avulla:

$$\langle g | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \left\langle \widehat{g} \middle| \widehat{f} \right\rangle \quad \text{ja} \quad \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \left\|\widehat{f}\right\|^2$$

- Tässä kertoimet $\frac{1}{2\pi}$ katoavat, jos käytetään Fourier'n muunnoksesta jompaakumpaa symmetristä määritelmää

$\Rightarrow$ *Fourier'n muunnos on avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ unitaarinen kuvaus*

23 Moniulotteinen Fourier'n muunnos

Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ d-**ulotteinen Fourier'n muunnos** $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ määritellään

$$\widehat{f}(\boldsymbol{p}) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \mathrm{d}^d \boldsymbol{x}\,, \quad \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$$

Vastaava d-**ulotteinen Fourier'n käänteismuunnos** määritellään funktiolle $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$

$$(\mathcal{F}^{-1} g)(\boldsymbol{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} g(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{\mathrm{d}^d \boldsymbol{p}}{(2\pi)^d}\,, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$$

24 Rotaatioinvarianssi ja Fourier'n muunnos

- Parillisuus periytyy myös moniulotteisessa Fourier'n muunnoksessa:

$$f(-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad \widehat{f}(-\boldsymbol{p}) = \widehat{f}(\boldsymbol{p}), \quad \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$$

$$f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \quad \Rightarrow \quad \widehat{f}(-\boldsymbol{p}) = -\widehat{f}(\boldsymbol{p}), \quad \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$$

- Myös *rotaatioinvarianssi* periytyy:
  jos $f(R\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, rotaatiomatriiseille $R \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ja $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$
  $\Rightarrow \quad \widehat{f}(R\boldsymbol{p}) = \widehat{f}(\boldsymbol{p})$ rotaatiomatriiseille $R \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ja $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$

- Tällöin löytyy funktio $\varphi(r)$, $r \geq 0$, jolle $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(|\boldsymbol{x}|)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$,
  sekä funktio $\psi(r)$, $r \geq 0$, jolle $\widehat{f}(\boldsymbol{p}) = \psi(|\boldsymbol{p}|)$ kaikilla $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^d$

- Huomaa, että yllä *ei* kuitenkaan yleensä päde $\psi = \widehat{\varphi}$