1 Fourier'n sarja

Annetuista kertoimista c_k, $k \in \mathbb{Z}$, tehty Fourier'n sarja

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

- Funktio S on selvästi 2π-periodinen, eli $S(x+2\pi) = S(x)$
- Jos $\sum_k |c_k| < \infty$, suppenee sarja kaikkialla ja määrittelee *jatkuvan* funktion $S(x)$
- Jatkuvat periodiset funktiot ovat aina *rajoitettuja* ja niille löytyy pisteet, joissa ne saavat maksimi- ja minimiarvonsa

2 Fourier'n kertoimet

Olkoon f 2π-periodinen funktio, jolle

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$$

Sen **Fourier'n kertoimet** määritellään itseisesti suppenevina integraaleina

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x \,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

- Jonon $(\widehat{f}_k)$ Fourier'n sarjaa $S(x)$ kutsutaan funktion $f(x)$ *Fourier'n sarjaesitykseksi*
- Koska f on 2π-periodinen, voi *määritelmän integraalin aloitusarvoa siirtää mielivaltaisesti* (HT 3.3.a), esim.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x$$

Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on **jatkuva** 2π-periodinen funktio, ja

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{f}_k \right| < \infty \, .$$

Tällöin funktion f Fourier'n sarjaesitys suppenee **jokaisessa pisteessä** kohti funktiota f:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \, , \qquad x \in \mathbb{R}$$

- Tyypillisesti *epäjatkuvien* funktioiden Fourier'n sarjat suppenevatkin vain määritelmän pääarvomielessä
- On tärkeää, että *periodinen funktio f on jatkuva myös päätepisteissä* 0 *ja* 2π

4 Dirichlet'n ehdot

1. Funktiolla f on vain äärellisen monta *epäjatkuvuuspistettä* x_0 välillä $[0, 2\pi]$, joissa kaikissa löytyy funktiolle sekä vasemmalta ja oikealta otettu raja-arvo, eli luvut

$$f(x_0^-) := \lim_{x \to x_0^-} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

$$f(x_0^+) := \lim_{x \to x_0^+} f(x) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

2. Funktiolla f on vain äärellinen määrä *paikallisia ääriarvopisteitä* (maksimeja ja minimejä) välillä $[0, 2\pi]$

   (Tämä tarkoittaa sitä, että f ei saa oskilloida liian paljon.)

5 Dirichlet'n lause

Jos f on 2π-periodinen reaalifunktio, joka toteuttaa Dirichlet'n ehdon, sen Fourier'n sarja

$$S(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

1. *S esittää funktiota f kaikissa sen jatkuvuuspisteissä*, eli $S(x) = f(x)$, jos x on piste, jossa f on jatkuva
2. Funktion f *epäjatkuvuuspisteissä*, saa S arvon epäjatkuvuuden muodostaman *hypyn puolivälistä*,

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

- Jos funktion f on *kompleksiarvoinen*, mutta sekä $\mathrm{Re}\, f$ että $\mathrm{Im}\, f$ toteuttavat erikseen Dirichlet'n ehdon, lause pätee

6 Trigonometriset sarjat

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

$$a_k = \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x$$

$$b_k = \mathrm{i} \left(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \mathrm{d}x$$

- Jos f on *reaaliarvoinen*, on myös $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ja $\widehat{f}_k^* = \widehat{f}_{-k}$
- Jos f on *parillinen*, on $f(x) \sin(kx)$ pariton, joten $b_k = 0$
- Jos f on *pariton*, on $f(x) \cos(kx)$ pariton, joten $a_k = 0$

7 Funktion esittäminen Fourier'n sarjan avulla

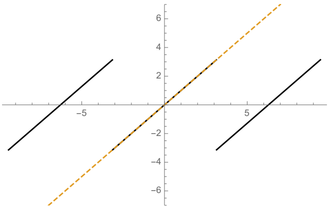
Mitä tehdä, kun pyydetään laskemaan reaaliakselilla määritellyn funktion f Fourier'n sarja jollain välillä $[a, b]$, $a < b$?

