

Fysiikan matemaattiset menetelmät I

Tekijät:

Jani Lukkarinen (editori 2015–2016),
Timo Kärkkäinen (2016, luvut 1, 3 ja 4.1)

Viimeksi päivitetty: 2. tammikuuta 2017

Esipuhe

Tämä luentomoniste perustuu Helsingin yliopistossa vuosina 2015–2016 pidettyihin Fysiikan matemaattiset menetelmät I -kursseihin. Sisältö pohjautuu pitkälti J. Honkosen samannimiseen oppikirjaan [1], mutta materiaalia on täydennetty ja painotusta muutettu peruskäsitteiden suuntaan. Vastaava materiaali englanniksi löytyy Arfkenin ja Weberin oppikirjasta [2]. Tulosten matemaattiset todistukset sivuutetaan, mutta ne käydään yleensä läpi matematiikan kompleksi- ja Fourier-analyysin kursseilla. Lähes kaikki tässä esitetyt tulokset löytyvät myös W. Rudinin reaalianalyysin ja funktionaalianalyysin kirjoista [3, 4].

Monistetta voi käyttää ei-kaupallisiin tarkoituksiin, eli erityisesti kopioida vapaasti omaan käyttöön kurssimonisteena.

Käyttöohjeita ja merkintöjä

Monisteessa on mukana myös **lisämateriaalia**, jota ei ehdi käymään läpi perusteellisesti luen-tojen aikana. Kohdat, joihin on lisätty teksti ”(Lisä)” sisältävät hieman harvemmin tarvittavia tuloksia tai perustulosten tarkennuksia. Näihin tuloksiin kannattaa kyllä tutustua, mutta niiden ulkoa muistamista ei oleteta kurssikokeessa.

Lisäksi osaan tuloksista on lisätty **matemaattisia tarkennuksia**, jotka tunnistaa merkinnästä ”(MAT)”. Näissä osioissa täydennetään matemaattisia yksityiskohtia, kuten tarkennuksia lausei-den oletuksiin. Tarkennuksista joudutaan kuitenkin joskus käyttämään matemaattista käsitteistöä, joka tulee tutuksi vasta myöhemmin mahdollisissa matematiikan opinnoissa. Nämä osiot voi siis myös huoletta hypätä yli ja palata niihin tarpeen vaatiessa matematiikan opintojen karttuessa.

Monisteessa oletetaan, että seuraavat **matemaattiset lyhennysmerkinnät** ovat tuttuja.

Lyhennysmerkintöjä luvuille ja lukujoukoille:

$[a, b]$	Suljettu väli a :sta b :hen, eli niiden reaalilukujen x joukko, joille $a \leq x \leq b$
$]a, b[$	Avoim väli a :sta b :hen, eli niiden reaalilukujen x joukko, joille $a < x < b$
\mathbb{R}	Reaalilukujen joukko. Merkitään myös $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$
\mathbb{R}^2	Taso, eli kaksikomponenttisten vektorien joukko. Kun $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, on \mathbf{x} :n en-simmäinen komponentti x_1 ja toinen komponentti x_2 ja tällöin merkitään $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Merkitään myös $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
\mathbb{R}_+	Ei-negatiivisten reaalilukujen joukko $[0, \infty[$
\mathbb{N}	Luonnollisten lukujen joukko $\{1, 2, \dots\}$
\mathbb{N}_0	Luonnolliset luvut ja nolla, eli joukko $\{0, 1, 2, \dots\}$
\mathbb{Z}	Kokonaislukujen joukko $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
i	Imaginaariyksikkö
\mathbb{C}	Kompleksilukujen joukko $\{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
\emptyset	Tyhjä joukko, eli joukko jonka alkioden lukumäärä on nolla. Voidaan merkitä myös $\emptyset = \{\}$.

Muita matemaattisia merkintöjä:

\in	$x \in X$ tarkoittaa, että x kuuluu joukkoon X . Käytetään usein lyhennysmer-kintänä, eli ” $x \in \mathbb{R}$ ” luetaan ” x on reaaliluku”.
\notin	$x \notin X$ tarkoittaa, että x ei kuulu joukkoon X
$:=, =:$	” $A := B$ ” ja ” $B =: A$ ” molemmat tarkoittavat, että A määritellään samaksi kuin (jo tunnettu) B
$P \Rightarrow Q$	Ehdosta P seuraa, että ehto Q toteutuu
$P \Leftrightarrow Q$	Ehto P toteutuu jos ja vain jos ehto Q toteutuu
$\{x \mid P(x)\}$	Joukko, joka koostuu alkioista x , joille ehto ” $P(x)$ ” pätee.
$\{x \in X \mid P(x)\}$	Joukko, joka koostuu joukon X alkioista x , joille ehto ” $P(x)$ ” pätee. Esim. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
$f : X \rightarrow Y$	Kuvaus f lähtöjoukolta X maalijoukkoon Y . Tarkoittaa siis sääntöä, jossa jokaista $x \in X$ kohti annetaan $f(x) \in Y$. Esim. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tarkoittaa tuttuja reaalifunktioita. (MAT) Kuvaus f määritellään matematiikassa sen <i>graafin</i> eli kuvaajan kaut-ta, joka on tulon $X \times Y$ osajoukko $\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$. (Vaikka kaikki $X \times Y$:n osajoukot eivät ole minkään funktion graafeja, kukin osajoukko voi olla kor-keintaan yhden funktion graafi ja se määrää funktion yksikäsitteisesti.)

Joukkojen A, B käsittelyssä käytettäviä merkintöjä:

$A \cup B$	Yhdiste, määritellään joukkona $\{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$
$A \cap B$	Leikkaus, määritellään joukkona $\{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$
$A \setminus B$	Erotus, määritellään joukkona $\{x \in A \mid x \notin B\}$
$A \subset B$	A sisältyy B :hen, eli $x \in A \Rightarrow x \in B$

Sisältö

Esipuhe	i
Käyttöohjeita ja merkintöjä	ii
1 Analyttiset funktiot	1
1.1 Kompleksiluvut	1
1.2 Kompleksilukujen perusominaisuuksia	2
1.2.1 Kompleksiluvun argumentti $\arg z$ ja sen päähaara $\text{Arg } z \in]-\pi, \pi]$	3
1.2.2 Liittoluku eli kompleksikonjugaatti z^*	4
1.2.3 de Moivren kaava ja kompleksijuuret	5
1.3 Kompleksimuuttujan alkeisfunktio	7
1.3.1 Polynomit	7
1.3.2 Kompleksitason eksponenttifunktio ja sen johdannaiset	8
1.3.3 Alkeisfunktioiden rationaaliversiot	10
1.3.4 Alkeisfunktioiden käänteisfunktioita	10
1.4 Kompleksifunktion derivaatta ja analyttisyys	13
1.4.1 Kompleksitason perusominaisuuksia	13
1.4.2 Kompleksiderivaatta ja analyttisyys	15
1.4.3 Cauchyn–Riemannin yhtälöt (CR–yhtälöt)	19
1.5 Kompleksitason viivaintegraalit	21
1.5.1 Tason viivaintegraalit	21
1.5.2 (Lisä) Analyttisen funktion rakentaminen reaaliosta	22
1.5.3 Kompleksitason viivaintegraalit	24
1.6 Cauchyn lause	26
1.6.1 Derivaattafunktion viivaintegraalit	26
1.6.2 Cauchyn lause	26
1.7 Cauchyn integraalikaavat	31
1.7.1 Liouvilien lause ja algebran peruslause	34
1.7.2 Maksimiperiaate	35
1.7.3 (Lisä) Moreran lause	36
2 Sarjat ja analyttisyys	37
2.1 Lukusarjat	37
2.1.1 Geometrinen summa ja sarja	37
2.1.2 Sarjojen perusominaisuuksia	39
2.1.3 Positiivitermiset sarjat	40
2.1.4 Kompleksilukusarjojen yleisiä ominaisuuksia	46
2.2 Funktiosarjat	50
2.2.1 (Lisä) Funktiosarjan jatkuvuus, integrointi ja derivointi	50
2.3 Potenssisarjat	52
2.4 Taylorin sarja	55
2.5 Laurentin sarja	57

3	Residylaskenta	63
3.1	Analyyttisen funktion nollakohdat	63
3.2	Analyyttisten funktioiden erikoispisteet	64
3.3	Residyause	68
3.4	Reaali-integraalien laskeminen residylauseen avulla	70
3.4.1	Rationaaliset integraalit koko reaaliakselin yli	70
3.4.2	Pääarvointegraalit	72
3.4.3	Rationaaliset trigonometriset integraalit	74
3.4.4	Fourier'n muunnoksen integraalit	76
3.4.5	Fourier'n kosini ja sinimuunnoksen integraalit	78
3.4.6	(Lisä) Logaritmi- ja yleisiä potenssifunktioita sisältävät integraalit	79
4	Lisää analyttisistä funktioista	85
4.1	Äärettömyyspiste ja Riemannin pallo	85
4.2	(Lisä) Argumentin periaate ja Rouchen lause	87
4.3	(Lisä) Meromorfinen funktion napakehitelmä	88
4.4	(Lisä) Kokonaisen funktion tulokehittäminen	90
5	Eulerin funktiot ja asymptoottiset sarjat	93
5.1	Analyyttinen jatkaminen	93
5.1.1	(Lisä) Analyyttisyyden säilyminen parametrin yli integroitaessa	95
5.2	Eulerin Γ -funktio	96
5.3	Eulerin B-funktio	102
5.4	Asymptoottiset sarjakehitelmät	104
5.4.1	Liite: Suuruusluokkanotaatiot " O " ja " o "	107
5.4.2	Liite: Taylorin polynomi reaalfunktion approksimaationa	109
5.5	Satulapisteapproksimaatio	110
5.5.1	Reaaliset satulapisteintegraalit	110
5.5.2	Liite: Parillisten ja parittomien funktioiden yli integrointi	115
5.5.3	Analyttiset kompleksiarvoiset satulapisteintegraalit	115
5.5.4	(Lisä) Satulapistealgoritmin tarkempi perustelu	119
5.6	(Lisä) Eulerin–Maclaurinin summakaava	121
6	Fourier'n sarja	125
6.1	Johdantoa: Diskreetti Fourier'n muunnos	125
6.2	Fourier'n sarja välillä $[0, 2\pi]$	127
6.3	Trigonometriset sarjat	132
6.4	L -periodisen funktion Fourier'n sarjaesitykset	134
6.4.1	Funktion esittäminen kosini- ja sinisarjoina	136
6.5	Sarjaesitykset ortonormaalin funktiojonon avulla	139
6.5.1	Approksimaation virheen mittaaminen funktionormilla	139
6.5.2	Skalaaritulo, ortogonaalius ja ortonomaalit kannat	141
6.5.3	Parsevalin ja Plancherelin kaavat Fourier'n sarjoille	146
7	Fourier'n muunnos	149
7.1	Johdantoa	149
7.2	Funktion esittäminen Fourier'n muunnoksen avulla	150
7.2.1	Fourier'n kosini- ja sinimuunnokset	152
7.3	Fourier'n muunnoksen perusominaisuuksia	153
7.4	Konvoluutio ja sen Fourier'n muunnos	155
7.5	Parsevalin ja Plancherelin kaavat Fourier'n muunnokselle	156
7.6	Moniulotteinen Fourier'n muunnos	158
7.7	(Lisä) Fourier'n käänteismuunnos ja Gibbsin ilmiö	160

8	Laplacen ja Mellinin muunnokset	165
8.1	(Lisä) Kaksipuolinen Laplacen muunnos ja Fourier'n muunnoksen analyyttinen jatkaminen	165
8.2	Laplacen muunnos	167
8.2.1	Laplacen muunnoksen perusominaisuuksia	171
8.2.2	"Viivästyneen" funktion Laplacen muunnos	174
8.2.3	Konvoluutio ja Laplacen muunnos	176
8.2.4	Esimerkkejä Laplacen muunnoksen käytöstä	176
8.3	(Lisä) Mellinin muunnos	180
9	Distributiot	183
9.1	Motivaatio	183
9.2	Funktiojonon rajana määritelty distributio	184
9.3	(Lisä) Distributioiden matemaattinen määritelmä	185
9.4	Distributioiden perusominaisuuksia	185
9.5	(Lisä) Distributioiden "kertominen" keskenään	188
9.6	(MAT) Liite: Muita distributiotyyppejä ja testifunktioavaruuksia	189

Luku 1

Analyttiset funktiot

1.1 Kompleksiluvut

Alkuperäinen motivaatio: Kaikilla reaalikertoimisilla polynomiyhtälöillä ei ollut ratkaisuja reaalilukujen joukossa \mathbb{R} . Esimerkiksi ei löydy reaalilukua x , jolle $x^2 + 1 = 0$. Osoittautui, että ratkaisuja löytyy aina jos ”lisätään” reaalilukuihin uusi alkio ” i ”, joka toteuttaa kertolaskusäännön $i^2 = -1$ (tällöin i ei voi olla reaaliluku).

Tämä laajennus on osoittautunut erittäin hyödylliseksi sekä matematiikassa (algebran peruslause, analyttisten funktioiden teoria, matriisien diagonalisointi, ...) että fysiikassa (aaltoyhtälön ratkaiseminen Fourier-muunnoksen avulla, Schrödingerin yhtälö, ...).

Määritelmä 1.1 (Algebraallinen) Olkoon $i = \textit{imaginääriyksikkö}$ ¹ (engl. *imaginary unit*). Sovitaan, että $i^2 = -1 \in \mathbb{R}$ ja muuten kaikki normaalit reaalilukujen laskusäännöt pätevät. Olkoon \mathbb{C} näin saatujen **kompleksilukujen** (engl. *complex number*) joukko.

Osoittautuu, että jokainen kompleksiluku $z \in \mathbb{C}$ voidaan esittää kahden reaaliluvun x ja y avulla summana: $z = x + iy$. Tällöin x on z :n *reaaliosa*, merkitään ” $\text{Re } z$ ”, ja y on z :n *imaginääriosia*, merkitään ” $\text{Im } z$ ”. Esitys reaalij- ja imaginääriosan avulla on yksikäsitteinen ja täydellinen, eli jos $z \in \mathbb{C}$, niin aina löytyy tasan yksi pari $x, y \in \mathbb{R}$, joille $z = x + iy$. Tämän takia voidaan sanoa, että \mathbb{C} :n alkiot ja tason \mathbb{R}^2 pisteet ovat samastettavissa, ja usein puhutaankin siksi *kompleksitasosta* \mathbb{C} . Tästä eteenpäin käytetäänkin kompleksiluvuista myös esitystä tason vektoreina, eli jos $x = \text{Re } z$ ja $y = \text{Im } z$, niin $z = x + iy$ voidaan kirjoittaa myös muodossa $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, vrt. Kuva 1.1.

Käyttämällä määritelmän mukaisia tavallisia laskusääntöjä, saadaan kahden kompleksiluvun $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$ *tulolle* kaava

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (1.1)$$

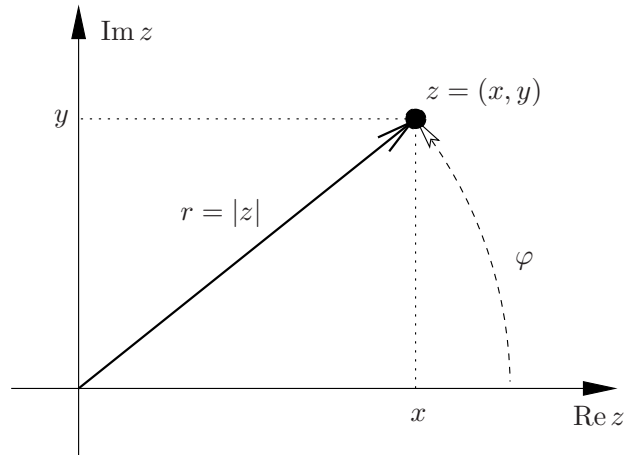
ja niiden *summalle* kaava

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + iy_1 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1.2)$$

Usein onkin parempi ajatella kompleksilukuja tason pisteinä ja tästä saadaan konkreettisempi määritelmä, jota voi käyttää yllä annetun abstraktin algebraallisen version sijasta.

Määritelmä 1.2 (Geometrinen) Lähdetään *liikkeelle* reaalilukupareista (x, y) , eli otetaan $\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Identifioidaan x -akseli reaalilukujen \mathbb{R} kanssa ja y -akseli puhtaiden imaginäärilukujen $i\mathbb{R}$ kanssa.

¹Suomen kielessä sekä imaginääri- että imaginaari-etuliite ovat hyväksyttäviä.



Kuva 1.1: Kompleksiluvun $z = x + iy$ geometrinen esitys karteesisissa ($z = (x, y)$) ja napakoordinaateissa ($z = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$).

Jos $\hat{e}_1 = (1, 0)$ ja $\hat{e}_2 = (0, 1)$ ovat \mathbb{R}^2 :n yksikkövektorit, identifioidaan siis kompleksiluvut $1 = \hat{e}_1$ ja $i = \hat{e}_2$. Tällöin päädytään samaan esitykseen kuin mistä puhuttiin algebrallisen määritelmän yhteydessä: kun $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, pätee

$$z = x\hat{e}_1 + y\hat{e}_2 = x + iy.$$

Jotta algebrallinen ja geometrinen määritelmä olisivat yhtäpitävät, määritellään yhteenlasku \mathbb{C} :ssä käyttäen kaavaa (1.2) ja kertolasku kaavalla (1.1). Nähdään, että (1.2) vastaa tavallista \mathbb{R}^2 -vektorien yhteenlaskua:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Jos $z = (\alpha, 0) \in \mathbb{C}$, vastaa (1.1) tavallista vektorin kertomista skalaarilla $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$zz_2 = (\alpha, 0)(x_2, y_2) = (\alpha x_2, \alpha y_2) = \alpha(x_2, y_2),$$

ja yleisesti saadaan (1.1):stä kertolaskusääntö

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \quad (1.3)$$

Eli kompleksitaso \mathbb{C} vastaa vektoriavaruutta \mathbb{R}^2 , mutta *siihen on määritelty lisäksi ylimääräinen kertolaskuoperaatio* (1.3). Kertolasku on selvästi vaihdannainen, eli

$$z_2z_1 = (x_2, y_2)(x_1, y_1) = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = z_1z_2.$$

Yhteenvedo kompleksilukujen laskusäännöistä löytyy taulukosta 1.1.

1.2 Kompleksilukujen perusominaisuuksia

Kun $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$ on

- $\operatorname{Re} z := x = z$:n reaaliosa
- $\operatorname{Im} z := y = z$:n imaginääriosia
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = z$:n **moduli** eli **itseisarvo**. Tämä on sama kuin \mathbb{R}^2 :n vektorin (x, y) **normi**. Näin ollen **kolmioepäyhtälöt** pätevät: kaikilla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Taulukko 1.1: Yhteenveto kompleksilukujen laskusäännöistä.

Kaikilla $z, z', w \in \mathbb{C}$ pätee

$$\begin{aligned} (z + z') + w &= z + (z' + w) & z + z' &= z' + z \\ (zz')w &= z(z'w) & zz' &= z'z \\ w(z + z') &= wz + wz' \end{aligned}$$

Lisäksi kompleksiluvuille $0 = (0, 0)$, $1 = (1, 0)$, $i = (0, 1)$ ja $-1 = (-1, 0)$ pätee kaikilla $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} z + 0 &= z & 1z &= z \\ z + (-z) &= 0 & -z &= (-1)z \\ & & ii &= -1 \end{aligned}$$

Käänteisluvut $z^{-1} = 1/z$ määritellään seuraavan tuloksen avulla.