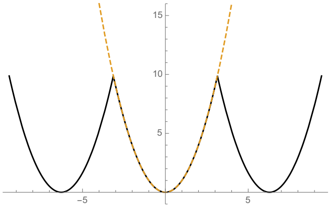
1. Poistetaan toinen välin päätepisteistä, esim. $I :=]a, b]$
2. Määritellään funktio g välillä I funktion f rajoittumana tälle välille, eli asetetaan $g(x) = f(x)$, kun $x \in I$
3. *Jatketaan funktio g periodisesti koko reaaliakselille*, eli $g(x + mL) := g(x) = f(x)$, $x \in I$, $m \in \mathbb{Z}$, jossa $L = b - a > 0$
4. Käytetään L-periodisen funktion g Fourier'n sarjaa $S(x)$

Tällöin kaikilla $x \in I$, joilla $S(x) = g(x)$, on myös $S(x) = f(x)$, eli

Saatu sarja esittää funktiota f välin $]a, b]$ pisteissä

Funktion $f(x)$ (oranssi katkoviiva) periodiset jatkeet $g(x)$ (musta viiva) väliltä $]-\pi, \pi]$:





(*vasen kuva*) $f(x) = x$, (*oikea kuva*) $f(x) = x^2$

9 L-periodisen funktion Fourier'n sarjaesitykset

Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on itseisesti integroituva välillä $[a, a+L]$, jossa $a \in \mathbb{R}$ ja $L > 0$. Määritellään

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{L} \int_a^{a+L} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}(x-a)} \mathrm{d}x$$

Tällöin funktion f *Fourier'n sarja välin "päätepistekannassa"* on

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}(x-a)}$$

- Jos f toteuttaa Dirichlet'n ehdot, on $S(x) = f(x)$ jokaisessa sen L–periodisen jatkeen jatkuvuuspisteessä $x \in [a, a+L]$
- Funktiolle f voi toki tehdä myös esityksen "normaalikannassa" käyttäen funktioita $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}x}$. Tämän sarjan kertoimet ovat $\widehat{f}_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{2\pi}{L}a}$. *Lähes poikkeuksetta muokataan ensin annettua funktiota siten, että haluttu kehitysväli alkaa origosta, eli $a = 0$*

10 L-periodisen funktion Fourier'n sarjaesitykset

Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on itseisesti integroituva välillä $[a, a+L]$, jossa $a \in \mathbb{R}$ ja $L > 0$. Määritellään

$$a_k := \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x) \cos\left(k \frac{2\pi}{L}(x-a)\right) \mathrm{d}x$$

$$b_k := \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x) \sin\left(k \frac{2\pi}{L}(x-a)\right) \mathrm{d}x$$

Tällöin funktion f *trigonometrinen sarja välillä* $[a, a+L]$ on

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{L}(x-a)\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{L}(x-a)\right) \right] .$$

- Jos f toteuttaa Dirichlet'n ehdot, on $S(x) = f(x)$ jokaisessa sen L–periodisen jatkeen jatkuvuuspisteessä $x \in [a, a+L]$

11 Funktion esittäminen kosini- ja sinisarjoina

Funktioita voi esittää Fourier'n ja trigonometristen sarjojen lisäksi käyttäen pelkästään sineistä tai kosineista koostuvia sarjoja: *tehdään jatke, joka on joko parillinen tai pariton*

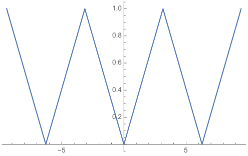
- Asetetaan ensin $g(y) = f(a + \frac{L}{\pi}y)$ arvoilla $0 < y < \pi$
- *Parillinen jatke* asettamalla $g(0) = f(a)$, $g(\pi) = g(-\pi) = f(a + L)$, ja $g(y) = g(-y)$, kun $-\pi < y < 0$
- *Pariton jatke* asettamalla $g(0) = 0 = g(\pi) = g(-\pi)$, ja $g(y) = -g(-y)$, kun $-\pi < y < 0$
- Tämän jälkeen tehdään periodinen jatke asettamalla $g(y + m2\pi) = g(y)$, $y \in]-\pi, \pi]$, $m \in \mathbb{Z}$

11 Funktion esittäminen kosini- ja sinisarjoina

Funktioita voi esittää Fourier'n ja trigonometristen sarjojen lisäksi käyttäen pelkästään sineistä tai kosineista koostuvia sarjoja: *tehdään jatke, joka on joko parillinen tai pariton*

- Asetetaan ensin $g(y) = f(a + \frac{L}{\pi}y)$ arvoilla $0 < y < \pi$
- *Parillinen jatke* asettamalla $g(0) = f(a)$, $g(\pi) = g(-\pi) = f(a+L)$, ja $g(y) = g(-y)$, kun $-\pi < y < 0$
- *Pariton jatke* asettamalla $g(0) = 0 = g(\pi) = g(-\pi)$, ja $g(y) = -g(-y)$, kun $-\pi < y < 0$
- Tämän jälkeen tehdään periodinen jatke asettamalla $g(y + m2\pi) = g(y)$, $y \in]-\pi, \pi]$, $m \in \mathbb{Z}$

Esim: $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, parillinen periodinen jatke toteuttaa $g(x) = |x|/\pi$, $x \in [-\pi, \pi]$, ja sen kuvaaja on



Funktion f **kosinisarja** välillä $[a, a+L]$

$$S_c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\Big(k\frac{\pi}{L}(x-a)\Big)$$

$$a_k = \frac{2}{L}\int_a^{a+L} f(x)\cos\Big(k\frac{\pi}{L}(x-a)\Big)\,\mathrm{d}x$$

Funktion f **sinisarja** välillä $[a, a+L]$

$$S_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\Big(k\frac{\pi}{L}(x-a)\Big)$$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_a^{a+L} f(x)\sin\Big(k\frac{\pi}{L}(x-a)\Big)\,\mathrm{d}x$$

13 Mihin eri sarjoja käytetään?

Oletetaan, että annetun esityksen *sarja suppenee itseisesti*
$\Rightarrow$ sarja suppenee kohti jatkuvaa funktiota S ja oletetaan $S = f$.

Kosini- ja sinisarjoja käytetäänkin yleensä vain yllä annetussa "päätepistekannassa", sillä tällöin:

1. Fourier'n sarja (ja siis myös trigonometrinen sarja) suppenee parhaiten, jos funktio on jatkuva ja *periodinen* välin päätepisteissä, eli funktioille f, joille pätee $f(a) = f(a + L)$. Päätepisteen arvo voi tässä olla mielivaltainen

2. Sinisarja suppenee parhaiten, jos funktio f on jatkuva ja toteuttaa ns. **Dirichlet'n reunaehdot** välin päätepisteissä, eli jos se häviää reunalla: $f(a) = 0 = f(a + L)$

3. Kosinisarja suppenee parhaiten, jos funktio f on jatkuva, periodinen ja toteuttaa ns. **Neumannin reunaehdot** välin päätepisteissä, eli jos sen derivaatta häviää reunalla: $f'(a) = 0 = f'(a + L)$

14 Approksimaation virhe funktionormin avulla

- Jos hiukkastiheyttä $\rho(x)$ arvioidaan simuloidulla hiukkastiheydellä $r(x)$, ei arvion tarvitse olla hyvä jokaisessa pisteessä x
- Virhettä voidaan kuvata usein paremmin virheen $f(x) := \rho(x) - r(x)$ *funktionormin* avulla:

$$\|f\| := \sqrt{\int |f(x)|^2 \mathrm{d}x}$$

- Yleistää luonnollisella tavalla funktioille $\mathbb{R}^d$:n *vektorin pituuden*

$$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2}$$

15 Funktionormin perusominaisuuksia

- Oletetaan, että $f : E \to \mathbb{C}$ on funktio, joka on määritelty jossain joukossa E, joka voi olla esimerkiksi koko reaaliakseli tai sen väli
- Määritellään funktionormin avulla vastaava *funktioavaruus* $L^2(E)$, jolle pätee
  1. $\|f\| := \sqrt{\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}x}$
  2. $f \in L^2(E)$, jos $\|f\| < \infty$
  3. $f \in L^2(E)$ on *nollafunktio*, jos $\|f\| = 0$ (merkitään "$f = 0$")
  4. Jos $f, g \in L^2(E)$, niiden välinen *etäisyys* $= \|f - g\|$
  5. Jos $f, g \in L^2(E)$, merkitään $f = g$, jos $\|f - g\| = 0$

Seuraavat vektoreiden pituuksille pätevät ominaisuudet pätevät myös funktionormille:

- $\|f\| \geq 0$, kaikilla $f \in L^2(E)$.
- Jos $\alpha \in \mathbb{C}$ ja $f \in L^2(E)$, määritellään funktio $h := \alpha f$ kaavalla $h(x) = \alpha f(x)$, $x \in E$. Tällöin $\alpha f \in L^2(E)$ ja $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$.
- Jos $f, g \in L^2(E)$, määritellään funktio $h := f + g$ kaavalla $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in E$.
- Kolmioepäyhtälö pätee myös normille,

$$\big|\, \|f\| - \|g\| \,\big| \leq \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \ .$$

17 Skalaaritulo eli sisätulo

Funktionormia vastaava skalaaritulo

$$\langle g|f\rangle := \int g(x)^* f(x)\mathrm{d}x\,, \qquad f, g \in L^2(E)$$

- Yhteys funktionormiin on

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle}$$

- Skalaaritulo yleistää funktioavaruuteen $\mathbb{C}^d$:n pistetulon

$$\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{d} w_i^* z_i\,, \qquad w, z \in \mathbb{C}^d$$

- ...joka yleistää $\mathbb{R}^d$:n pistetulon

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i\,, \qquad x, y \in \mathbb{R}^d$$

- Skalaaritulo on hyvin määritelty, sillä

$$|\langle g|f\rangle| \leq \int |g(x)||f(x)|\mathrm{d}x \leq \|g\|\,\|f\|$$

$\Rightarrow$ *skalaaritulon määrittelevä integraali on itseisesti suppeneva* kaikilla $f, g \in L^2(E)$

Seuraa suoraan tuloksesta

Hölderin epäyhtälö

Kaikilla (mitallisilla) funktioilla f, g pätee

$$\int |g(x)||f(x)|\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int |g(x)|^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int |f(x)|^2\mathrm{d}x}$$

myös silloin, kun jokin näistä integraaleista antaa arvoksi $+\infty$.

19 Skalaaritulon perusominaisuuksia

- $\langle f|f\rangle = \|f\|^2 \geq 0$, jossa $\langle f|f\rangle = 0$, jos ja vain jos $\|f\| = 0$
- (Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö) $|\langle f|g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|$
- (konjugaattisymmetrinen) $\langle f|g\rangle^* = \langle g|f\rangle$
- (lineaarinen toisessa argumentissa) $\langle f|\alpha g_1 + \beta g_2\rangle = \alpha\langle f|g_1\rangle + \beta\langle f|g_2\rangle$, aina kun $f, g_1, g_2 \in L^2(E)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- (konjugaattilineaarinen ensimmäisessä argumentissa) $\langle \alpha f_1 + \beta f_2|g\rangle = \alpha^*\langle f_1|g\rangle + \beta^*\langle f_2|g\rangle$, aina kun $f_1, f_2, g \in L^2(E)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Ortogonaaliset joukot

- Funktiot $f, g \in L^2(E)$ ovat *ortogonaaliset*, jos niiden skalaaritulo on nolla: $\langle f | g \rangle = 0$
- Funktiojono $f_n \in L^2(E)$ on *ortonormaali*, jos mitkä tahansa kaksi sen funktiota ovat ortogonaaliset ja lisäksi jokaisen funktion normi on yksi. Tämä toteutuu jos ja vain jos

$$\langle f_m | f_n \rangle = \delta_{m,n} = \mathbb{1}_{\{m=n\}} = \begin{cases} 1\,, & \text{jos } m = n\,, \\ 0\,, & \text{jos } m \neq n\,. \end{cases}$$

- Jonosta (f_n) voidaan muodostaa *lineaarikombinaatiota*:

  valitaan jonon indeksit n_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, näihin kuuluvat vakiot $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ja määritellään funktio $h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_{n_i}$ kaavalla

$$h(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_{n_i}(x)$$

- Ortonormaali funktiojono (e_n) on *täydellinen*, jos sen lineaarikombinaatioiden avulla voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti (funktionormissa) mitä tahansa funktiota $f \in L^2(E)$.