Jos $z \neq 0$, löytyy tasan yksi $z^{-1} \in \mathbb{C}$ jolla $z^{-1}z = 1$.

Nollan käänteisluku ” 0^{-1} ” jätetään määrittelemättä (se antaa formaalisti äärettömän).

Käänteisluvun perusominaisuuksia ovat

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &:= ab^{-1} = b^{-1}a, & b &\neq 0 \\ (bc)^{-1} &= c^{-1}b^{-1}, & b, c &\neq 0 \\ \frac{a}{b} &= \frac{ac}{bc}, & b, c &\neq 0 \quad (\text{laventamissääntö}) \\ \frac{1}{-1} &= -1, & \frac{1}{i} &= -i \end{aligned}$$

1.2.1 Kompleksiluvun argumentti $\arg z$ ja sen päähaara $\text{Arg } z \in]-\pi, \pi]$

Jokainen tason piste, ja näin ollen mikä tahansa kompleksiluku, voidaan esittää napakoordinaateissa $z = (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r(\cos \varphi, \sin \varphi)$, jossa $r \geq 0$ ja $\varphi \in \mathbb{R}$ ovat mikä tahansa pari, joilla $x = r \cos \varphi$ ja $y = r \sin \varphi$. Tällöin $r = |z|$ on sama kuin z :n moduli, ja lukua φ kutsutaan z :n **argumentiksi** eli **vaihekulmaksi**. (Ks. kuva 1.1.)

Vaikka moduli r on aina z :n yksikäsitteisesti määräämä, ei argumentti koskaan ole yksikäsitteinen. Funktiot \cos ja \sin ovat 2π -periodisia (eli pätee esim. $\cos(\varphi + 2\pi) = \cos \varphi$), joten jonkin annetun argumentin φ_0 lisäksi myös jokainen $\varphi_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, kelpaa z :n argumentiksi. Kompleksiluvun z **kaikkien argumenttien joukkoa** merkitään $\arg z$:lla. Trigonometrinen funktioiden ominaisuuksia käyttäen nähdään, että $\arg 0 = \mathbb{R}$ ja

$$\arg z = \{\varphi_0 + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{kun } z \neq 0, \quad (1.4)$$

jossa φ_0 on mikä tahansa argumentti, eli yhtälöparin $\text{Re } z = |z| \cos \varphi_0$, $\text{Im } z = |z| \sin \varphi_0$ ratkaisu. **Argumentin päähaara** $\text{Arg } z$ on näistä ratkaisuista se joka kuuluu välille $]-\pi, \pi]$. Kun $z = 0$, ei arvoa $\text{Arg } z$ määritellä lainkaan.

Päähaara määrittelee siis funktion $\text{Arg} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow]-\pi, \pi]$, jota numeerisissa kirjastoissa kutsutaan usein nimellä ”atan2” (päähaaran määrittelyvälin, eli funktion kuvajoukon, valinnassa on joskus eroja, joten se kannattaa tarkistaa erikseen ennen käyttöä). Huomaa, että $z \mapsto \arg z$ ei määrittele tavallista kuvausta, vaan niin sanotun *moniarvoisen funktion*, sillä jokaista $z \in \mathbb{C}$ kohden se antaa vastaukseksi useita kompleksilukuja. Kaavasta (1.4) nähdään, että kaikilla $z \neq 0$ pätee $\arg z = \{\text{Arg } z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Jos $\operatorname{Re} z > 0$, saadaan $\operatorname{Arg} z$ laskettua suoraan arkustangenttifunktion avulla, käyttäen sen päähaaraa $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pätee nimittäin

$$\operatorname{Arg} z = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}, \quad \text{kun } \operatorname{Re} z > 0.$$

Yleinen tapaushan ($z \neq 0$) saadaan etsimällä $\varphi \in]-\pi, \pi]$, joka toteuttaa yhtälöparin

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \\ \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \end{cases}$$

Jos $\operatorname{Re} z > 0$, on oltava $\cos \varphi > 0$, joten sillä jakamalla nähdään, että täytyy aina päteä

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi.$$

Koska $\tan(\varphi + \pi n) = \tan(\varphi)$, kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, on tällä yhtälöllä enemmän ratkaisuja kuin alkuperäisellä yhtälöparilla. Eräs näistä ratkaisuista on $\varphi_0 = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\subset]-\pi, \pi]$. Koska $|\varphi_0| < \frac{\pi}{2}$, on siis $\cos \varphi_0 > 0$, joten vain jos $\operatorname{Re} z > 0$ voi olla $\operatorname{Arg} z = \varphi_0$. Harjoitustehtävänä voi tarkistaa, että tämä ehto riittää ja $\operatorname{Arg} z = \varphi_0$ aina kun $\operatorname{Re} z > 0$.

Yleisessä tapauksessa saadaan ratkaisu käyttäen funktiota $\operatorname{atan2}$, joka määritellään kaavalla

$$\operatorname{atan2}(x, y) := \begin{cases} 2 \arctan \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \right), & \text{kun } y \neq 0 \text{ tai } x > 0, \\ \pi, & \text{kun } x < 0 \text{ ja } y = 0, \\ \text{ei määritelty,} & \text{kun } x = 0 = y. \end{cases}$$

Tällöin pätee siis $\operatorname{Arg} z = \operatorname{atan2}(x, y)$ kun $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Kaavan johto jätetään harjoitustehtäväksi.

Esimerkki 1.3 Olkoon $z = 1 + i$. Etsitään kompleksiluvun z moduli ja argumentin päähaara.

Ratkaisu: Nyt $z = (1, 1)$, joten $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z = 1 > 0$. Näin ollen voidaan soveltaa yllä olevia kaavoja suoraan, ja saadaan

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{Arg} z = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

1.2.2 Liittoluku eli kompleksikonjugaatti z^*

Kun $z = (x, y) = x + iy$, määritellään sen **liittoluku** eli **kompleksikonjugaatti**² kaavalla $z^* := x - iy$. Tason kuvauksena siis $(x, y) \mapsto (x, -y)$, joten kompleksikonjugointi vastaa kompleksitason peilausta reaaliakselin suhteen (Kuva 1.2). Selvästi

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i}.$$

Alla muutamia **perusominaisuuksia**, jotka seuraavat suoraan määritelmistä: kun $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$(z^*)^* = z, \quad (z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \quad (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*.$$

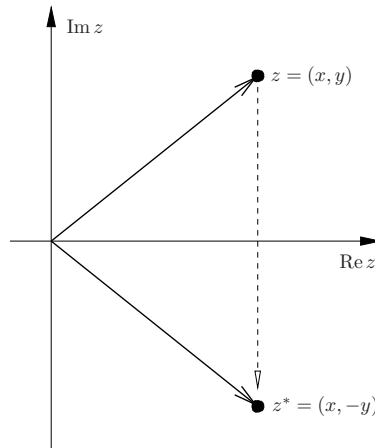
Kompleksikonjugoinilla on myös suora yhteys itseisarvoon, koska

$$z^* z = z z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Tämän avulla saadaan kaava $z \neq 0$:n käänteisluvulle z^{-1} :

$$1 = z z^{-1} \Rightarrow z^* = z^* z z^{-1} = |z|^2 z^{-1} \Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

²Matematiikassa liittolukua merkitään usein yläviivalla, eli ” \bar{z} ”. Fysiikassa tätä merkintää käytetään jo monessa muussakin tarkoituksessa, ja kompleksikonjugointi merkitään tavallisesti ” z^* ”.



Kuva 1.2: Kompleksiluvun $z = x + iy$ konjugaatti $z^* = x - iy$.

Esimerkki 1.4 Ratkaistaan yhtälö $\operatorname{Re}(1/z) = c$, jossa $c \neq 0$ on annettu reaalivakio.

Ratkaisu: Jos z on ratkaisu, täytyy erityisesti siis olla $z \neq 0$. Merkitään $z = (x, y)$, ja sovelletaan yllä olevaa esitystä käänteisluvulle

$$\begin{aligned} c &= \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \operatorname{Re} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{x}{c} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2, \end{aligned}$$

jossa viimeisessä vaiheessa on sovellettu neliöksi täydentämistä. Viimeinen kaava määrittelee ympyrän kehän, jossa ympyrän säde on $1/(2|c|)$ ja keskipiste reaaliakselilla pisteessä $(1/(2c), 0)$. Yhtälön ratkaisu koostuu siis tämän ympyrän kehän pisteistä, pois lukien piste $(0, 0)$, jossa alkuperäinen yhtälö ei ole määritelty.

Miten tilanne muuttuu, jos $c = 0$?

1.2.3 de Moivre'n kaava ja kompleksijuuret

Kirjoitetaan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ napakoordinaateissa:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Tästä saadaan uusi esitys tulolle $z_1 z_2$, sillä

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \end{aligned} \tag{1.5}$$

jossa viimeisessä vaiheessa sovellettiin tunnettuja kosinin ja sinin ominaisuuksia. Näin ollen $|z_1 z_2| = r_1 r_2$ ja $\varphi_1 + \varphi_2 \in \arg(z_1 z_2)$. Nähdään siis, että kompleksilukujen tulon voi laskea myös kertomalla niiden modulit ja laskemalla vaiheet yhteen. Erityisesti, jos $|w| = 1$ ja $\operatorname{Arg} w = \varphi_0$ niin kuvaus $z \mapsto wz$ vastaa geometrisesti vektorin kiertoa origon suhteen kulman φ_0 verran.

Esimerkki 1.5 Olkoon $z = -1 - i$. Etsitään kompleksiluvun z moduli ja argumentin päähaara.

Ratkaisu: Nämä voidaan laskea myös suoraan kaavoihin sijoittamalla, mutta näytetään tässä miten laskun voi tehdä myös ilman atan2-kaavan muistamista. Esimerkissä 1.3 laskettiin, että kun $w =$

$1 + i$ on $|w| = \sqrt{2}$ ja $\text{Arg } w = \frac{\pi}{4}$. Koska $z = -w = (-1)w$ ja $\text{Arg}(-1) = \pi$, nähdään tulon napakoordinaattiesityksestä suoraan, että $|z| = |-1||w| = |w| = \sqrt{2}$ ja $\varphi \in \arg z$ jos ja vain jos löytyy $k \in \mathbb{Z}$, jolla $\varphi = \text{Arg}(-1) + \text{Arg } w + 2\pi k = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$. Näin ollen päähaaran arvo saadaan valitsemalla $k = -1$, eli $\text{Arg } z = -\frac{3\pi}{4}$. (Huomaa, että päähaaran arvo löytyy aina $|\varphi|$:n minimistä.)
Vastaus: $|z| = \sqrt{2}$ ja $\text{Arg } z = -\frac{3\pi}{4}$.

Tulosta (1.5) n kertaa iteroimalla nähdään, että kaikilla $z \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$z^n = |z|^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

kunhan $\varphi \in \arg z$. Kun $|z| = 1$, saadaan **de Moivren kaava**:

$$\boxed{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi} \quad n \in \mathbb{N}, \varphi \in \mathbb{R}.$$

Esimerkki 1.6 Kaavan avulla voidaan johtaa trigonometrisia identiteettejä. Esimerkiksi kun $n = 2$ saadaan sen reaali- ja imaginääriosasta tutut summakaavat:

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^2 &= \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi \\ \Rightarrow \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Yhtälön $w^n = z$ ratkaisut eli juuret $w = \sqrt[n]{z}$

Kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}$ n :s juuri ($n \in \mathbb{N}$) on mikä tahansa yhtälön $w^n = z$ ratkaisu $w \in \mathbb{C}$, jota merkitään $w = \sqrt[n]{z}$. Jos $z = 0$, on ainoa ratkaisu $w = 0$. Näytetään seuraavaksi miten juuret voidaan ratkaista de Moivren kaavaa käyttämällä kun $z \neq 0$.

Oletetaan, että $z \in \mathbb{C}$ ja $\varphi' \in \arg z$ on annettu ja merkitään $r' = |z|$. Jos $w \in \mathbb{C}$ ja $\varphi \in \arg w$, $r = |w|$, pätee siis

$$w = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi').$$

De Moivren kaavaa soveltaen nähdään, että kun $n \in \mathbb{N}$ ja $r' > 0$

$$\begin{aligned} w^n = z &\Leftrightarrow r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r' (\cos \varphi' + i \sin \varphi') \\ &\Leftrightarrow r^n = r', \cos n\varphi = \cos \varphi' \text{ ja } \sin n\varphi = \sin \varphi' \\ &\Leftrightarrow r = (r')^{1/n} \text{ ja } \varphi = \frac{\varphi'}{n} + 2\pi \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Näin ollen kun $z \neq 0$ löytyy tasan n ratkaisua $w \in \mathbb{C}$, jotka saadaan valitsemalla $m = 0, 1, \dots, n-1$, tai mitkä tahansa muut n peräkkäistä kokonaislukua (huomaa, että esim. $m = \pm n$ ja $m = 0$ antavat saman kompleksiluvun w).

Juuren **päähaara** saadaan kun valitaan $\varphi' = \text{Arg } z$, $m = 0$. Tällöin $\text{Arg } w = n^{-1} \text{Arg } z$ ja siten päähaaran ratkaisulle pätee $|\text{Arg } w| \leq \pi/n$. Positiivisille luvuille $\text{Arg } z = 0$, joten myös $\text{Arg } w = 0$, ja päähaara antaa siis tutun positiivisen juuren arvon. Päähaaran ratkaisun tunnistaa myös siitä, että sen reaaliosa on suurin, eli se on ratkaisuista ”oikeanpuolimmais” kun ne piirretään kompleksitasoon.

Tässä vaiheessa tulee ongelmia merkintöjen suhteen, sillä ei ole mitään yleisesti hyväksyttyä tapaa erottaa toisistaan juuren päähaaraa, mielivaltaista juurta, ja kaikkien juurten joukkoa. Esimerkiksi ” $\sqrt{-1}$ ” voi lähteestä riippuen tarkoittaa päähaaran arvoa i , kumpaa tahansa juurista $\pm i$, tai joukkoa $\{-i, i\}$ joka sisältää molemmat juuret. *Tässä monisteessa käytetään seuraavia konventioita ellei toisin mainita.*

$z^{1/n}$	Tarkoittaa juuren päähaaraa
\sqrt{z}	Tarkoittaa neliöjuuren päähaaraa
$\sqrt[n]{z}$	Tarkoittaa mitä tahansa juurista. Erityisesti siis $\sqrt[n]{z} = \pm \sqrt{z}$
$z^{\{1/n\}}$	Tarkoittaa kaikkien juurten kokoelmaa. Tälle ei ole mitään vakiintunutta merkintää, mutta sitä tarvitaan suhteellisen harvoin.

Esimerkki 1.7 Toisen asteen yhtälön $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c, \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, ratkaisukaava säilyy ennallaan kompleksiratkaisuja etsittäessä, eli yhtälön ratkaisut ovat

$$z_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.7)$$

Tässä neliöjuuren kohdalle käy kumpi tahansa kompleksijuurista, sillä mahdollinen toinen juuri saadaan kertomalla se -1 :llä.

Esimerkki 1.8 Lasketaan kaikki juuret $\sqrt[3]{-2 - 2i}$.

Ratkaisu: Havaitaan, että $z := -2 - 2i = 2z'$, kun $z' = -1 - i$. Esimerkin 1.5 mukaan $|z'| = \sqrt{2}$ ja $\text{Arg } z' = -\frac{3\pi}{4}$. Koska $\text{Arg } 2 = 0$, saadaan tästä suoraan $|z| = 2^{3/2}$ ja $\text{Arg } z = -\frac{3\pi}{4}$. Juuren päähaaralle w_0 pätee siis

$$|w_0| = (2^{3/2})^{1/3} = \sqrt{2}, \quad \text{Arg } w_0 = \frac{1}{3} \text{Arg } z = -\frac{\pi}{4}.$$

Muut kaksi juurta ovat w_1 ja w_2 , joilla $|w_m| = |w_0|$ ja $\text{Arg } w_0 + 2\pi \frac{m}{3} \in \arg w_m$, $m = 1, 2$, eli

$$|w_1| = \sqrt{2}, \quad \frac{5\pi}{12} \in \arg w_1, \quad |w_2| = \sqrt{2}, \quad \frac{13\pi}{12} \in \arg w_2.$$

Kuvassa 1.3 on näytetty miten juuria voi etsiä myös geometrisesti.

Vastaus: Juuret ovat w_0, w_1, w_2 , joille pätee $|w_0| = |w_1| = |w_2| = \sqrt{2}$ ja $\text{Arg } w_0 = -\frac{\pi}{4}$, $\text{Arg } w_1 = \frac{5\pi}{12}$, $\text{Arg } w_2 = -\frac{11\pi}{12}$.

Huomautus 1.9 Joissain erikoistapauksissa juurille löytyy myös esitys tavallisten neliö- ja korkeampien juurten avulla. Esim. koska

$$\begin{aligned} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, & \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \\ \cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) &= -\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, & \sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right) &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

voidaan yllä olevat juuret kirjoittaa myös muodossa

$$w_0 = 1 - i, \quad w_1 = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3}) \right), \quad w_2 = \frac{1}{2} \left(-1 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}) \right).$$

1.3 Kompleksimuuttujan alkeisfunktiot

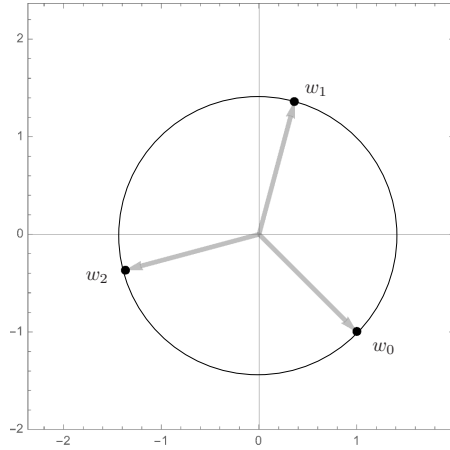
Tässä luvussa käydään läpi tavallisimpia **kompleksifunktiota**. Nämä ovat kompleksiarvoisia kuvauksia kompleksitason joltain osajoukolta, eli kompleksifunktiot ovat kuvauksia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, jossa $U \subset \mathbb{C}$. Kompleksifunktion f **reaaliosa** on reaalifunktio $u : U \rightarrow \mathbb{R}$, joka määritellään kaavalla $u(z) = \text{Re } f(z)$. Vastaavasti sen **imaginääriosa** $v : U \rightarrow \mathbb{R}$ määritellään kaavalla $v(z) = \text{Im } f(z)$. Tällöin usein merkitään suoraan $u = \text{Re } f$ ja $v = \text{Im } f$, jolloin $f(z) = u(z) + iv(z)$ kaikilla $z \in U$.

1.3.1 Polynomit

Kompleksifunktio $P_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, missä $n \in \mathbb{N}_0$, on **n :n asteen polynomi**, kun

$$P_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

jossa $a_j \in \mathbb{C}$ kaikilla j ja $a_n \neq 0$. Jos $a_n = 0$, on P_n edelleen polynomi, mutta jotain alemmaa astetta. Huomaa, että yllä on määritelty $z^0 := 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.



Kuva 1.3: Esimerkin 1.8 juurten w_0 , w_1 , w_2 sijainti kompleksitasossa. Kaikki juuret sijaitsevat $\sqrt{2}$ -säteisen ympyrän kehällä, tasavälein jaoteltuna.

Esimerkki 1.10 Funktio $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C}$, on toisen asteen polynomi. Koska $f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, saadaan että sen reaaliosa toteuttaa $u(x, y) = x^2 - y^2$ ja imaginääriosaa $v(x, y) = 2xy$.

1.3.2 Kompleksitason eksponenttifunktio ja sen johdannaiset

Palautetaan ensin mieleen tuttu reaalinen eksponenttifunktio $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa derivaattakaavan $\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$. Arvoa $e := \exp(1) \approx 2.718$ kutsutaan *Neperin luvuksi* ja merkitään myös $\exp(x) = e^x$. Määritellään **kompleksiarvoinen eksponenttifunktio** kaikille $z = (x, y)$ kaavalla

$$\exp(z) = \exp(x + iy) := e^x(\cos y + i \sin y). \quad (1.8)$$

Näin saadaan siis kuvaus $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Kun $x \in \mathbb{R}$ on $\exp(x) = \exp(x, 0) = e^x$, joten kuvaus on *eksponenttifunktion laajennus kompleksitasoon*. Tämä laajennus on tiettyssä mielessä yksikäsitteinen, kuten analyttistä jatkamista käsittelevässä luvussa nähdään myöhemmin. Myös kompleksiargumentilla käytetään jatkossa lyhennysmerkintää $\exp(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$.

Kun $x = 0$ saadaan määritelmästä tärkeä **Eulerin kaava**

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad y \in \mathbb{R},$$

ja sen erikoistapauksena, kun $y = \pi$, **Eulerin identiteetti**:

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 \quad \Rightarrow \quad e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Tämä on yksi matematiikan yllättävimmistä tuloksista. Siinä yhdistyvät tärkeimmät matemaattiset vakiot (yhteenlaskun neutraalialkio 0, kertolaskun neutraalialkio 1, Neperin luku e , ympyrän kehän ja halkaisijan suhde π sekä imaginääriyksikkö i) sekä operaatiot (yhteenlasku, kertolasku ja potenssiin korotus).

Vertaamalla määritelmää kompleksiluvun napakoordinaattiesitykseen nähdään suoraan, että aina

$$|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \arg(\exp(z)). \quad (1.9)$$

Näin ollen saadaan tulon summakaavaa (1.5) soveltamalla

$$\exp(x_1, y_1) \exp(x_2, y_2) = e^{x_1} e^{x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = \exp(x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Tämä todistaa, että eksponenttifunktion tärkeä summausominaisuus $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ säilyy ennallaan kompleksilaaennukselle. Pienellä laskulla voidaan tästä johtaa seuraavat tulokset

$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^z e^w, \\ e^{-z} e^z &= e^{-z+z} = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad e^z \neq 0 \text{ ja } e^{-z} = \frac{1}{e^z}, \\ e^{z+i2\pi k} &= e^z e^{i2\pi k} = e^z (\cos(2\pi k) + i \sin(2\pi k)) = e^z 1 = e^z, \end{aligned}$$

missä $z, w \in \mathbb{C}$ ja $k \in \mathbb{Z}$. Viimeisestä yhtälöstä näemme, että $\exp(z)$ on $2\pi i$ -periodinen funktio eli se on 2π -periodinen imaginääriakselin suuntaan.

Esimerkki 1.11 Funktion $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ reaaliosa on siis $u(x, y) = e^x \cos y$ ja imaginääriosa $v(x, y) = e^x \sin y$.

Sinin ja kosinin kompleksilaaennukset

Tunnetusti kosini on parillinen ja sini pariton funktio, eli $\cos(-y) = \cos y$ ja $\sin(-y) = -\sin y$. Näin ollen, kun $z \in \mathbb{R}$, saadaan Eulerin kaavasta tulos

$$e^{-iz} = e^{i(-z)} = \cos z - i \sin z.$$

Yhdessä alkuperäisen Eulerin kaavan kanssa tästä seuraa

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Näitä kaavoja käytetään nyt määrittelemään **kosinin ja sinin laaennukset koko kompleksitasoon**. Erityisesti yhtälöt (1.10) pätevät tällöin kaikilla $z \in \mathbb{C}$, ja kosinin ja sinin arvot reaaliargumenteilla säilyvät ennallaan.

Jätetään harjoitustehtäväksi osoittaa, että reaaliargumenteille tutut trigonometriset muunnoskaavat pätevät myös kompleksilaaennuksille: esim. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ kun $z \in \mathbb{C}$. Toinen tärkeä ominaisuus joka periytyy kompleksilaaennuksille on *nollakohtat*: jos $z \in \mathbb{C}$ ei ole reaalinen nähdään, että $\cos z \neq 0 \neq \sin z$. (Tämä pätee kosinille, sinille ja eksponenttifunktiolle, muttei yleisesti. Esimerkiksi kuten alussa todettiin, polynomeilla voi olla nollakohtia, jotka eivät kuulu reaaliakselille.)

Hyperboliset funktiot

Läheistä sukua kosinille ja sinille ovat vastaavat hyperboliset funktiot, jotka määritellään kompleksiluvuille kuten reaaliapauksessakin, käyttäen eksponenttifunktiota:

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Vertaamalla näitä määritelmiin (1.10) huomataan, että

$$\begin{aligned} \cosh z &= \cos(iz), & \sinh z &= -i \sin(iz), \\ \cos z &= \cosh(iz), & \sin z &= i \sinh(iz). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Trigonometriset funktioiden laskukaavoista saadaan siis useita vastaavia relaatioita hyperbolisille funktioille. Esimerkiksi aina pätee

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

1.3.3 Alkeisfunktioiden rationaaliversiot

Jos P_n ja Q_m ovat polynomeja, määritellään vastaava **rationaalifunktio** $R(z)$:

$$R(z) := \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \quad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}, \text{ joilla } Q_m(z) \neq 0,$$

jolloin P_n on rationaalifunktion *osoittaja* ja Q_m sen *nimittäjä*. Jos Q_m on astetta $m > 0$, **algebran peruslause** sanoo, että joukossa $\{z \in \mathbb{C} \mid Q_m(z) = 0\}$ on vähintään yksi ja korkeintaan m (eri) lukua. Näin ollen vaikka polynomit onkin määritelty koko kompleksitasossa, puuttuu rationaalifunktioiden määrittelyjoukosta aina jotain sen pisteitä. Jos $m = 0$, niin $Q_m(z) = 0$ kaikilla z , joten tässä tapauksessa $R(z)$ ei ole määritelty millään z .

Trigonometrinen funktioiden rationaaliversiot antavat määritelmät

$$\begin{aligned} \tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z} && \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}, \text{ joilla } \cos z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \cot z &:= \frac{\cos z}{\sin z} && \text{kun } \sin z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vastaavat hyperboliset funktiot määritellään

$$\begin{aligned} \tanh z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z} && \text{kun } \cosh z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq \pm i \frac{\pi}{2} + i2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ \coth z &:= \frac{\cosh z}{\sinh z} && \text{kun } \sinh z \neq 0 \Leftrightarrow z \neq i\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Näiden määrittelyjoukot on saatu suoraan vastaavista trigonometrinen funktioiden nollakohdista käyttäen yhtälöitä (1.11). Esimerkiksi siis $\cosh z = 0$ jos ja vain jos $\cos(iz) = 0$.

Joskus vastaan tulee myös suoria käänteislukufunktioita: kosekanti (\csc) ja sekantti (\sec)

$$\csc z := \frac{1}{\sin z}, \quad \sec z := \frac{1}{\cos z},$$

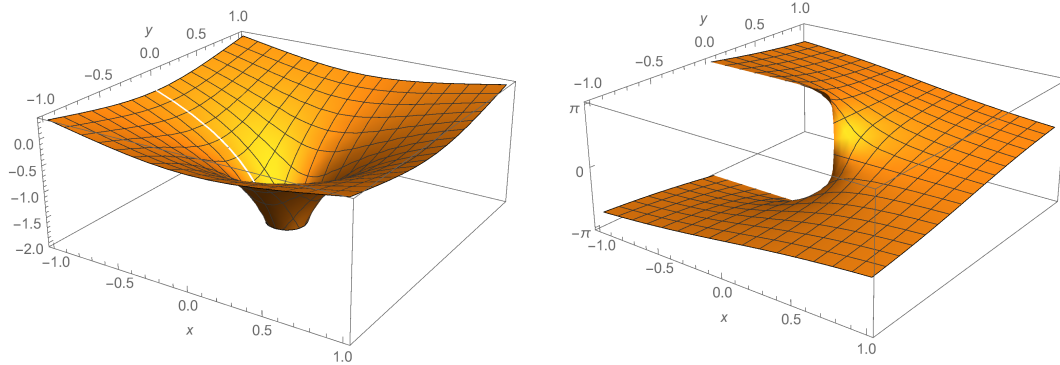
ja niiden hyperboliset vastineet (sech ja csch). Näidenkin määrittelyjoukoista täytyy poistaa kaikki nimittäjien nollakohdat.

1.3.4 Alkeisfunktioiden käänteisfunktioita

Kuvauksen $F : X \rightarrow Y$ käänteiskuvaus on kuvaus $G : Y \rightarrow X$, jolle pätee $G(F(x)) = x$ ja $F(G(y)) = y$ kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$. Kaikilla kuvauksilla F ei ole käänteiskuvausta, mutta jos sellainen löytyy, on se yksikäsitteinen: tällöin sanotaan, että kuvaus F on kääntyvä ja merkitään $F^{-1} := G$. Jos F on kääntyvä, on myös F^{-1} kääntyvä ja sen käänteiskuvaus on alkuperäinen F .

Kuvauksen kääntyvyys voidaan tarkistaa tutkimalla onko se *bijektio*: kuvaus $F : X \rightarrow Y$ on kääntyvä jos ja vain jos F saavuttaa jokaisen Y :n pisteen ja kahdella eri X :n alkioilla on aina eri kuvat Y :ssä. Vaikka F itse ei olisikaan kääntyvä, voidaan siitä rakentaa bijektioita sopivasti sen lähtö- ja maalijoukkoa rajoittamalla. Kuten alla huomataan, saadaan näitä sopivasti yhdistämällä moniarvoisia funktioita, jota ovat usein hyödyllisiä yhtälöiden ratkaisujen esittämisessä.

Esimerkki 1.12 Polynomi $P(x) = x^2$ ei ole kääntyvä kuvauksena $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sillä esim. $P(-1) = 1 = P(1)$, joten pisteet -1 ja 1 kuvautuvat samaksi pisteeksi. Lisäksi $P(x) \geq 0$, joten P ei myöskään



Kuva 1.4: Logaritmin päähaaran $\text{Ln}(x+iy)$ reaali-osan (vasen kuva) ja imaginääriosan (oikea kuva) kuvaajat.

saavuta mitään negatiivisia reaaliarvoja. Sen sijaan kun rajoitetaan sekä lähtö- että maalijoukko ei-negatiivisiksi reaalityyppisiksi, saadaan kääntyvä kuvaus $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, jolla $F(x) = P(x)$ kaikissa lähtöjoukon pisteissä. Tämä rajoittuma ei kuitenkaan ole missään mielessä yksikäsitteinen, sillä bijektio saadaan esimerkiksi myös rajoittamalla kuvaukseksi $]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Logaritmi

Kun $z \in \mathbb{C}$ on annettu, kerätään kaikki yhtälön $e^w = z$ ratkaisut w joukoksi $\ln z$, jota kutsutaan z :n **kompleksilogaritmien joukoksi** tai vain (kompleksi)logaritmiksi. Lyhyesti siis

$$\ln z := \{w \in \mathbb{C} \mid e^w = z\}.$$

Aiemmin nähtiin, että $e^w \neq 0$ kaikilla $w \in \mathbb{C}$. Näin ollen ei luvulla $z = 0$ ole yhtään logaritmia, ja $\ln 0 = \emptyset$. Kun $z \neq 0$, saadaan logaritmit ratkaistua modulin ja argumentin avulla. Nimittäin, jos $w = (u, v) \in \mathbb{C}$, saadaan eksponentin laskusäännöistä (1.9)

$$e^w = z \quad \Rightarrow \quad |z| = |e^w| = e^u, \quad v \in \arg(z).$$

Koska $|z| > 0$, on yhtälöllä $e^u = |z|$ tasan yksi reaalinen ratkaisu, joka saadaan tavallisen logaritmin "Ln" avulla: $u = \text{Ln } |z| \in \mathbb{R}$. Toisaalta, jos v on mikä tahansa z :n argumentti, saadaan tällöin $e^{u+iv} = e^u e^{iv} = |z| e^{iv} = z$, joten $u + iv \in \ln z$. Valitsemalla argumentiksi v päähaaran arvo saadaan määriteltyä **logaritmin päähaara**

$$\text{Ln}(z) := \overline{\ln}(z) := \text{Ln } |z| + i \text{Arg}(z), \quad z \neq 0.$$

Molempia notaatioista käytetään päähaaralle. Kuvassa 1.4 on esitetty päähaarafunktion kuvaaja: huomataan, että $\text{Re } \text{Ln}(z)$ on jatkuva funktio lukuun ottamatta singulariteettia origossa, mutta imaginääriosalla $\text{Im } \text{Ln}(z)$ on epäjatkuvuus koko negatiivisella reaaliakselilla, eli kun $z \leq 0$. Tarkemmin, kun $z_\varepsilon := -r + i\varepsilon$, $r > 0$ ja $\varepsilon \rightarrow 0$, ylhäältä lähestyttäessä pätee $\text{Ln } z_\varepsilon \rightarrow \text{Ln } |z| + i\pi = \text{Ln } z_0$, $\varepsilon > 0$, ja alhaalta taas $\text{Ln } z_\varepsilon \rightarrow \text{Ln } |z| - i\pi = \text{Ln } z_0 - i2\pi$, $\varepsilon < 0$. Kun z on positiivinen reaalityyppinen, on $\text{Arg}(z) = 0$, joten päähaara on tavallisen logaritmfunktion laajennus kompleksitasoon kuvaukseksi $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$.

Yllä saatiin myös luokiteltua kaikki muutkin yhtälön $e^w = z$ ratkaisut. Nämä voidaan tiivistää käyttäen tunnettua z :n argumenttien parametrisointia tulokseksi

$$\ln z = \{ \overline{\ln z} + i2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \} .$$

Toisin sanoen, jos $z \neq 0$, on yhtälöllä $e^w = z$ äärettömän monta ratkaisua, jotka saadaan koptioimalla päähaaran ratkaisua imaginääriakselin suuntaan 2π :n mittaisin askelin ylös ja alaspäin. (Huomaa samankaltaisuus kompleksiluvun argumentin määritelmän kanssa.)

Yleinen potenssi z^w

Jos $z, w > 0$, määritellään niiden potenssi käyttäen tavallisia eksponentti- ja logaritmfunktioita, kaavalla $z^w = \exp(w \operatorname{Ln} z)$. Tämä kaavaa yleistetään suoraan määrittelemään **kompleksilukujen potenssin päähaara**

$$z^w := e^{w \overline{\ln z}} = e^{w(\operatorname{Ln} |z| + i \operatorname{Arg} z)}, \quad z \neq 0 .$$

Yleisesti tulee potenssiin korottamisestakin ääretön määrä arvoja, jotka määritellään kaavalla $z^{\{w\}} := e^{w \operatorname{Ln} z}$, eli

$$z^{\{w\}} := \left\{ e^{w(\overline{\ln z} + i2\pi k)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \{ z^w e^{i2\pi k w} \mid k \in \mathbb{Z} \}, \quad z \neq 0 .$$

Jos $z = 0$, määritellään vain kokonaislukupotenssit (algebran avulla): $0^n = 0$, kun $n \in \mathbb{N}_+$. Joskus myös $0^r = 0$, kun $r > 0$. Lisäksi polynomeissa ja potenssisarjoissa on käytössä merkintä $z^0 = 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, eli myös kun $z = 0$.

Huomautus 1.13 Tämä määritelmä yleistää useita "samannäköisiä" aiemmin esiintyneitä määritelmiä. Erityisesti, aina kun $n \in \mathbb{N}_+$ ja $z \neq 0$ pätevät seuraavat tulokset.

- $z^{\{n\}}$ sisältää vain yhden alkion, joka on $z^n = z \cdot z \cdots z$ (n kertaa), kuten algebrallisesti kuuluisi ollakin. (Tämä nähdään de Moivre'n kaavaa soveltamalla.)
- Myös $z^{\{-n\}}$ sisältää vain yhden alkion, $(z^{-1})^n$.
- $z^{\{1/n\}}$ sisältää kaikki juuret $\sqrt[n]{z}$, eli yhteensä n eri arvoa. Näin ollen se yhtyy aiempaan määritelmään. Myös juuren päähaara vastaa kompleksipotenssin päähaaraa.
- $e^z = \exp(z)$, eli $\exp(z)$ vastaa kyseisen kompleksipotenssin päähaaraa.
- Kaava $z^{\{w\}} a^{\{w\}} = (za)^{\{w\}}$ pätee joukoille, mutta $z^w a^w = (za)^w$ on yleisesti totta vain jos $a > 0$.
- $z^w z^{w'} = z^{w+w'}$ päähaaralle, mutta yleensä joukkoina $z^{\{w\}} z^{\{w'\}} \neq z^{\{w+w'\}}$.

Arkus- ja areafunktiot

Trigonometrinen ja hyperbolisten funktioiden käänteisfunktiot saadaan aina esitettyä kompleksilogaritmia käyttäen. Tätä tapahtuu alla olevaa menetelmää seuraten:

1. Esitetään ensin haluttu funktio eksponenttimuodossa.
2. Valitaan muuttujaksi yhtälössä esiintyvä eksponentti, esimerkiksi $u = e^z$ tai $u = e^{iz}$. Tällöin $e^{-z} = 1/u$ tai $e^{-iz} = 1/u$.
3. Ratkaistaan yhtälö u :n suhteen.
4. Kirjoitetaan z u :n funktiona logaritmia käyttäen.

Samaa algoritmia voi joskus käyttää myös yleisempien alkeisfunktioita sisältävien yhtälöiden ratkaisemiseksi.

Esimerkki 1.14 Funktion $\arcsin z$, $z \in \mathbb{C}$, muodostaminen.

Tarkoituksena on siis etsiä kaikki yhtälön $\sin w = z$ ratkaisut. Sinin määritelmän mukaan yhtälö toteutuu täsmälleen silloin kun

$$e^{iw} - e^{-iw} = 2iz.$$

Merkitään tässä $u = e^{iw}$, jolloin $u \neq 0$ ja $1/u = e^{-iw}$. Yhtälö voidaan siis kertoa u :lla ja havaitaan, että se on yhtäpitävä yhtälön

$$u^2 - 1 - 2izu = 0$$

kanssa. Sovelletaan tähän toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa, ja saadaan ratkaisuiksi

$$u_{\pm} = \frac{2iz \pm \sqrt{-4z^2 + 4}}{2} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

Tämän jälkeen etsitään yhtälön $u = e^{iw}$ kaikki ratkaisut. Lopputulos on helpointa esittää käyttäen moniarvoisia funktioita muodossa

$$\arcsin z = -i \ln \left(iz + (1 - z^2)^{\{1/2\}} \right).$$

Kaavasta saa siis koko ratkaisujoukon yhtälölle $\sin w = z$. Jos $w \in \arcsin z$, löytyy $\sigma \in \{\pm 1\}$ ja $k \in \mathbb{Z}$, joilla $w = -i \overline{\ln} \left(iz + \sigma \sqrt{1 - z^2} \right) + 2\pi k$. Huomaa, että $iz + \sigma \sqrt{1 - z^2}$ ei koskaan ole nolla, joten siitä voi aina ottaa päähaaran logaritmin.