  Toisin sanoen, jokaista tarkkuutta $\varepsilon > 0$ kohti täytyy löytyä jonon indeksit n_i ja vakiot $\alpha_i \in \mathbb{C}$, joilla

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_{n_i} \right\| < \varepsilon \, .$$

- Täydellistä ortonormaalia funktiojonoa kutsutaan avaruuden $L^2(E)$ *ortonormaaliksi kannaksi*

- Funktion $f \in L^2(E)$ *komponentit* c_n ortonormaalissa kannassa (e_n) määritellään sisätuloina

$$c_n := \langle e_n | f \rangle$$

22 Besselin epäyhtälö

Olkoon (e_n) ortonormaali funktiojono avaruudessa $L^2(E)$, $f \in L^2(E)$ ja $c_n := \langle e_n | f \rangle$ vastaavat komponentit. Tällöin

$$\|f\|^2 \geq \sum_n |c_n|^2 \quad \text{ja} \quad \left\| f - \sum_n c_n e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_n |c_n|^2 \geq 0\,.$$

- Erityisesti siis aina $\sum_n |c_n|^2 < \infty$
- Funktio $\sum_n c_n e_n$ on lisäksi paras approksimaatio funktiosta f jonon (e_n) lineaarikombinaatioiden avulla: jos $\alpha_n \in \mathbb{C}$ on jono kertoimia ja löytyy jokin indeksi m, jolla $\alpha_m \neq c_m$, pätee

$$\left\| f - \sum_n \alpha_n e_n \right\| > \left\| f - \sum_n c_n e_n \right\|$$

23 Parsevalin kaava

Ortonormaali funktiojono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on avaruuden $L^2(E)$ ortonormaali kanta täsmälleen silloin, kun kaikilla $f \in L^2(E)$ pätee

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n|f\rangle|^2$$

Tällöin

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle e_n|f\rangle\, e_n \right\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n|f\rangle\, e_n = \sum_{n=1}^{\infty} |e_n\rangle \langle e_n|f\rangle$$

23 Parsevalin kaava

Ortonormaali funktiojono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on avaruuden $L^2(E)$ ortonormaali kanta täsmälleen silloin, kun kaikilla $f \in L^2(E)$ pätee

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n|f\rangle|^2$$

Tällöin
$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} \langle e_n|f\rangle\, e_n \right\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n|f\rangle\, e_n = \sum_{n=1}^{\infty} |e_n\rangle\, \langle e_n|f\rangle$$

Plancherelin kaava

Jos (e_n) on avaruuden $L^2(E)$ *ortonormaali kanta*, on funktioiden $f, g \in L^2(E)$ sisätulo annettavissa komponenttien avulla:

$$\langle f|g\rangle = \sum_{n} \langle f|e_n\rangle\, \langle e_n|g\rangle$$

Fourier'n sarjat ja ortonormaali kanta

- Lauseen 6.5 todistuksessa nähtiin, että kun $k', k \in \mathbb{Z}$, pätee

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)x}\mathrm{d}x = \mathbb{1}_{\{k'=k\}} = \begin{cases} 0\,, & \text{jos } k'-k \neq 0 \\ 1\,, & \text{jos } k'-k = 0 \end{cases}$$

- Näin ollen funktiot

$$e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,, \quad x \in [0, 2\pi],\ k \in \mathbb{Z}\,,$$

muodostavat *ortonormaalin jonon* avaruudessa $L^2([0, 2\pi])$

- Tämä jono on itse asiassa *täydellinen*
(Mitä tahansa $f \in L^2(E)$ voi approksimoida mielivaltaisen tarkasti normissa jollain Dirichlet'n ehdot toteuttavalla funktiolla)

- $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ on siis avaruuden $L^2([0, 2\pi])$ eräs *ortonormaali kanta*

- Koordinaatit tässä kannassa saadaan Fourier'n kertoimien avulla

$$\langle e_k|f\rangle = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}_k$$

25 Parsevalin kaava Fourier'n sarjoille

- Olkoon $f, g \in L^2([0, 2\pi])$ ja $\widehat{f}_k$, $\widehat{g}_k$ niiden Fourier'n kertoimet
- Olkoon a_k, b_k funktion f trigonometrisen sarjan kertoimet

Parsevalin kaava

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}_k\right|^2$$
$$= \pi \left[\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)\right]$$

Plancherelin kaava

$$\int_0^{2\pi} f(x)^* g(x) \mathrm{d}x = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k^* \, \widehat{g}_k$$

- Jos f on 2π-periodinen, voi näissä kaavoissa korvata integrointivälin $[0, 2\pi]$ välillä $[-\pi, \pi]$