Arkussinin päähaaraksi kutsutaan yleensä funktiota

$$\operatorname{Arcsin} z := \overline{\arcsin} z := -i \overline{\ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right).$$

Tällöin, kun $|z| \leq 1$, saadaan laskimestakin löytyvä arkussinin arvo, joka kuuluu välille $[-\pi/2, \pi/2]$.

Esimerkki 1.15 Etsitään kaikki yhtälön $\sin z + \cos z = 2$ ratkaisut, kun $z \in \mathbb{C}$.

Ratkaisu: Sinin ja kosinin määritelmistä nähdään, että yhtälö on yhtäpitävä yhtälön

$$e^{iz} \left(\frac{1}{2i} + \frac{1}{2} \right) + e^{-iz} \left(-\frac{1}{2i} + \frac{1}{2} \right) = 2$$

kanssa. Merkitsemällä $u = e^{iz}$ ja kertomalla yhtälö puolittain termillä $2u$ saadaan ekvivalentisti

$$u^2(-i + 1) - 4u + i + 1 = 0.$$

Tämän ratkaisut ovat

$$u = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1-i)(1+i)}}{2(1-i)} = (1+i) \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

Koska $2 \pm \sqrt{2} > 0$ on sen argumentti nolla molemmilla merkeillä ja ratkaisujoukoksi saadaan

$$z = -i \overline{\ln}(1+i) - i \operatorname{Ln}[(\sqrt{2} \pm 1)/\sqrt{2}] + 2\pi k = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i \operatorname{Ln}(\sqrt{2} \pm 1), \quad k \in \mathbb{Z},$$

jossa viimeisessä yhtäsuuruudessa on käytetty Esimerkin 1.3 tulosta ja tavallisen logaritmin summaavaa.

1.4 Kompleksifunktion derivaatta ja analyyttisyys

1.4.1 Kompleksitason perusominaisuuksia

Kompleksitason avoimet joukot ja alueet

Jatkossa tullaan tarvitsemaan seuraavia luokitteluja kompleksitason osajoukoille:

- Kun $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $\varepsilon > 0$, on joukko $B_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ z_0 -keskinen ε -säteinen **avoin kiekko**. Tämän kiekon **reuna** on ympyränkaari $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \varepsilon\}$ ja sitä merkitään $\partial B_\varepsilon(z_0)$. Vastaava **suljettu kiekko** on näiden yhdiste, $\overline{B}_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \varepsilon\}$.
- Ω on *avoin*, jos jokaista $z_0 \in \Omega$ kohden löytyy jokin ε -säteinen kiekko, joka sisältyy Ω :aan.
- Joukko $\Omega \subset \mathbb{C}$ on **yhtenäinen**, jos sen mielivaltaiset pisteet $z, w \in \Omega$ voi yhdistää murtoviivalla, joka sisältyy Ω :aan.
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ on **alue**, jos se on avoin ja yhtenäinen.

Esimerkki 1.16 Esimerkkejä alueista:

- Koko kompleksitaso \mathbb{C} ja kaikki sen avoimet kiekot $B_\varepsilon(z_0)$
- Puolitasot, jotka saadaan pisteistä jonkin tason suoran toiselta puolelta. Esimerkiksi saadaan näin *yläpuolitaso* $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, *alapuolitaso* $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$, sekä *oikea ja vasen puolitaso*, $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ ja $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$.
- Kahden alueen yhdiste on alue, jos niillä on yhteisiä pisteitä.
- Jos alueesta poistetaan äärellinen määrä pisteitä, jää jäljelle aina alue.
- Jos alueesta poistetaan sellainen joukko pisteitä, että joukon pisteiden välinen etäisyys ei mene koskaan nolnaan, jää jäljelle aina alue. Esimerkiksi joukko $\mathbb{C} \setminus \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ on alue, sillä poistettavan joukon kahden pisteen etäisyys on aina vähintään 2π .
- Jos kompleksitasosta poistetaan jokin äärellinen jana, tai puolikas suora, jää jäljelle alue.

Esimerkki 1.17 Esimerkkejä avoimista joukoista, jotka *eivät* ole alueita:

- Kahden alueen yhdiste, jos niillä *ei* ole yhteisiä pisteitä.
- Kompleksitaso, josta on poistettu kokonainen suora. Esimerkiksi ylä- ja alapuolitason yhdiste $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \neq 0\}$ ei ole alue.

(MAT) Kompleksitason topologisia perusominaisuuksia

Seuraavat tulokset käydään yleensä läpi topologian kursseilla ja niiden todistukset löytyvät esimerkiksi kirjoista [5, 6]. Näihin voi palata myöhemmin opinnoissa topologian kurssin käymisen jälkeen. Topologisesti kompleksitaso on sama kuin taso \mathbb{R}^2 ja sen topologia on metriikan $d(z, w) := |z - w|$ määräämä. Erityisesti siis

- Metriikan avoimet ja suljetut kiekot, sekä niiden topologinen reuna on määritelty jo yllä.
- Jos $\Omega \subset \mathbb{C}$ on avoin, koostuu sen reuna $\partial\Omega$ niistä pisteistä $w \in \mathbb{C}$, joilla $w \notin \Omega$, mutta kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy jokin $z \in B_\varepsilon(w) \cap \Omega$.
- Joukko $\Omega \subset \mathbb{C}$ on yhtenäinen, jos ja vain jos se on murtoviivayhtenäinen, eli jos sen mielivaltaiset pisteet $z, w \in \Omega$ voi yhdistää murtoviivalla, joka sisältyy Ω :aan.
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ on alue, jos se on avoin ja yhtenäinen.
- Jokainen avoin $\Omega \subset \mathbb{C}$ voidaan esittää yhdisteenä erillisistä alueista.
- Jos $A \subset \mathbb{C}$ on kokoelma erillisiä pisteitä (eli jos jokaiselle A :n pisteelle z_0 löytyy $B_\varepsilon(z_0)$, jossa ei ole muita A :n pisteitä), on $\mathbb{C} \setminus A$ on alue.
- Avoimet konveksit joukot ovat alueita.

Jatkuvuus ja jonojen suppeneminen \mathbb{C} :ssä, osittaisderivaatta

Kompleksilukujonon (w_n) suppeneminen kohti kompleksilukua z_0 määritellään:

$$\begin{aligned} w_n \rightarrow z_0, \text{ kun } n \rightarrow \infty &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - z_0| = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} w_n \rightarrow \operatorname{Re} z_0 \text{ ja} \\ \operatorname{Im} w_n \rightarrow \operatorname{Im} z_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tässä $(\operatorname{Re} w_n)$ ja $(\operatorname{Im} w_n)$ ovat reaalityyppisiä jonoja.

Oletetaan, että $\Omega \subset \mathbb{C}$ ja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Kun $w, z_0 \in \Omega$ ja $z \in \mathbb{C}$, tarkoittaa raja-arvomerkinä

$$\lim_{w \rightarrow z_0} f(w) = z \Leftrightarrow f(w_n) \rightarrow z \text{ aina kun } w_n \in \Omega, n \in \mathbb{N}, \text{ ja } w_n \rightarrow z_0$$

eli tällöin oletetaan, että jokaisen Ω :n sisällä olevaa jonon (w_n) , joka suppenee kohti pistettä z_0 , täytyy saada aikaan jono $(f(w_n))$ joka suppenee kohti jonon valinnasta riippumattomasti kompleksilukua z . Erityisesti funktion siis täytyy supeta kohti samaa arvoa joka suunnasta lähestyttäessä. Tämä käsite liittyy suoraan **funktion f jatkuvuuteen**, joka määritellään

$$\begin{aligned} f \text{ on jatkuva pisteessä } z_0 \in \Omega &\Leftrightarrow \lim_{w \rightarrow z_0} f(w) = f(z_0) \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re} f \text{ ja } \operatorname{Im} f \text{ ovat jatkuvia pisteessä } z_0 \end{aligned}$$

Kun oletetaan lisäksi, että Ω on *avoin*, voidaan puhua myös funktion f osittaisderivaatoista. Nämä määritellään samastamalla f vastaavan tason kuvauksen kanssa, eli ajattelemalla sitä funktioksi $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ja tarkastelemalla sen osittaisderivaattaa jonkin annetun tason vektorin suuntaan. Toisin sanoen,

$$\begin{aligned} \text{funktiolla } f \text{ on osittaisderivaatta pisteessä } z_0 \in \Omega \text{ suuntaan } z \in \mathbb{C} \\ \Leftrightarrow \text{funktiolla } g(t) := f(z_0 + tz), t \in \mathbb{R}, \text{ on derivaatta pisteessä } t = 0 \\ \Leftrightarrow \text{reaalifunktiolla } \operatorname{Re} g(t) \text{ ja } \operatorname{Im} g(t) \text{ on derivaatat pisteessä } t = 0 \end{aligned}$$

Olkoon $z_0 = (x, y) = x + iy$. Erityisesti koordinaattiaskelien $1 = (1, 0)$ ja $i = (0, 1)$ suuntaan saadaan osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} \partial_1 f|_{z_0} = \partial_x f(x + iy) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t + iy) - f(x + iy)}{t}, \\ \partial_2 f|_{z_0} = \partial_y f(x + iy) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + i(y + t)) - f(x + iy)}{t}. \end{aligned}$$

1.4.2 Kompleksiderivaatta ja analyyttisyys

Olkoon tästä eteenpäin $\Omega \subset \mathbb{C}$ *avoin* ja epätyhjä ja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

Määritelmä 1.18 f on (kompleksi)derivoituva pisteessä $z_0 \in \Omega$ jos raja-arvo

$$\lim_{w \rightarrow z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0}$$

on olemassa. Tällöin raja-arvoa kutsutaan funktion f **derivaataksi** pisteessä z_0 ja merkitään

$$f'(z_0) := \lim_{w \rightarrow z_0} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0}.$$

Derivaatan määritelmä voidaan kirjoittaa toisin purkamalla auki raja-arvojen määritelmiä. Saadaan tulos, että f on derivoituva pisteessä z_0 derivaatan arvolla $f'(z_0)$ täsmälleen silloin kun kaikilla kompleksilukujonoilla (h_n) , joilla $h_n \neq 0$ ja $z_0 + h_n \in \Omega$, pätee

$$\frac{|f(z_0 + h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n|}{|h_n|} \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

(Tässä sovellettiin kaavaa $|a/b| = |a|/|b|$, joka pätee myös kompleksiluvuille, kunhan $b \neq 0$.) Koska tässä käytetään kompleksituloa kertolaskussa $f'(z_0)h_n$, on yhteys funktion f osittaisderivaattoihin epäsuora (ks. Cauchyn–Riemannin yhtälöt alla).

Esimerkki 1.19

- a) (Vakiokuvaus) Jos $f(z) = a \in \mathbb{C}$, on $f(w) - f(z) = 0$ aina, joten saadaan $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in \Omega$.
- b) (1. asteen polynomi) Jos $f(z) = bz + a$, $a, b \in \mathbb{C}$, on $f(w) - f(z) = bw - bz = b(w - z)$. Kun $w \neq z$, saadaan siis

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = b,$$

joten $f'(z) = b$ kaikilla $z \in \Omega$.

Määritelmä 1.20

- Jos $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on derivoituva jokaisessa pisteessä $z_0 \in \Omega$, kutsutaan sitä **analyttiseksi** eli **holomorfeksi** funktioksi joukossa Ω .
- Kiinteän avoimen joukon $\Omega \subset \mathbb{C}$ kaikkien analyttisten funktioiden kokoelmasta käytetään merkintää $H(\Omega)$ ($H = \text{holomorfinen}$).

Merkintää " $H(\Omega)$ " tullaan jatkossa käyttämään lähinnä lyhennysmerkintänä, nimittäin " $f \in H(\Omega)$ " tarkoittaa samaa kuin " f on kompleksiarvoinen ja -derivoituva funktio joukossa Ω ".

Kompleksiderivaatalle pätee hyvin samanlaisia laskusääntöjä kuin reaali-funktioiden derivaatoille. Alla on listattu niistä tärkeimmät: huomaa näistä erityisesti yhdistetyn kuvauksen ketjusääntö, jonka avulla pystyy helposti rakentamaan uusia analyttisiä funktioita tunnetuiden analyttisten funktioiden avulla (ks. Esim. 1.21–1.23 alla).

- (0) $f \in H(\Omega) \Rightarrow f' \in H(\Omega)$ ja f on jatkuva.
(Vastaava tulos suunnatuille derivaatoille *ei* ole totta. Esimerkiksi löytyy funktioita, jotka ovat osittaisderivoituvia, mutta niiden osittaisderivaatat eivät ole edes jatkuvia.)
- (1) $f, g \in H(\Omega) \Rightarrow f + g \in H(\Omega)$ ja $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.
- (2) (Tulon derivaatta eli Leibnizin sääntö):
 $f, g \in H(\Omega) \Rightarrow fg \in H(\Omega)$ ja $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.
- (3) Yhdistetyn kuvauksen ketjusääntö: jos $f \in H(\Omega)$, $\Omega_1 \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f(\Omega) \subset \Omega_1$ sekä $g \in H(\Omega_1)$, pätee yhdistetylle kuvaukselle $h = g \circ f$ (eli funktiolle $h(z) = g(f(z))$)

$$h \in H(\Omega) \quad \text{ja} \quad h'(z) = g'(f(z))f'(z) \quad \text{kaikilla } z \in \Omega.$$

Näistä saadaan seurauksina:

- Koska vakiofunktion derivaatta todettiin nollassi, saadaan kohdasta (2) sääntö myös vakiolla kertomiselle: $f \in H(\Omega)$, $c \in \mathbb{C} \Rightarrow cf \in H(\Omega)$ ja $(cf)'(z) = cf'(z)$.

- Kohtaa (2) iteroimalla nähdään, että z^n , $n \in \mathbb{N}$, ja siten myös kaikki polynomit ovat analyyttisiä kaikkialla, eli kuuluvat joukkoon $H(\mathbb{C})$. Induktiolla voi myös helposti tarkistaa, että

$$\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}. \quad (1.13)$$

(Tapaus $n = 1$ tehtiin jo yllä. Muuten saadaan induktio-oletuksen avulla $\frac{d}{dz} z^{n+1} = \frac{d}{dz}(z z^n) = \frac{d}{dz} z \cdot z^n + z \frac{d}{dz} z^n = 1 \cdot z^n + z \cdot n z^{n-1} = (n+1)z^n$.)

- Käänteisalkion otto, $f(z) = 1/z$, on analyyttinen koko määrittelyalueessaan $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja sille pätee $f'(z) = -1/z^2$. (Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.) Näin ollen myös $z^{-m} \in H(\Omega)$ aina kun $m \in \mathbb{N}_+$, ja ketjusäännöstä seuraa, että

$$\frac{d}{dz} z^{-m} = \frac{d}{dz} \frac{1}{z^m} = -\frac{1}{(z^m)^2} m z^{m-1} = -m z^{-m-1}.$$

Kaava (1.13) pätee siis myös kompleksifunktioille kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$.

Soveltamalla viimeistä tulosta ketjusääntöön saadaan hyödyllinen rationaalifunktiotulos:

- (4) Olkoot $f_1, f_2 \in H(\Omega)$. Oletetaan, että $\Omega_0 \subset \Omega$ on avoin ja $f_2(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Omega_0$. Tällöin

$$\frac{f_1}{f_2} \in H(\Omega_0), \text{ erityisesti aina } \frac{1}{f_2} \in H(\Omega_0).$$

Eli kaksi analyyttistä funktiota voi jakaa keskenään ja analyyttisyys säilyy, kunhan muistaa poistaa kaikki nimittäjän nollakohdat.

Alla olevissa sovelluksissa oletetaan tunnetuksi, että $\exp \in H(\mathbb{C})$ ja $\frac{d}{dz} e^z = e^z$. Tämä todistetaan myöhemmin Esimerkissä 1.24.

Esimerkki 1.21 Missä alueessa funktio $f(z) = \exp((z-1)^{-1})$ on analyyttinen ja mikä on sen derivaatta?

Ratkaisu: Funktio on yhdiste kahdesta kuvauksesta, $f(z) = h(g(z))$, jossa $h(w) = \exp(w)$ ja $g(z) = (z-1)^{-1}$. Tässä g on analyyttinen lukuun ottamatta nimittäjän nollakohtia, joita on vain yksi, $z = 1$. Sen derivaatta on $g'(z) = -(z-1)^{-2}$. Toisaalta h on analyyttinen kaikkialla ja $h' = h$. Näin ollen, ketjusäännön perusteella f on analyyttinen alueessa $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ja sen derivaatta on $f'(z) = -(z-1)^{-2} \exp((z-1)^{-1})$.

Esimerkki 1.22 Missä alueessa funktio $f(z) = 1/(e^z - 1)$ on analyyttinen ja mikä on sen derivaatta? (Tämä funktio tulee vastaan statistisessa fysiikassa Bosen–Einsteinin statistiikkaa käsitellessä.)

Ratkaisu: Käyttäen edellisen tehtävän apufunktioita g ja h nähdään, että nyt $f(z) = g(h(z))$. Edellisten tulosten ja ketjusäännön perusteella f on siis analyyttinen lukuun ottamatta pisteitä z , joissa $h(z) = 1$, eli aina kun $z \notin \ln 1$. Saadaan siis tulos, että f on analyyttinen alueessa $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, jossa sen derivaatta on

$$f'(z) = -\frac{1}{(e^z - 1)^2} e^z = -\frac{e^z}{e^{2z} - 2e^z + 1} = -\frac{1}{e^z - 2 + e^{-z}} = -\frac{1}{2 \cosh z - 1}.$$

Käänteiskuvauksille pätee seuraava kätevä tulos, jonka todistus onkin jo vähän hankalampi [3, kohdat 10.29–10.33]:

- (5) Jos Ω on alue ja $f \in H(\Omega)$, on joukko $f(\Omega)$ joko myös alue tai sisältää vain yhden pisteen.
- (6) Olkoon Ω alue ja $f \in H(\Omega)$ on **injektiivinen** eli $f(z) \neq f(w)$ kun $z \neq w$. Tällöin
- i) $E := f(\Omega)$ on alue

Taulukko 1.2: Yhteenveto analyttisten funktioiden derivointisäännöistä, jotka pätevät aina kun niiden laskutoimituksissa on ”järkeä” (katso tekstistä tarkemmat oletukset).

Olettaen, että f, g ovat sopivia analyttisiä funktioita, pätee:

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (\text{Leibnizin sääntö})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$$\frac{d}{dz}g(f(z)) = g'(f(z))f'(z) \quad (\text{ketjusääntö})$$

$$\frac{d}{dw}f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \quad (\text{käänteisfunktion derivaatta})$$

Lisäksi

$$\frac{d}{dz}z^k = kz^{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^N a_n z^n = \sum_{n=1}^N n a_n z^{n-1}, \quad N \in \mathbb{N}$$

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z$$

- ii) $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \Omega$
- iii) Käänteiskuvaus $g : E \rightarrow \Omega$ on analyttinen ja

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \text{ kaikilla } w \in E.$$

Eli, jos jossain alueessa määritelty analyttinen funktio on kääntyvä, on sen käänteiskuvaus myös analyttinen.

Taulukossa 1.2 on esitetty yhteenveto yllä mainituista derivointisäännöistä, ja alla käydään läpi tärkeimpiä seurauksia alkeisfunktioiden derivoituvuudelle.

Esimerkki 1.23

- Säännöstä (3) seuraa, että kaikilla $c \in \mathbb{C}$, e^{cz} on analyttinen koko kompleksilukujen joukossa ja $\frac{d}{dz}e^{cz} = ce^{cz}$. Siispä funktioiden

$$\sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z \in H(\mathbb{C})$$

derivaatat ovat

$$\cos z, -\sin z, \cosh z, \sinh z.$$

- Kohdasta (4) saadaan, että

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \in H(\Omega), \text{ kun } \Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \mid \sin z = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Samoin rationaalifunktiot $\tan z$, $\tanh z$ ja $\coth z$ ovat analyttisiä alueissa, joista on poistettu niiden nimittäjien nollakohdat. Näiden kaikkien käänteisfunktiot ovat myös analyttisiä, kun ne rajoitetaan alueeseen, jossa alkuperäinen funktio on kääntyvä (eli valitaan jokin haara).

- Logaritmin päähaara on analyyttinen alueessa $\Omega := \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Huomaa, että $\overline{\ln}$ on määritelty koko joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, mutta se on analyyttinen vain alueessa³ Ω , jossa kompleksitasosta on leikattu pois negatiivinen reaaliakseli ja origo (engl. *branch cut*). Määrittelyjoukosta poistuu näin pisteet, joissa päähaara on epäjatkuva.

Päähaaran sijaan voidaan käyttää muitakin logaritmin määrittelyalueita. Näille kaikille pätee ominaisuuden (6) nojalla

$$\frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{\exp(\ln z)} = \frac{1}{z}.$$

1.4.3 Cauchyn–Riemannin yhtälöt (CR–yhtälöt)

Olkoon $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ differentioituva⁴ tason kuvauksena pisteessä $z_0 = x + iy$. Milloin se on lisäksi analyyttinen?

Oletetaan, että se olisi kompleksiderivoituva ja $f'(z_0) = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Merkitään $f = u + iv$ ja olkoon $\varepsilon_n \rightarrow 0$ jokin jono, jolle $\varepsilon_n > 0$ kaikilla n . Tutkitaan mitä tästä seuraa osittaisderivaatoille soveltaen määritelmää (1.12).

1. Valitaan $h_n = \varepsilon_n$, jolloin

$$\begin{aligned} f(z_0 + h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n &= u(x + \varepsilon_n, y) + iv(x + \varepsilon_n, y) - u(x, y) - iv(x, y) - (a + ib)\varepsilon_n \\ &= \varepsilon_n \left(\frac{u(x + \varepsilon_n, y) - u(x, y)}{\varepsilon_n} - a + i \left[\frac{v(x + \varepsilon_n, y) - v(x, y)}{\varepsilon_n} - b \right] \right). \end{aligned}$$

Koska oletettiin, että f on kompleksiderivoituva pisteessä z_0 ja $\varepsilon_n = |h_n|$, niin voidaan tämä yhtälö jakaa ε_n :llä ja sen jälkeen ottaa $n \rightarrow \infty$, jolloin lopputuloksen täytyy olla nolla. Näin ollen myös jaetun yhtälön reaali- ja imaginaariosa molemmat menevät nolliin, ja koska u ja v ovat reaaliarvoisia, seuraa tästä, että

$$\partial_x u(x, y) = a, \quad \partial_x v(x, y) = b.$$

2. Valitaan $h_n = i\varepsilon_n$, jolloin edelleen $|h_n| = \varepsilon_n \rightarrow 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h_n) - f(z_0) - f'(z_0)h_n}{h_n} &= \frac{f(x + i(y + \varepsilon_n)) - f(x + iy)}{i\varepsilon_n} - (a + ib) \\ &= (-i) \frac{u(x, y + \varepsilon_n) - u(x, y)}{\varepsilon_n} - ib + \frac{v(x, y + \varepsilon_n) - v(x, y)}{\varepsilon_n} - a \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -i(\partial_y u(x, y) + b) + \partial_y v(x, y) - a. \end{aligned}$$

Toisaalta oletetun kompleksiderivoituvuuden mukaan myös tämän raja-arvon pitää olla nolla. Saadaan siis uudet välttämättömät ehdot

$$\partial_y u(x, y) = -b, \quad \partial_y v(x, y) = a.$$

Kohdat 1 ja 2 yhdistämällä huomataan, että jos funktio f on analyyttinen pisteessä $z_0 = (x, y)$, niin sen reaali- ja imaginaariosa u ja v toteuttavat aina **Cauchyn–Riemannin yhtälöt**

³(MAT) Analyttisyys seuraa kohdasta (6), sillä $\exp : \Omega_1 \rightarrow \Omega$ on bijektio kun $\Omega_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \pi\}$. Lähtöjoukkoa ei voi enää laajentaa ilman että se joko lakkaa olemasta avoin tai saatu funktio lakkaa olemasta injektiivinen.

⁴(MAT) Tässä differentioituvuus pisteessä $z_0 \in \Omega$ tarkoittaa matriisin $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ löytymistä, jolle $|f(z_0 + h) - f(z_0) - Ah|/|h| \rightarrow 0$ kun $h \rightarrow 0$. Tällöin f on myös osittaisderivoituva pisteessä z_0 kaikkiin suuntiin, ja $\partial_1 f$ vastaa matriisin A ensimmäistä saraketta ja $\partial_2 f$ sen toista saraketta.

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \operatorname{Re} f'(z_0),$$

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \operatorname{Im} f'(z_0).$$

Itse asiassa myös käänteinen tulos pätee:

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ avoin ja funktio $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ differentioituva joukon Ω jokaisessa pisteessä. Tällöin

$$f \in H(\Omega) \iff \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases} \quad \text{kaikilla } (x, y) \in \Omega.$$

Näin ollen CR-yhtälöitä voidaan käyttää tutkimaan onko jokin annettu funktio f analyyttinen, ks. Esimerkki 1.24.

Lisäksi CR-yhtälöistä saadaan myös tulos, että *analyttisen funktion reaali- ja imaginääriosat ovat aina harmonisia funktioita*. Tätä tietoa voi käyttää osoittamaan, että jokin annettu kompleksifunktio *ei* ole analyyttinen: nimittäin, jos sen reaali- tai imaginaariosa ei ole harmoninen, ei se voi olla analyyttinen. Samoin tästä seuraa, että jos jokin annettu reaalifunktio ei ole harmoninen, ei se voi olla minkään analyyttisen funktion reaali- eikä imaginaariosa. Tarkemmin pätee:

- Jatkuvaa reaalifunktiota $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kutsutaan **harmoniseksi**, jos se on toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$\nabla^2 F(x, y) := \partial_x^2 F(x, y) + \partial_y^2 F(x, y) = 0, \quad \text{kaikilla } (x, y) \in \Omega.$$

- Jos $f \in H(\Omega)$, ovat $u = \operatorname{Re} f$ ja $v = \operatorname{Im} f$ molemmat harmonisia funktioita joukossa Ω , eli $\nabla^2 u = 0 = \nabla^2 v$ joukon jokaisessa pisteessä.

Näistä toinen kohta nähdään osittaisderivoimalla CR-yhtälöitä toiseen otteeseen: koska $\partial_y u = -\partial_x v$ ja $\partial_x u = \partial_y v$ saadaan $\partial_y^2 u = -\partial_y \partial_x v = -\partial_x \partial_y v = -\partial_x^2 u$ ja $\partial_y^2 v = -\partial_x^2 v$ seuraa vastaavasti. (Tarkemmat yksityiskohdat löytyvät esim. lähteestä [3, Luku 11].)

Esimerkki 1.24 Osoitetaan, että $e^z \in H(\mathbb{C})$ ja että se on itsensä derivaatta.

Ratkaisu: Määritelmän mukaan, kun $f(z) = e^z$, on sen reaaliosa $u(x, y) = e^x \cos y$ ja imaginääriosat $v(x, y) = e^x \sin y$. Näin ollen saadaan käyttäen reaalifunktioiden tunnettuja derivaattoja

$$\partial_x u = u, \quad \partial_y u = -e^x \sin y = -v, \quad \partial_x v = v, \quad \partial_y v = e^x \cos y = u.$$

Erityisesti CR-yhtälöt toteutuvat kaikkialla. Nähdään siis, että $f \in H(\mathbb{C})$ ja $\operatorname{Re} f' = \partial_x u = u$, $\operatorname{Im} f' = \partial_x v = v$, joten $f' = f$.

Esimerkki 1.25 Löytyykö oikeassa puolitasossa $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ määriteltyä analyyttistä funktiota f , jonka reaaliosa on $u(x, y) = e^{y/x}$?

Ratkaisu: Aloitetaan laskemalla u :n osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} \partial_x u(x, y) &= -yx^{-2}e^{y/x} \implies \partial_x^2 u(x, y) = (2yx^{-3} + y^2x^{-4})e^{y/x}, \\ \partial_y u(x, y) &= x^{-1}e^{y/x} \implies \partial_y^2 u(x, y) = x^{-2}e^{y/x}. \end{aligned}$$

Näin ollen $\partial_x^2 u(x, y) \neq -\partial_y^2 u(x, y)$ esimerkiksi kun $x = 1, y = 0$, joten u ei ole harmoninen joukossa Ω . Tästä seuraa, ettei mikään $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, jolle $u = \operatorname{Re} f$, voi olla analyyttinen.

Vastaus on siis kielteinen. Luvussa 1.5.2 nähdään, miten funktion f olisi voinut yrittää laskea, jos u olisi ollut harmoninen.

1.5 Kompleksitason viivaintegraalit

1.5.1 Tason viivaintegraalit

Palautetaan ensin mieleen MAPUsta tuttu tason tavallinen viivaintegraali.

Määritelmä 1.26 Kutsumme tässä tason **käyräksi** kuvausta $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, joka on jatkuvasti derivoituvaa⁵.

Tätä voi ajatella fysikaalisesti tasossa liikkuvan hiukkasen ratana $\mathbf{r}(t)$, jossa jokaisella ajanhetkellä t hiukkasen nopeus $\mathbf{r}'(t) := \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^2$ ja kiihtyvyys $\mathbf{r}''(t)$ säilyvät äärellisinä.

Mikä tahansa (jatkuva) kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan integroida käyrää \mathbf{r} pitkin:

$$\int_{\mathbf{r}} f \, d\mathbf{r} := \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t)dt \in \mathbb{R}^2.$$

(Tästä säännöstä käytettiin MAPUssa merkintää $d\mathbf{r} := \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}dt$.) Tätä integraalia kutsutaan **funktio** f **viivaintegraaliksi polun \mathbf{r} yli**. Integrointi tehdään komponentteittain, eli integraalin tuottaman vektorin j :s komponentti ($j = 1, 2$) on

$$\left(\int_{\mathbf{r}} f \, d\mathbf{r} \right)_j := \int_a^b f(\mathbf{r}(t))r'_j(t)dt.$$

Tärkeä ominaisuus on, että *viivaintegraalin arvo säilyy muuttumattomana käyrän uudelleenparametrisoinneissa*. Eli jos oletetaan, että $p : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ on jokin funktio, joka ei vaihda välillä suuntaa ($p'(u) > 0$) ja kuvaa välien päätepisteet toisikseen ($p(\alpha) = a, p(\beta) = b$), on käyrän $\tilde{\mathbf{r}}(u) := \mathbf{r}(p(u))$, $u \in [\alpha, \beta]$, yli otetun viivaintegraalin arvo sama kuin käyrän \mathbf{r} yli otettu, eli

$$\int_{\tilde{\mathbf{r}}} f \, d\tilde{\mathbf{r}} = \int_{\mathbf{r}} f \, d\mathbf{r}.$$

Koska jokainen väli $[a, b]$ voidaan kuvata tällaisella kuvauksella yksikköväliksi $[0, 1]$, voidaankin viivaintegraaleja tarkastellessa periaatteessa aina valita käyrän määrittelyväliksi $[0, 1]$.

Tulos seuraa suoraan derivoinnin tavallisesta ketjusäännöstä, jonka mukaan $\tilde{\mathbf{r}}'(u) := \frac{d\mathbf{r}(p(u))}{du} = \mathbf{r}'(p(u))p'(u)$, vaihtamalla integrointimuuttujaksi $t = p(u)$:

$$\int_{\tilde{\mathbf{r}}} f \, d\tilde{\mathbf{r}} := \int_{\alpha}^{\beta} f(\tilde{\mathbf{r}}(u))\tilde{\mathbf{r}}'(u)du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{r}(p(u)))\mathbf{r}'(p(u))p'(u)du = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t)dt.$$

Kuten MAPUssa, viivaintegraaleja voidaan ottaa myös tason vektorikenttien $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ yli. Tällöin merkitään

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \int_a^b \sum_{j=1,2} F_j(\mathbf{r}(t))r'_j(t)dt.$$

Erityisesti, kaikille tason funktioille $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ voidaan määritellä vektorikenttä ∇f kaavalla $(\nabla f)_j = \partial_j f$ ja tämä kenttä on automaattisesti *konservatiivinen*: jos \mathbf{r} on mikä tahansa käyrä, jonka alkupiste on \mathbf{x} ja päätepiste \mathbf{y} , pätee⁶

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{r}} \nabla f \cdot d\mathbf{r}.$$

⁵(MAT) Käyrä on jatkuvasti derivoituvaa, jos sen derivaatta $\mathbf{r}' :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^2$ on jatkuva ja sillä on myös raja-arvot $\mathbf{r}'(a^+)$ ja $\mathbf{r}'(b^-)$.

⁶(MAT) Tämä tulos seuraa helposti määritelmistä ja analyysin peruslauseesta, kun oletetaan, että f on jatkuvasti derivoituvaa kaikkialla. Tällöin nimittäin myös kuvaus $g = f \circ \mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituvaa ja sen derivaatta on ketjusäännön perusteella $g'(t) = \sum_{j=1,2} \partial_j f(\mathbf{r}(t))r'_j(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$. Sijoittamalla tämä määritelmään saadaan $\int_{\mathbf{r}} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a) = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$.

Määritelmä 1.27 Käyriin liittyen tarvitsemme myös seuraavia niistä johdettuja käsitteitä.

- **Käyrän** $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ **pituus** $|\mathbf{r}|$ määritellään sen vauhdin $|\mathbf{r}'|$ integraalina,

$$|\mathbf{r}| = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt.$$

Sitä vastaavaa **käänteiskäyrää** merkitään $\overleftarrow{\mathbf{r}}$ ja se on kaavan $\overleftarrow{\mathbf{r}}(t) := \mathbf{r}(-t)$ määrittelemä kuvaus $[-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- **Käyräketju** \mathbf{R} on mikä tahansa äärellisen monen käyrän \mathbf{r}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, (järjestetty) ko-koelma. Tällöin merkitään $\mathbf{R} := \mathbf{r}_1 \dot{+} \mathbf{r}_2 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{r}_n$. Viivaintegraali käyräketjun yli määritellään sen osaviivaintegraalien summana

$$\int_{\mathbf{R}} f d\mathbf{R} := \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{r}_i} f d\mathbf{r}_i. \quad (1.14)$$

- **Polku** on käyräketju, jossa ketjun seuraava käyrä lähtee aina edellisen käyrän päätepisteestä. Polun lähtöpiste on ensimmäisen käyrän lähtöpiste ja päätepiste viimeisen käyrän päätepiste. Kaikki **murtoviivat** ovat polkuja.
- Polku \mathbf{P} on **suljettu**, jos sen päätepiste on sama kuin lähtöpiste. Tätä korostetaan usein lisäämällä sitä vastaavaan viivaintegraaliin ympyrä, eli merkitsemällä

$$\oint_{\mathbf{P}} f d\mathbf{P}.$$

- Polun $\mathbf{P} = \mathbf{r}_1 \dot{+} \mathbf{r}_2 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{r}_n$ **käänteispolku** on $\overleftarrow{\mathbf{P}} := \overleftarrow{\mathbf{r}}_n \dot{+} \dots \dot{+} \overleftarrow{\mathbf{r}}_2 \dot{+} \overleftarrow{\mathbf{r}}_1$. Aina pätee⁷

$$\int_{\overleftarrow{\mathbf{P}}} f d\overleftarrow{\mathbf{P}} = - \int_{\mathbf{P}} f d\mathbf{P}.$$

Polkuja tarvitaan, sillä esimerkiksi neliön kehää kiertävä ”hiukkanen” ei kulje käyrää pitkin, sillä sen kiihtyvyyden kulmapisteissä on ääretön, mutta se kulkee kuitenkin polkua pitkin, joka saadaan ottamalla kukin sivu omaksi käyräkseen. Polkuja käytetään täsmälleen niin kuin käyriäkin, täytyy ainoastaan muistaa paloitella integrointi osiin kunkin polun osakäyrän päätepisteen kohdalla, kuten kaavassa (1.14). Osassa tuloksista tätäkään ei tarvitse muistaa tehdä: esimerkiksi, jos \mathbf{P} on polku pisteestä \mathbf{x} pisteeseen \mathbf{y} ja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jokin (jatkuvasti derivoituva) tasofunktio, pätee edelleen

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{P}} \nabla f \cdot d\mathbf{P}.$$

Nimittäin, jos oikean puolen määritelmän kirjoittaa auki summana ja sen jälkeen soveltaa saatuihin käyrien integraaleihin niille johdettua tulosta, saadaan aikaan summa, jossa välipisteiden sijoitusarvot kumoavat toisensa ja jäljelle jää pelkästään kaavan vasemman puolen päätepestearvot.

1.5.2 (Lisä) Analyyttisen funktion rakentaminen annetusta harmonisesta reaali- tai imaginääriosasta

Olkoon f analyttinen alueessa Ω ja tunnetaan siitä sen reaali-osa $u = \operatorname{Re} f$. Aiemmin nähtiin, että tällöin sekä u että f :n imaginääriosaa $v = \operatorname{Im} f$ ovat harmonisia ja toteuttavat CR-yhtälöt. Mitä muuta voidaan sanoa imaginääriosasta v ?

⁷(MAT) Seuraa suoraan viivaintegraalin määritelmästä, sillä $\frac{d}{dt} \overleftarrow{\mathbf{r}}(t) = -\mathbf{r}'(-t)$, jonka jälkeen voidaan tehdä muuttujanvaihto $u = -t$.

Kiinnitetään jokin $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ ja tutkitaan v :n arvoa pisteessä $z = (x, y) \in \Omega$. Koska Ω on murtoviivayhtenäinen, löytyy (murtoviiva)polku \mathbf{P} , joka kulkee pisteestä z_0 pisteeseen z alueessa Ω . Koska v on harmoninen alueessa Ω , on se erityisesti siinä jatkuvasti derivoituva, joten sen tuottama gradienttikenttä on konservatiivinen, niin kuin yllä nähtiin. Näin ollen saadaan

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = \int_{\mathbf{P}} \nabla v \cdot d\mathbf{P}.$$

Koska polun kaikki pisteet sijaitsevat Ω :ssa, voidaan integrandissa soveltaa CR-yhtälöitä, joiden mukaan $\nabla v = (\partial_x v, \partial_y v) = (-\partial_y u, \partial_x u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u$. Tästä seuraa, että

$$v(x, y) = C_0 + \int_{\mathbf{P}} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u \right] \cdot d\mathbf{P}, \quad (1.15)$$

missä $C_0 := v(x_0, y_0)$ on jokin reaaliluku. Nähdään siis, että *reaaliosa määrää analyttisen funktion imaginääriosan vakiota vaille yksikäsitteisesti*.

Sama pätee myös toisin päin, sillä CR-yhtälöitä soveltamalla saadaan reaali- ja imaginääriosan välille myös kaava

$$u(x, y) = c_0 + \int_{\mathbf{P}} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla v \right] \cdot d\mathbf{P},$$

jossa $c_0 := u(x_0, y_0)$.

Molemmat kaavat pätevät kaikille poluille \mathbf{P} , jotka kulkevat pisteestä z_0 pisteeseen z alueessa Ω . Jos on tarve etsiä eksplisiittinen kaava integraalien arvoille, voi sopivalla polun valinnalla helpottaa tehtävää merkittävästi, kuten alla olevassa esimerkissä nähdään.

Esimerkki 1.28 Löytyykö koko kompleksitasossa määriteltyä analyttistä funktiota f , jonka reaali-osa on $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$?

Ratkaisu: Kuten Esimerkissä 1.25 aloitetaan laskemalla u :n osittaisderivaatat

$$\begin{aligned} \partial_x u(x, y) &= 3(x^2 - y^2) & \Rightarrow & \quad \partial_x^2 u(x, y) = 6x, \\ \partial_y u(x, y) &= -6xy & \Rightarrow & \quad \partial_y^2 u(x, y) = -6x. \end{aligned}$$

Näin ollen u on harmoninen funktio, joten se voi olla jonkin analyttisen funktion reaali-osa. Valitaan $z_0 = (0, 0)$ ja yhdistetään se pisteeseen (x_1, y_1) käyttäen polkua \mathbf{P} , joka ensin kulkee origosta reaaliakselia pitkin pisteeseen $(x_1, 0)$ ja siitä imaginääriakselin suuntaisesti pisteeseen (x_1, y_1) . Toisin sanoen $\mathbf{P} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$, jossa

$$\mathbf{r}_1(t) := t(x_1, 0), \quad t \in [0, 1], \quad \mathbf{r}_2(t) := (x_1, 0) + t(0, y_1) = (x_1, ty_1), \quad t \in [0, 1].$$

Nähdään, että $\mathbf{r}'_1(t) = (x_1, 0)$ ja $\mathbf{r}'_2(t) = (0, y_1)$. Koska $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy \\ 3(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$, on $\mathbf{r}'_1(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u = 0$ ensimmäisellä polulla, jolla $y = 0$. Näin saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{P}} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u \right] \cdot d\mathbf{P} &= \int_{\mathbf{r}_1} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u \right] \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{\mathbf{r}_2} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u \right] \cdot d\mathbf{r}_2 \\ &= \int_0^1 \mathbf{r}'_2(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla u(\mathbf{r}_2(t)) dt = \int_0^1 y_1 3(x_1^2 - t^2 y_1^2) dt = 3x_1^2 y_1 - y_1^3. \end{aligned}$$

Tästä laskusta ja kaavasta (1.15) saadaan nyt, että imaginääriosan v pitäisi olla muotoa $v(x, y) = C + 3x^2 y - y^3$, jossa $C \in \mathbb{R}$. Tämän jälkeen voi vielä tarkistaa laskulla, että jokaisella tällaisella v :llä CR-yhtälöt toteutuvat.

Vastaus: Kyllä löytyy, nimittäin kaikki funktiot $f(z) = u(z) + iv(z)$, kun $v(x, y) = C + 3x^2 y - y^3$ ja C on jokin reaaliluku, ovat kaikki etsittyjä analyttisiä funktioita. Pienellä laskulla huomaa, että itse asiassa tällöin $f(z) = z^3 + iC$.

1.5.3 Kompleksitason viivaintegraalit

Kompleksitason viivaintegraalit määritellään tämän jälkeen kompleksitason geometrisen tulkinnan avulla, eli samastamalla käyrät $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ kuvausten $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) := r_1(t) + ir_2(t)$ kanssa. Ainoastaan tulo vaihtuu kompleksilukujen kertolaskuksi.

Määritelmä 1.29 Kun $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ on kompleksitason käyrä ja f on kompleksifunktio⁸, määritellään funktion f viivaintegraali polun γ yli kaavalla

$$\int_{\gamma} f dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \in \mathbb{C}.$$

Jos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ on kompleksitason polku, määritellään

$$\int_{\gamma} f dz := \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f dz.$$

Jos polku γ on suljettu, merkitään tätä integraalia yleensä

$$\oint_{\gamma} f dz.$$

Määritelmän voi purkaa auki myös tavallisten tason integraalien avulla, josta myös helpommin näkee, miksi ne eivät ole sama asia. Merkitään $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, ja $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{Re} \gamma(t), \operatorname{Im} \gamma(t))$, jolloin $\gamma'(t) = \mathbf{r}'(t) = (\alpha(t), \beta(t))$. Tällöin siis määritelmän integrandissa oleva kompleksiluku on

$$f(\gamma(t))\gamma'(t) = (u + iv)(\alpha + i\beta) = u\alpha - v\beta + i(u\beta + v\alpha).$$

Kuten tason viivaintegraalissa, määritellään integraali tämän yli ”komponenteittain”, eli reaali- ja imaginääriosia integroidaan erikseen. Koska yllä

$$u\alpha - v\beta = (u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))) \cdot \mathbf{r}'(t) \quad \text{ja} \quad u\beta + v\alpha = (v(\gamma(t)), u(\gamma(t))) \cdot \mathbf{r}'(t),$$

voidaan kompleksinen viivaintegraali kirjoittaa kahden tason tavallisen vektorikentän yli otettujen viivaintegraalien avulla:

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\mathbf{r}} (u, -v) \cdot d\mathbf{r} + i \int_{\mathbf{r}} (v, u) \cdot d\mathbf{r}.$$

Tätä esitystä ei käytetä enää tämän jälkeen. Käytännössä siitä on hyötyä ainoastaan osassa Taulukon 1.3 tulosten johdoista; ne kaikki seuraavat nyt tason viivaintegraalien ominaisuuksista.

Huomautus 1.30 Polku $\gamma(t)$ annetaan usein muodossa, jossa se saadaan analyyttisen funktion f rajoittumana (eli löytyy alue $\Omega \subset \mathbb{C}$ ja $f \in H(\Omega)$, joilla $\gamma(t) = f(t)$ kaikilla $t \in [a, b] \subset \Omega$). Tällöin voidaan viivaintegraalissa oleva käyrän derivaatta laskea f' :n avulla, eli pätee $\gamma'(t) = f'(t)$. Nimittäin, jos $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, on tällöin $\gamma(t) = (u(t, 0), v(t, 0))$, joten $\gamma'(t) = (\partial_x u(t, 0), \partial_x v(t, 0)) = f'(t)$ CR-yhtälöiden perusteella. Alla olevassa esimerkissä käy ilmi, miksi tämä usein helpottaa laskemista.

Esimerkki 1.31 Olkoon γ suljettu käyrä, joka kiertää kerran pisteen $a \in \mathbb{C}$ ympäri R -säteistä ympyränkaarta pitkin positiiviseen kiertosuuntaan, eli vastapäivään. Laske $\oint_{\gamma} f dz$ funktiolle $f(z) := \operatorname{Re} z$.

⁸(MAT) Tässä täytyy olettaa jotain säännöllisyyttä funktiolta f . Riittää esimerkiksi, että f on jatkuva käyrän kuvajoukossa.

Taulukko 1.3: Kompleksitason viivaintegraalin perusominaisuuksia.

- (1) Kompleksitasonkin viivaintegraali on **lineaarinen**: jos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, f, g ovat kompleksifunktioita, ja γ on jokin polku, pätee

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_{\gamma} f dz + \beta \int_{\gamma} g dz .$$

- (2) Integraalin modulin arvoa voi helposti arvioida ylöspäin

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq ML ,$$

jossa M on funktion f modulin maksimi polulla γ ja $L := |\gamma|$ on polun pituus. Ensimmäistä epäyhtälöä merkitään usein lyhyesti

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| ,$$

jossa oikealla puolella pitää siis formaalisti sijoittaa $|dz| = |\gamma'(t)| dt$.

- (3) Viivaintegraalin arvo ei muutu polun uudelleenparametrisoinneissa.
 (4) Polun γ käänteispolulle $\overleftarrow{\gamma}$ pätee

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f dz = - \int_{\gamma} f dz .$$

Ratkaisu: Napakoordinaateissa kirjoitettuna voidaan käyrä parametrisoida helpoiten suoraan kulman φ avulla, jolloin $\gamma(t) = a + R(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.⁹ Eulerin kaavan mukaan on tällöin $\gamma(t) = f(t)$, missä $f(z) = a + Re^{iz}$ on analyyttinen funktio, jolle $f'(z) = Rie^{iz}$. Huomautusta 1.30 käyttäen saadaan siis

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f dz &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \gamma(t) \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} a + R \cos t) R i e^{it} dt \\ &= iR \operatorname{Re} a \int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t) dt + iR^2 \int_0^{2\pi} \cos t (\cos t + i \sin t) dt . \end{aligned}$$

Jäljelle jääneet tavalliset trigonometriset integraalit voidaan laskea esimerkiksi käyttäen identiteettejä

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos(2t)) \quad \text{ja} \quad \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin(2t) .$$

Muistaen, että sinin ja kosinin integraalit 2π -mittaisen välin yli antavat aina nollan (tai käyttäen niiden tuttuja derivointisääntöjä), saadaan tästä

$$\oint_{\gamma} f dz = iR^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} = i\pi R^2 .$$

⁹Koska polku on suljettu, ei viivaintegraalin arvo riipu aloituskulman φ_0 arvon valinnasta; tässä valittiin $\varphi_0 = 0$. Tämän voi halutessaan nähdä jakamalla ympyränkaari kahdeksi käyräksi, joista toinen kiertää kulmat $0 \rightarrow \varphi_0$ ja toinen kulmat $\varphi_0 \rightarrow 2\pi$.

1.6 Cauchyn lause

1.6.1 Derivaattafunktion viivaintegraalit

Oletetaan aluksi, että $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ on käyrä alueessa Ω ja $F \in H(\Omega)$. Tällöin sen derivaatta $F' \in H(\Omega)$. Mitä osataan sanoa sen viivaintegraaleista $\int_{\gamma} F'(z) dz$?

Analyysin peruslauseen mukaan derivaatan integraali muuttuu sijoitukseksi, ja itse asiassa tässä käy myös niin. Eräs tapa nähdä tämä on lähteä liikkeelle juuri tuosta algebran peruslauseen tuloksesta reaalifunktiolle. Soveltamalla sitä erikseen reaali- ja imaginääriosalle saadaan siis

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt. \quad (1.16)$$

Tässä olevan derivaatan voi laskea yhdistetyn funktion derivointisäännöllä¹⁰

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t)) \gamma'(t).$$

Näin ollen kaavan (1.16) oikealle puolelle jää kompleksiarvoisen viivaintegraalin määritelmä, ja saatiin siis tulos

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \int_{\gamma} F'(z) dz.$$

Tämä tulos pätee myös, kun γ on polku, sillä jos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$, saadaan polun yli otetun integraalin määritelmästä

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F'(z) dz &= \sum_{j=1}^n [F(\gamma_j(b_j)) - F(\gamma_j(a_j))] \\ &= F(\gamma_n(b_n)) + \sum_{j=1}^{n-1} F(\gamma_{j+1}(a_{j+1})) - \sum_{j=2}^n F(\gamma_j(a_j)) - F(\gamma_1(a_1)) \\ &= F(\gamma_n(b_n)) - F(\gamma_1(a_1)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Näin ollen saatiin seuraava yleinen tulos.

Lause 1.32 Jos γ on polku, joka kulkee pisteestä z_0 pisteeseen z_1 alueessa Ω , niin kaikilla $F \in H(\Omega)$ pätee

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_{\gamma} F'(z) dz.$$

Erityisesti, jos polku γ on suljettu pätee

$$\oint_{\gamma} F'(z) dz = 0.$$

1.6.2 Cauchyn lause

Milloin edellisen kohdan tulos voidaan kääntää, eli jos $f \in H(\Omega)$ niin milloin sille löytyy integraalifunktio $F \in H(\Omega)$, jolle $f = F'$?

Aloitetaan tapauksesta, jossa löytyy $z_0 \in \Omega$ siten, että jokaista $z \in \Omega$ kohti jana $z_0 \rightarrow z$ sisältyy joukkoon Ω . Erityisesti tämä onnistuu aina kun Ω on avoin kiekko $B_{\varepsilon}(z_0)$. Tällöin voidaan käyttää

¹⁰(MAT) Huomautuksen 1.30 tapauksessa tämä nähdään suoraan tavallisista analyyttisten funktioiden derivointisäännöistä. Tuloksen voi kuitenkin helposti tarkistaa todeksi myös yleisille jatkuvasti derivoituville käyrille γ erotusosamäärää tarkastelemalla.

tätä janaa integrointipolkuna, eli kun $z \in \Omega$ valitaan integrointipoluksi $\gamma_z(t) := tz + (1-t)z_0$, $t \in [0, 1]$ ja määritellään

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(w)dw = \int_0^1 f(\gamma_z(t))(z - z_0)dt = (z - z_0) \int_0^1 f(tz + (1-t)z_0)dt.$$

Tarkistetaan, että näin saatu funktio $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ on derivoituva. Aloitetaan erotuksesta

$$\begin{aligned} F(z+h) - F(z) &= h \int_0^1 f(tz + (1-t)z_0 + th)dt \\ &\quad + (z - z_0) \int_0^1 [f(tz + (1-t)z_0 + th) - f(tz + (1-t)z_0)] dt. \end{aligned}$$

Koska $f \in H(\Omega)$, tästä seuraa, että

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(tz + (1-t)z_0)dt + (z - z_0) \int_0^1 tf'(tz + (1-t)z_0)dt.$$

Näin ollen myös uusi funktio $F \in H(\Omega)$. Sievennetään lopuksi sen derivaatan arvoa osittaisintegroimalla (eli huomaamalla, että $\frac{d}{dt}(tf(tz + (1-t)z_0)) = f(tz + (1-t)z_0) + t(z - z_0)f'(tz + (1-t)z_0)$), josta saadaan

$$F'(z) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tf(tz + (1-t)z_0))dt = \int_0^1 f(tz + (1-t)z_0)dt = f(z).$$

Tässä tapauksessa saatiin siis janapolun $z_0 \rightarrow z$ yli integroimalla rakennettua integraalifunktio $F \in H(\Omega)$, jolle $F' = f$. Yhdistämällä tämä edellisen osan tuloksiin, nähdään erityisesti, että $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ aina, kun γ on suljettu polku alueessa Ω .

Jos Ω on yleinen alue, voi yrittää lähteä yleistämään tätä konstruktiota aloittamalla jostain pisteestä $z_0 \in \Omega$ ja määrittelemällä ensin funktio F esimerkiksi sopivassa kiekossa $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$. Sen jälkeen voi valita uuden pisteen kiekon sisältä ja toistaa operaatio, mahdollisesti joissain isomassa kiekossa. Valitettavasti yleisestä tapausta ei voi enää jatkaa mielivaltaisesti, sillä voi käydä niin, että jossain vaiheessa uusi kiekko menee jonkin vanhan kiekon päälle, eikä niiden leikkauksen pisteen uusi arvo enää olekaan sama kuin mitä siihen pisteeseen oli aikaisemmin määritetty. (Näin käy esimerkiksi, kun logaritmia alkaa määrittelemään integroimalla analyyttistä funktiota $1/z$ alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.)

Osoittautuu, että kun alueelta Ω vaaditaan uusi geometrinen lisäominaisuus, niin tämä ongelma poistuu: *riittää olettaa, että alue Ω on yhdesti yhtenäinen.*

Määritelmä 1.33 *Kompleksitason alue on **yhdesti yhtenäinen**, jos jokainen alueessa kulkeva suljettu polku voidaan kutistaa alueen sisällä pysyen joksikin sen pisteeksi¹¹.*

Ekvivalentteja tapoja ajatella yhdesti yhtenäisyyttä:

- Kompleksitason alue on yhdesti yhtenäinen, jos sen sisällä ei ole ”reikiä”.
- Kompleksitason alue on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain jos mitkä tahansa kaksi sen polkua voidaan jatkuvasti muuntaa toisikseen pysyen alueen sisällä.

Esimerkki 1.34 Esimerkkejä yhdesti yhtenäisistä alueista:

- Koko kompleksitaso \mathbb{C} , kaikki puolitasot ja kaikki avoimet kiekot $B_\varepsilon(z_0)$.

¹¹(MAT) Tarkempi matemaattinen määritelmä kuuluu: Alue Ω on yhdesti yhtenäinen, jos jokaista jatkuvaa kuvausta $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$, jolla $\gamma(0) = \gamma(1)$, kohden löytyy piste $z_0 \in \Omega$ ja jatkuva kuvaus $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$, jolle $H(t, 0) = \gamma(t)$, $H(0, t) = H(1, t)$, $H(t, 1) = z_0$ kaikilla $t \in [0, 1]$.

- Kompleksitason ”nauhat”, kuten esimerkiksi $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$.
- Yleisemmin, kaikki tämän luvun alussa mainitun ehdon toteuttavat joukot Ω ovat yhdesti yhtenäisiä.
- Jos kompleksitasosta poistetaan suoran puolikas, jää jäljelle yhdesti yhtenäinen alue.
- Jos avoimesta kiekosta poistetaan jana, jonka lähtöpiste on kiekon sisällä ja päätepiste kiekon reunalla, jää jäljelle yhdesti yhtenäinen alue.

Esimerkki 1.35 Esimerkkejä alueista, jotka *eivät* ole yhdesti yhtenäisiä:

- Alue, josta on poistettu äärellinen määrä sen pisteitä.
- Kompleksitaso, josta on poistettu äärellinen jana.
- Avoin kiekko, josta on poistettu sen sisällä kulkeva jana.

Lause 1.36 (Cauchyn lause) Oletetaan, että Ω on yhdesti yhtenäinen alue, γ on suljettu polku Ω :ssa ja $f \in H(\Omega)$. Tällöin

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

(Lauseen todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [3, Theorem 13.11].) Lauseen seurauksina saadaan seuraavat kaksi tulosta:

Lause 1.37 Oletetaan, että Ω on yhdesti yhtenäinen alue ja $f \in H(\Omega)$.

1. Jos γ_1 ja γ_2 ovat joukossa Ω kulkevia polkuja, joilla on samat lähtö- ja päätepisteet, pätee

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

2. Löytyy integraalifunktio $F \in H(\Omega)$, jolla $F' = f$. Tällöin jokaisella alueessa Ω pisteestä z_0 lähtevällä ja pisteeseen z_1 päättyvällä polulla γ pätee

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Tuloksista ensimmäinen seuraa suoraan soveltamalla Cauchyn lausetta suljettuun polkuun $\gamma := \gamma_1 + \overleftarrow{\gamma_2}$. Toisessa tuloksessa on käytetty Lauseetta 1.32.

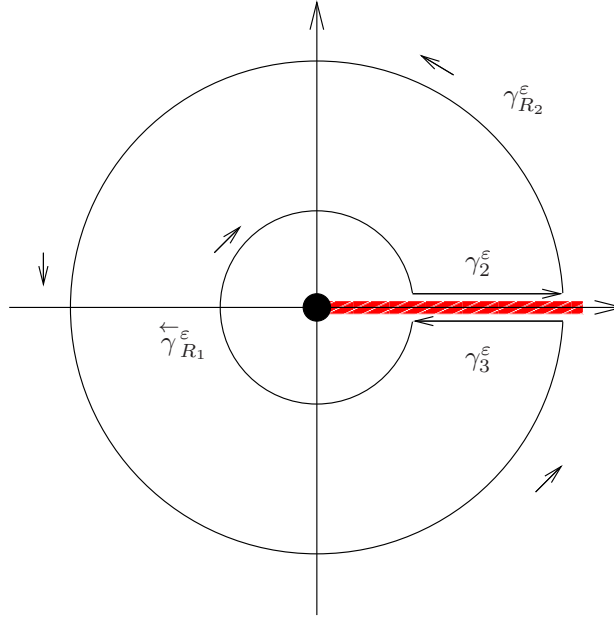
Cauchyn lausetta voi käyttää myös muokkaamaan integrointipolkua myös alueissa, jotka eivät ole yhdesti yhtenäisiä. Esimerkiksi alla nähdään tällä tavoin, että vaikka $\Omega_0 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ei olekaan yhdesti yhtenäinen, niin silti jokaisella $f \in H(\Omega_0)$ on integraalin

$$\oint_{\gamma_R} f(z) dz$$

arvo riippumaton säteestä $R > 0$, kun $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, on kerran origon ympäri kiertävä polku. Kuten myöhemmin nähdään, ei tässä voi suoraan käyttää Cauchyn lausetta ja voikin olla, että $\oint_{\gamma_R} f(z) dz \neq 0$. Esimerkki näyttää myös, että *polkuja muokatessa on tärkeää pitää huolta polkujen suunnistusten yhteensopivuudesta*.

Esimerkki 1.38 Näytetään, että yllä olevin oletuksin $\oint_{\gamma_{R_1}} f(z) dz = \oint_{\gamma_{R_2}} f(z) dz$ aina kun $R_2 > R_1 > 0$.

Ratkaisu: Tehdään alueesta Ω_0 yhdesti yhtenäinen poistamalla siitä positiivinen reaaliakseli (joka



Kuva 1.5: Esimerkkiin 1.38 liittyvä integrointipolku, jonka avulla pystyy muuttamaan integrointipolun γ_{R_1} poluksi γ_{R_2} yhdesti yhtenäisen alueen kautta kulkevan polun avulla. Tässä alkuperäisestä alueesta puuttui ainoastaan origo ja siitä on tehty yhdesti yhtenäinen poistamalla positiivinen reaaliakseli. Rajalla $\varepsilon \rightarrow 0$ kumoavat polkujen γ_2^ε ja γ_3^ε yli otetut integraalit toisensa.

vastaa suoran puolikasta), eli tutkitaan aluetta $\Omega_1 := \mathbb{C} \setminus [0, \infty[\subset \Omega_0$. Approksimoidaan käyriä γ_{R_1} ja γ_{R_2} tarkkuudella $\varepsilon > 0$ uusilla käyrillä $\gamma_{R_1}^\varepsilon$ ja $\gamma_{R_2}^\varepsilon$, jotka saadaan poistamalla pisteet, joiden etäisyys positiivisesta reaaliakselista on pienempi ε . Tämän jälkeen voidaan käyrien leikkauspisteet yhdistämällä rakentaa alueessa Ω_1 kulkeva suljettu polku γ^ε kuvassa 1.5 näytetyllä tavalla. Eli, jos γ_2^ε on jana, joka yhdistää leikkauspisteet reaaliakselin yläpuolella oikealta vasemmalle ja γ_3^ε on jana, joka yhdistää leikkauspisteet reaaliakselin alapuolella vasemmalta oikealle, on $\gamma^\varepsilon := \gamma_{R_2}^\varepsilon + \gamma_2^\varepsilon + \overleftarrow{\gamma_{R_1}^\varepsilon} + \gamma_3^\varepsilon$ alueen Ω_1 suljettu polku.

Koska $\Omega_1 \subset \Omega_0$ on yhdesti yhtenäinen ja $f \in H(\Omega_0)$, on myös $f \in H(\Omega_1)$, ja siten Cauchyn lauseen mukaan kaikilla riittävän pienillä $\varepsilon > 0$

$$0 = \oint_{\gamma^\varepsilon} f(z) dz = \int_{\gamma_{R_2}^\varepsilon} f(z) dz + \int_{\gamma_2^\varepsilon} f(z) dz - \int_{\gamma_{R_1}^\varepsilon} f(z) dz + \int_{\gamma_3^\varepsilon} f(z) dz.$$

Nyt kun $\varepsilon \rightarrow 0$, lähestyy γ_3^ε käänteispolkua $\overleftarrow{\gamma_2^\varepsilon}$ ja toisaalta, koska f on analyyttinen ja siten erityisesti jatkuva koko alueessa Ω_0 , kumoavat polkujen γ_2^ε ja γ_3^ε otetut integraalit toisensa rajalla $\varepsilon \rightarrow 0$. Näin ollen saadaan

$$\oint_{\gamma_{R_1}} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{R_1}^\varepsilon} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{R_2}^\varepsilon} f(z) dz = \oint_{\gamma_{R_2}} f(z) dz,$$

joka oli tarkoitus osoittaa.

Samaa ideaa voi soveltaa paljon monimukaisemmillekin alueille (esimerkkejä löytyy kirjoista ja hakukoneilla). Niissä kaikissa on ideana, että alueen reiät "leikataan auki" niistä reunalle kulkevilla janoilla, jolloin saadaan alue, joka on yhdesti yhtenäinen.

Esimerkki 1.39 Olkoon $a \in \mathbb{C}$ annettu.

1. Jos $n \in \mathbb{N}_0$, on $(z - a)^n$ polynomi, ja siten analyyttinen kaikkialla. Näin ollen Cauchyn lauseen perusteella pätee kaikilla kompleksitason suljetuilla poluilla γ

$$\oint_{\gamma} (z - a)^n dz = 0.$$

2. Jos $m \in \mathbb{N}$, on $f(z) = (z - a)^{-m}$ analyyttinen alueessa Ω_0 , joka ei ole yhdesti yhtenäinen, joten Cauchyn lausetta ei voi suoraan soveltaa. Huomataan kuitenkin, että aina kun $m > 1$ on funktion

$$F(z) := \frac{1}{1 - m} (z - a)^{-(m-1)}$$

derivaatta juuri f . Näin ollen Lauseen 1.32 perusteella pätee tällöinkin kaikille kompleksitason poluille γ , jotka eivät kulje pisteen a kautta,

$$\oint_{\gamma} (z - a)^{-m} dz = 0, \quad m > 1.$$

Kun valitaan $m = 1$ yllä olevassa esimerkissä, käykin yleensä niin, että integraalin arvo ei ole enää nolla. Tämän integraalin arvo eri a :n arvoilla antaakin mahdollisuuden mitata yhtä tason suljettujen polkujen γ tärkeää geometrista ominaisuutta, niiden kiertolukua.

Määritelmä 1.40 *Olkoon γ tason suljettu polku ja a jokin polkuun kuulumaton kompleksitason piste. Tällöin määritellään polun γ **kiertoluku** pisteen a suhteen integraalina*

$$\text{Ind}_{\gamma}(a) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz.$$

Kiertoluvulla (engl. *winding number*) on seuraavat ominaisuudet, joista osaa tutkitaan harjoitustehtävässä ja joiden todistus löytyy lähteestä [3, Theorem 10.10].

- *Kiertoluku on aina kokonaisluku.* Sen suuruus kertoo montako kertaa käyrä γ yhteensä kiertää pisteen a ympäri ja sen merkki kertoo kiertosuunnan (positiivinen kiertoluku tarkoittaa kiertoa vastapäivään, negatiivinen myötäpäivään).
- Kun kompleksitasosta poistetaan käyrän γ pisteet, jää jäljelle avoin joukko. Kiertoluku Ind_{γ} säilyy vakiona jokaisessa tämän avoimen joukon yhtenäisessä osajoukossa.
- Löytyy $R > 0$ siten, että käyrä γ sisältyy kokonaan avoimeen kiekkoon $B_R(0)$. Kiertoluku on nolla kaikilla tämän kiekon ulkopuolella olevilla pisteillä, eli jos $a \in \mathbb{C}$ ja $|a| \geq R$, on tällöin $\text{Ind}_{\gamma}(a) = 0$.
- Yhdistämällä kaksi aiempaa kohtaa nähdään, että *kiertoluku on nolla käyrän γ ulkopuolella*, eli käyrän γ kuvan komplementin rajoittamattomassa yhtenäisessä komponentissa.

(Lisä) Selitys sille, miksi integraali Ind_{γ} laskee juuri geometrista kiertolukua tulee logaritmfunktion käytöksestä. Tarkastellaan yhdesti yhtenäistä aluetta, joka saadaan poistamalla kompleksitasosta suoran puolikas, joka lähtee pisteestä a ja kulkee siitä negatiivisen reaaliakselin suuntaan, eli aluetta $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid z - a \notin]-\infty, 0]\}$. Tällöin $(z - a)^{-1} = F'(z)$, kun $F(z) := \overline{\ln}(z - a)$, $z \in \Omega$. Koska $F \in H(\Omega)$, voidaan Lausetta 1.32 käyttää kaikissa polun γ pätkissä, jotka sisältyvät alueeseen Ω . Kohdissa, joissa γ kulkee yli poistetun suoran, hyppää F arvon $\pm 2\pi i$ verran, jossa merkki riippuu siitä kuljetaanko suoran yli ylhäältä alas (+) vai toisin päin (-). Näin ollen integraali $\text{Ind}_{\gamma}(a)$ on summa näiden hyppyjen lukumäärästä, ottaen huomioon myös niiden suunta. Tämä vastaa juuri geometrisesti polun γ kiertolukua pisteen a ympäri.

Jos luottaa omaan visualisointikykyynsä, voi soveltaa myös yleistä versiota Esimerkin 1.38 polunmuokkaustuloksesta. Tässä tuloksessa on helpotuksena se ettei tarvitse miettiä onko alue Ω yhdesti yhtenäinen. Sen soveltamisessa pitää kuitenkin olla tarkkana alueen geometrian kanssa: *on täysin oleellista, että polkuja muokatessa ei poiketa ulos alueesta Ω .*

Lause 1.41 *Olko γ_1 ja γ_2 kaksi suljettua polkua, jotka voi jatkuvasti muuntaa toisikseen¹² alueen Ω sisällä. Tällöin:*

1. Aina kun $f \in H(\Omega)$,

$$\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz.$$

2. Aina kun $a \notin \Omega$, pätee kiertoluvuille

$$\text{Ind}_{\gamma_1}(a) = \text{Ind}_{\gamma_2}(a).$$

1.7 Cauchyn integraalikaavat

Määritelmä 1.42 *Kun $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ on kompleksitason polku, merkitään **polun kuvajoukkoa** "Ran γ " ("Ran" on lyhenne sanasta "range"). Jos Ω on jokin kompleksitason alue, on **polun komplementti** joukko " $\Omega \setminus \text{Ran } \gamma$ ", jota merkitään lyhyemmin " $\Omega \setminus \gamma$ ".*

Toisin sanoen "Ran γ " koostuu niistä kompleksitason pisteistä, joiden kautta polku γ kulkee, $\text{Ran } \gamma := \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}$. Sen komplementti joukon Ω suhteen, $\Omega \setminus \gamma$, koostuu niistä Ω :n pisteistä, joiden kautta polku ei kulje: $\Omega \setminus \gamma := \{z \in \Omega \mid z \neq \gamma(t), \text{ kaikilla } t \in [a, b]\}$.

Olkkoon Ω alue, $f \in H(\Omega)$ ja γ suljettu polku Ω :ssa. Valitaan tämän jälkeen jokin piste $z \in \Omega \setminus \gamma$, jota pidetään kiinnitettynä. Tällöin on $\Omega' = \Omega \setminus \{z\}$ myös alue ja koska poistettu piste z ei kuulu polkuun γ , on γ polku myös alueessa Ω' . Määritellään sitten erotusosamäärää muistuttava uusi funktio

$$g(\zeta) := \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, \quad \zeta \in \Omega'.$$

Koska tässä nimittäjän nollakohta, eli vakiopiste z , ei kuulu alueeseen Ω' , on rationaalifunktio g derivoituva: $g \in H(\Omega')$. Toisaalta, koska $z \notin \text{Ran } \gamma$, kuten edellisessä luvussa selitettiin, voidaan määritellä myös käyrän γ kiertoluku pisteen z ympäri integraalina

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i}.$$

Näin ollen

$$\oint_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) 2\pi i \text{Ind}_{\gamma}(z). \quad (1.17)$$

Tästä esityksestä on hyötyä, sillä usein käykin niin, että vaikka $\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \neq 0$, pätee funktiolle g kuitenkin $\oint_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = 0$. Tämän näkemiseksi oletetaan sitten lisäksi, että polku γ voidaan muuntaa *pysyen koko ajan alueen Ω' sisällä* poluksi γ^ε , joka kiertää ε -säteistä ympyränkehää pisteen z ympäri (Esimerkissä 1.38 näytettiin miten muunto onnistuisi, jos tarkoituksena olisi pelkästään pienentää ympyränkehää kulkevaa polkua). Tällöin Cauchyn lauseen seurauksena

¹²(MAT) Tarkemmin tässä pitää olettaa, että polut ovat Ω -homotooppisia: kun molemmat polut on parametrisoitu välille $[0, 1]$, löytyy jatkuva kuvaus $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$, jolle $H(t, 0) = \gamma_1(t)$, $H(0, s) = H(1, s)$, $H(t, 1) = \gamma_2(t)$ kaikilla $s, t \in [0, 1]$. Tällöin polut $\Gamma_s(t) := H(t, s)$ muodostavat yksiparametrisen perheen polkuja, joka "tekee" polusta $\Gamma_0 = \gamma_1$ polun $\Gamma_1 = \gamma_2$.

saadusta Lauseesta 1.41 seuraa, että $\oint_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = \oint_{\gamma^\varepsilon} g(\zeta) d\zeta$, sillä $g \in H(\Omega')$. Toisaalta, f on derivoituva pisteessä $z \in \Omega$, joten kun $\zeta \rightarrow z$ pätee

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \rightarrow f'(z).$$

Koska raja-arvo on olemassa, täytyy funktion g olla rajoitettu jossain z -keskisessä kiekossa, eli löytyy $M, \varepsilon_0 > 0$, joilla $|g(\zeta)| \leq M$ aina kun $|\zeta| \leq \varepsilon_0$. Näin ollen saadaan sivun 25 kohdan 2 estimaatista arvio

$$\left| \oint_{\gamma^\varepsilon} g(\zeta) d\zeta \right| \leq M|\gamma^\varepsilon|,$$

aina kun $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Koska polku γ^ε kiertää ε -säteistä ympyränkehää, on sen pituus verrannollinen säteeseen ε , ja pätee siis $|\gamma^\varepsilon| \rightarrow 0$ kun $\varepsilon \rightarrow 0$. Tästä seuraa, että myös $\left| \oint_{\gamma^\varepsilon} g(\zeta) d\zeta \right| \rightarrow 0$ kun $\varepsilon \rightarrow 0$, joten voidaan päätellä, että $\oint_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = 0$, kuten kappaleen alussa ennakoitiin.

Näin ollen aina kun yllä mainittu polun γ kutistaminen voidaan tehdä, seuraa kaavasta (1.17)

$$f(z) \cdot \text{Ind}_{\gamma}(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z 2\pi i}.$$

Tätä esitystä kutsutaan Cauchyn integraalikaavaksi. Kuten lähteessä [3, Lauseet 10.35 ja 13.11] todistetaan, onnistuu haluttu polun kutistaminen aina, jos Ω on yhdesti yhtenäinen alue. Saadaan siis seuraava tärkeä yleinen tulos.

Lause 1.43 (Cauchyn integraalikaava) Jos Ω on *yhdesti yhtenäinen alue*, γ on suljettu polku Ω :ssa ja $z \in \Omega \setminus \gamma$, niin kaikilla $f \in H(\Omega)$ pätee

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z 2\pi i}.$$

Tulosta käytetään usein valitsemalla polku γ siten, että se kiertää jonkin avoimen joukon Ω_0 ympäri kerran vastapäivään ja peittämällä polku γ jollain yhdesti yhtenäisellä alueella Ω . Jos tällöin $f \in H(\Omega)$, eli jos f on analyyttinen koko isommassa alueessa Ω , voidaan f :n arvot esittää kaikissa pienemmän joukon pisteissä $z \in \Omega_0$ integraalina

$$f(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z 2\pi i}.$$

Tällöin nimittäin oletusten mukaan kiertää polku γ kaikki pisteet $z \in \Omega_0$ kerran vastapäivään, joten niille kaikille pätee $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$. Jos kiertosuunta kulkeekin myötäpäivään, vaihtuu integraaliesityksessä merkki, sillä tällöin $\text{Ind}_{\gamma}(z) = -1$.

Tästä saadaan siis f :lle integraaliesitys joukkoon Ω_0 käyttäen kiinteää polkua γ . Vastaava integraaliesitys operaattoreille on yksi tärkeimmistä tekniikoista, jolla voidaan approksimoida monien kvanttimekaanisten systeemien ja stokastisten prosessien ratkaisuja ns. resolventtiesitystä käyttäen.

Esimerkki 1.44 Laske integraali

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta^2 - 4} \frac{d\zeta}{2\pi i},$$

kun γ kiertää vastapäivään jotain seuraavista ympyränkehistä

$$(a) \quad \partial B_1(2), \quad (b) \quad \partial B_1(-2), \quad (c) \quad \partial B_3(0). \quad (1.18)$$

Ratkaisu: Sovelletaan tässä Cauchyn integraalikaavaa, käyttäen identiteettiä $(\zeta - 2)(\zeta + 2) = \zeta^2 - 4$ ja siitä seuraavaa osamurtokehitelmää. Näin ollen kaikilla alueen $\Omega_0 := \mathbb{C} \setminus \{-2, 2\}$ pisteillä ζ pätee

$$\frac{1}{\zeta^2 - 4} = \frac{(\zeta + 2)^{-1}}{\zeta - 2} = \frac{(\zeta - 2)^{-1}}{\zeta + 2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\zeta - 2} - \frac{1}{\zeta + 2} \right].$$

Kohdan (a) polku kulkee yhdesti yhtenäisessä oikeassa puolitasossa $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, jossa osoittaja $f(\zeta) = (\zeta + 2)^{-1}$ on analyyttinen. Toisaalta polku kulkee kerran positiiviseen kiertosuuntaan pisteen $z = 2 \in \Omega \setminus \gamma$ ympäri, joten Cauchyn integraalikaavan mukaan tällöin $\oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta^2 - 4} \frac{d\zeta}{2\pi i} = f(2) = \frac{1}{4}$.

Kohdassa (b) voidaan vastaavasti valita $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$ ja $f(\zeta) = (\zeta - 2)^{-1}$, ja Cauchyn integraalikaava antaa $\oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta^2 - 4} \frac{d\zeta}{2\pi i} = f(-2) = -\frac{1}{4}$.

Kohdan (c) voi laskea esimerkiksi huomaamalla, että isompaa ympyränkaarta kulkevan polun voi muokata alueessa Ω_0 poluksi, joka on (a)- ja (b)-kohtien polkujen ketju, joten sen tulos on näiden osaintegraalien summa. Toinen vaihtoehto on käyttää osamurtokehitelmää, josta seuraa, että $\oint_{\gamma} \frac{1}{\zeta^2 - 4} \frac{d\zeta}{2\pi i} = (\operatorname{Ind}_{\gamma}(2) - \operatorname{Ind}_{\gamma}(-2))/4 = (1 - 1)/4 = 0$.

Esimerkki 1.45 Hieman monimutkaisempi esimerkki löytyy englanninkielisiltä Wikipedia-sivuilta (http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%27s_integral_formula) Siellä näytetään, miten Cauchyn integraalikaavan avulla voi laskea integraalin $\oint_{\gamma} g(\zeta) d\zeta$ arvon, kun $g(z) = \frac{z^2}{z^2 + 2z + 2}$ ja γ kiertää kerran ympyränkehää $\partial B_2(0)$.

Cauchyn integraalikaavan pystyy yleistämään myös integraaliesitykseksi analyyttisen funktion derivaatoille. Kuten aiemmin mainittiin, on analyyttisen funktion derivaatta aina analyyttinen. Tästä seuraa, että analyyttisellä funktiolla on olemassa kaikkien kertalukujen derivaatat ja alla oleva tulos kertoo, miten ne voi laskea alkuperäistä funktiota sopivasti integroimalla.

Seuraus 1.46 (Cauchyn integraalikaava derivaatoille) *Olkkoon Ω yhdesti yhtenäinen alue, $z \in \Omega$ ja γ polku Ω :ssa, joka kiertää kerran z :n ympäri positiiviseen kiertosuuntaan, eli vastapäivään. Tällöin kaikilla $f \in H(\Omega)$ ja $n \in \mathbb{N}$ pätee*

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Oletukset takaavat siis, että $\operatorname{Ind}_{\gamma}(z) = +1$ ja $z \notin \operatorname{Ran} \gamma$. Tulos pätee yleisemmillekin poluille γ , samoin oletuksien kuin alkuperäisessä Cauchyn integraalikaavassa: tällöin pitää muistaa lisätä kaavan vasemmalle puolelle kerroin ” $\operatorname{Ind}_{\gamma}(z)$ ”. Helppo muistisääntö derivaattojen esityskaavalle on, että *Cauchyn integraalikaavaa Lauseessa 1.43 saa derivoida mielivaltaisen monta kertaa integraalin sisältä*.”

(MAT) *Todistuksen idea.* Koska $\operatorname{Ran} \gamma$ on kompakti, löytyy aina $\varepsilon > 0$, jolle $|\gamma(t) - z| \geq \varepsilon$ kaikilla t ja $B_{\varepsilon}(z) \subset \Omega$. Jos siis $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$, on myös $\operatorname{Ind}_{\gamma}(z + h) = 1$ ja Cauchyn integraalikaavan mukaan

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{h} \oint_{\gamma} f(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right] \frac{d\zeta}{2\pi i} = \oint_{\gamma} f(\zeta) \frac{1}{h} \frac{\zeta - z - (\zeta - z - h)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} \frac{d\zeta}{2\pi i} \\ &= \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} \frac{d\zeta}{2\pi i} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \end{aligned}$$

joka määritelmän mukaan on sama kuin $f'(z)$. Kaava pätee siis kun $n = 1$. Loppuodistuksen voi tehdä esimerkiksi induktiolla samanlaista laskua käyttäen. Huomaa, että $(\zeta - z)^{n+1} - (\zeta - z - h)^{n+1} = (n+1)h(\zeta - z)^n + O(h^2)$.

Esimerkki 1.47 Laske polun $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, yli otettu integraali

$$\oint_{\gamma} \frac{z^3}{(z+1)^3} dz.$$

Ratkaisu: Polku γ kiertää ympyränkehää $\partial B_2(0)$ kerran vastapäivään, joten $\text{Ind}_{\gamma}(-1) = 1$, koska $|-1| < 2$ ja singulariteetti $z = -1$ on siis vastaavan avoimen kiekon sisällä. Sovelletaan tässä Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille valitsemalla siinä $n = 2$, $\Omega = \mathbb{C}$ ja $f(\zeta) = \zeta^3$, joka on derivoituva kaikkialla. Tästä saadaan

$$\oint_{\gamma} \frac{z^3}{(z+1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left. \frac{d^2}{dw^2} w^3 \right|_{w=-1} = -6\pi i.$$

(Tässä merkintä $\left. \frac{d^2}{dw^2} w^3 \right|_{w=-1}$ tarkoittaa derivaatan arvoa $f^{(2)}(-1)$.)

1.7.1 Liouvilven lause ja algebran peruslause

Tutustutaan seuraavaksi muutamaaan Cauchyn integraalikaavojen sovellukseen.

Lause 1.48 (Liouvilven lause) Jos $f \in H(\mathbb{C})$ on rajoitettu, se on vakiofunktio. Eli, jos $f \in H(\mathbb{C})$ ja löytyy $M > 0$, jolle $|f(z)| \leq M$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, niin löytyy $c_0 \in \mathbb{C}$, jolla $f(z) = c_0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

TODISTUS Kun $z \in \mathbb{C}$ ja $R > 0$, voidaan soveltaa Cauchyn kaavaa derivaatoille käyttäen polkua $\gamma(t) = z + Re^{it}$, jolle $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$. Saadaan siis

$$f'(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \frac{d\zeta}{2\pi i}.$$

Integraalin modulia voidaan estimoida kuten sivulla 25 muistaen oletus, että $|f|$ on rajoitettu,

$$|f'(z)| \leq \frac{|\gamma|}{2\pi} \frac{M}{R^2} = \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Näin ollen $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, josta seuraa, että $f(z) = f(0)$, eli f on vakiofunktio. (Koska $\Omega = \mathbb{C}$, Lausetta 1.32 voidaan soveltaa mille tahansa polulle γ_z , joka kulkee origosta pisteeseen z ja tällöin pätee $f(z) - f(0) = \int_{\gamma_z} f'(w) dw = 0$.) \square

Funktioita $f \in H(\mathbb{C})$ kutsutaan myös **kokonaisiksi funktioiksi** (engl. *entire function*). Liouvilven lauseesta seuraa, että jos kokonainen funktio ei ole vakio, täytyy sen olla rajoittamaton. Esimerkkejä ei-vakioista kokonaista funktioista ovat \exp , \cos ja \sin . Nämä kaikki ovat eksponentiaalisesti kasvavia kun lähestytään ääretöntä sopivasta kompleksitason suunnasta, esimerkiksi $|\exp(z)| = e^{\text{Re } z} \rightarrow \infty$ kun $\text{Re } z \rightarrow \infty$.

Liouvilven lauseen avulla voidaan todistaa myös algebran peruslause.

Lause 1.49 (Algebran peruslause) Olkoon P_n asteen n polynomi, $n \in \mathbb{N}$, eli

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0,$$

jossa $a_n \neq 0$. Tällöin löytyy n polynomin nollakohtaa $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$, joilla pätee

$$P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.19)$$

Tosin sanoen polynomit voi esittää kertoimien a_k sijaan käyttäen myös suurimman termin kerrointa a_n ja n :ää kompleksilukua, jotka ovat polynomin nollakohtia. Jokainen polynomin nollakohta löytyy esityksestä, mutta sama nollakohta voi olla siinä useita kertoja: nollakohdan esiintymiskertojen lukumäärää kutsutaan **nollakohdan kertaluvuksi**. Jos nollakohdan kertaluku on yksi, kutsutaan sitä **yksinkertaiseksi nollakohdaksi**. Huomaa, että algebran peruslauseesta seuraa, että n :n asteen polynomin nollakohtien kertalukujen summa on aina n . Saatu tuloesitys on hyödyllinen esimerkiksi, jos polynomi on rationaalifunktion nimittäjässä, niin kuin myöhemmin tullaan näkemään.

Esimerkki 1.50 Polynomilla z^n , $n \in \mathbb{N}$, on vain yksi nollakohta $z = 0$ ja sen kertaluku on n .

Esimerkki 1.51 Polynomilla $3z^3 - (3+6i)z^2 - (3-6i)z + 3 = 3(z-1)(z-i)^2$ on kaksi nollakohtaa: yksinkertainen nollakohta $z = 1$ ja toisen kertaluvun nollakohta $z = i$.

(Lisä) *Algebran peruslauseen todistus.* Osoitetaan ensin, että polynomilla P_n on ainakin yksi nollakohta. Tehdään vasta oletus, jolloin olisi $P_n(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Koska P_n on kokonainen funktio olisi tällöin myös rationaalifunktio $1/P_n$ kokonainen funktio. Toisaalta, koska kolmioepäyhtälön mukaan $|a_n z^n| - |P_n(z)| \leq |a_n z^n - P_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k$, nähdään että $|P_n(z)| \geq |a_n z^n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k \geq \frac{|a_n|}{2} R^n$ kaikilla $|z| \geq R$, kunhan R valitaan tarpeeksi suureksi. Koska $|P_n(z)|$ on jatkuva, täytyy sillä olla minimi joukossa $|z| \leq R$, joka ei siis voi olla nolla. Näin ollen $1/P_n$ on nyt rajoitettu kokonainen funktio. Liouvilven lauseen mukaan löytyy silloin $c_0 \in \mathbb{C}$, jolla $1/P_n(z) = c_0$, eli $c_0 \neq 0$ ja $P_n(z) = 1/c_0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Tämä ei kuitenkaan voi pitää paikkaansa, koska P_n on polynomi, jonka aste on vähintään yksi, eikä se siis voi olla vakiofunktio. Näin ollen täytyy löytyä vähintään yksi nollakohta z_n . Tämän jälkeen algebraa käyttäen nähdään, että löytyy polynomi $Q_{n-1}(z) = a_n z^{n-1} + \dots$, jolle $P_n(z) = (z - z_n)Q_{n-1}(z)$. Tulosta iteroimalla seuraa siis esitys (1.19).

1.7.2 Maksimiperiaate

Lause 1.52 (Maksimimoduliperiaate) *Olkoon Ω rajoitettu alue (eli se sisältyy johonkin kiekkoon) ja $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ on jatkuva, sekä analyyttinen jokaisessa Ω :n pisteessä. Tällöin $|f|$ saa maksiminsa reunalla $\partial\Omega$, eli löytyy $z_0 \in \partial\Omega$, jolla $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ kaikilla $z \in \bar{\Omega}$.*

Eli lyhyemmin, mutta vähän epätarkemmin: *analyyttisen funktion modulin maksimi löytyy aina sen määrittelyalueen reunalta.* Tulosta voi yleistää: ks. [3, Lauseet 10.24 ja 11.32]. Siitä seuraa myös vastaava minimiperiaate, jonka johto jätetään harjoitustehtäväksi.

Jos U on avoin ja $f \in H(U)$, voidaan tulosta soveltaa aina esimerkiksi suljetuissa kiekkoissa $D = \bar{B}_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \varepsilon\}$, kunhan vain pätee $D \subset U$: valitaan $\Omega = B_\varepsilon(z_0)$, jolloin $\bar{\Omega} = D$, $f|_D$ on jatkuva ja $f|_\Omega \in H(\Omega)$.

(Lisä) *Perustelu.* Jos $z_0 \in \Omega$ ja $r > 0$ on sellainen, että $\bar{B}_r(z_0) \subset \Omega$, voidaan soveltaa Cauchyn integraalikaavaa kaikilla $z \in B_r(z_0)$ käyttäen polkua $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, joka kulkee pisteen z ympäri kerran vastapäivään. Jos $N \in \mathbb{N}$, niin $f^N \in H(\Omega)$, koska $f \in H(\Omega)$. Näin ollen

$$f(z)^N = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)^N d\zeta}{\zeta - z} \frac{1}{2\pi i}, \quad \text{kaikilla } N \in \mathbb{N} \text{ ja } z \in B_r(z_0).$$

Arvioimalla integraalin modulia sivun 25 estimaatilla nähdään, että

$$|f(z)|^N = |f(z)^N| \leq \frac{|\gamma|}{2\pi} \max_{\zeta: |\zeta - z_0| = r} \frac{|f(\zeta)|^N}{|\zeta - z|} \leq r \cdot \frac{1}{\delta} \cdot M^N$$

jossa $M := \max_{\zeta: |\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$ ja $\delta := r - |z - z_0| > 0$ (jos $|\zeta - z_0| = r$, pätee kolmioepäyhtälön mukaan $|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z_0 - z| = \delta$). Näin ollen

$$|f(z)| \leq M \left(\frac{r}{\delta}\right)^{\frac{1}{N}} \rightarrow M, \quad \text{kun } N \rightarrow \infty.$$

Siispä $|f(z)| \leq M$ aina kun $|z - z_0| \leq r$, eli $|f|$ saavuttaa maksiminsa kiekon reunalla $\partial B_r(z_0)$.

Tätä tulosta soveltaen tai valitsemalla integrointipolkuja γ , jotka kulkevat yhä lähempää alueen reunaa $\partial\Omega$, nähdään f :n jatkuvuutta käyttäen, että

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial\Omega} |f(\zeta)|, \quad z \in \overline{\Omega}.$$

Koska $\partial\Omega$ on kompakti ja rajoittuma $|f| : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on myös jatkuva, saavuttaa $|f|$ maksiminsa jossain $\partial\Omega$:n pisteessä z_0 .

1.7.3 (Lisä) Moreran lause

Seuraavaa tulosta voi käyttää osoittamaan, että jokin (usein integraalin avulla) annettu funktio f on analyyttinen. Huomaa, että tässä versiossa ei lähtöjoukon Ω tarvitse edes olla yhtenäinen, joten se on kätevä, jos joukon Ω määritelmä on vähänkään monimutkaisempi.

Lause 1.53 (Moreran lause) *Olkoon Ω avoin joukko ja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva. Jos*

$$\oint_{\gamma(\Delta)} f(z) dz = 0,$$

aina kun $\Delta \subset \Omega$ on kolmio, joka sisältyy Ω :aan, ja $\gamma(\Delta)$ on sen reunaa pitkin kulkeva polku, niin f on analyyttinen Ω :ssa.

Todistuksen idea. Kun $z_0 \in \Omega$, voidaan valita kiekko $V := B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$. Kiekossa voidaan rakentaa $F \in H(V)$ käyttäen z_0 :sta lähtevien suorien yli integrointia kuten luvun 1.6.2 alussa tehtiin. Tällöin pätee $f(z) = F'(z)$ kun $z \in V$, joten f :n rajoittuma V :hen on analyyttisen funktion derivaatta ja siten tuo rajoittuma on analyyttinen alueessa V . Erityisesti siis on tällöin myös $f'(z_0)$ olemassa. Näin ollen $f \in H(\Omega)$. Lauseen tarkempi todistus löytyy viitteestä [3, Lause 10.17].

Luku 2

Sarjat ja analyysitys

2.1 Lukusarjat

Lukujono on numeroitu kokoelma kompleksilukuja $u_n \in \mathbb{C}$. Tässä joko $n \in \mathbb{N}$ tai $n = 1, 2, \dots, N$ jollain $N \in \mathbb{N}$. Ensimmäisessä tapauksessa lukujono on ääretön, toisessa tapauksessa se on äärellinen ja jonon pituus on N . Äärettömistä lukujonoista käytetään myös lyhennysmerkintöjä (u_1, u_2, \dots) tai $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ja äärellisistä vastaavasti (u_1, u_2, \dots, u_N) tai $(u_n)_{n=1}^N$. Jos on selvää mistä indeksijoukosta on kyse, niin jonoa merkitään yksikertaisuuden vuoksi joskus myös pelkästään (u_n) . Lukujono eroaa kompleksitason osajoukosta siinä, että jonossa voi sama luku toistua useaan otteeseen ja jonon luvut on ”järjestetty”. Ääretön **lukujono suppenee** kohti kompleksilukua $z \in \mathbb{C}$, jos $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - z| = 0$ ja tätä merkitään $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = z$.

Äärettömästä lukujonosta $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muodostetaan sitä vastaava **osasummien jono** $(s_N)_{N \in \mathbb{N}}$ kaavalla

$$s_N := \sum_{n=1}^N u_n.$$

Jos osasummien jono suppenee, sanotaan että lukujonosta $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muodostettu **sarja suppenee**, ja tällöin merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N u_n.$$

Suppenevia sarjoja käytetäänkin yleensä *apksimoimaan* jotain tuntematonta suuretta z , nimittäin suoraan määritelmästä seuraa, että $z \approx \sum_{n=1}^N u_n$ tarkkuudella $|z - \sum_{n=1}^N u_n|$, joka saadaan mielivaltaisen pieneksi ottamalla osasummaan tarpeeksi termejä, eli kasvattamalla N :ää. Tässä esiintyvää virhettä $z - \sum_{n=1}^N u_n$ kutsutaan sarjan **jäännöstermiksi** ja se on sama kuin jonon $(u_{N+1}, u_{N+2}, \dots)$ muodostama sarja $\sum_{n > N} u_n$.

Jos osasummien jonolla (s_N) ei ole raja-arvoa, sanotaan että **sarja** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **hajaantuu**. Erityisesti, jos jono (s_N) on *reaalinen* ja kasvaa rajatta, se hajaantuu. Tällöin siis $s_N \rightarrow \infty$, kun $N \rightarrow \infty$, ja tätä merkitään

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty,$$

vaikka myös tässä tapauksessa sarjan sanotaankin hajaantuvan.

2.1.1 Geometrinen summa ja sarja

Tärkeä erikoistapaus saadaan lukujonosta $(1, q, q^2, q^3, \dots)$, kun $q \in \mathbb{C}$ on annettu: tätä tapausta kutsutaan **geometriseksi sarjaksi**. Sarja on hyödyllinen, sillä sen osasummat s_N , $N \in \mathbb{N}$, voidaan

laskea helposti:

$$s_N := \sum_{n=0}^{N-1} q^n \Rightarrow (1-q)s_N = \sum_{n=0}^{N-1} q^n - \sum_{n=0}^{N-1} q^{n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} q^n - \sum_{j=1}^{N-1} q^j - q^N = 1 - q^N.$$

Näin ollen, jos $q \neq 1$, voidaan tulos jakaa puolittain $(1-q)$:lla, ja saadaan

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}, \quad q \neq 1. \quad (2.1)$$

Jos $q = 1$, on myös jokainen $q^n = 1$ summassa, joten tällöin $\sum_{n=0}^{N-1} q^n = N$.

Koska $|q^N| = |q|^N$, nähdään heti, että $|q^N| \rightarrow 0$ jos $|q| < 1$. Tällöin siis geometrinen sarja suppenee, ja saadaan tulos

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1. \quad (2.2)$$

Jos $|q| > 1$ on $|q^N| \rightarrow \infty$, joten sarja selvästi hajaantuu. Sama pätee itse asiassa myös $|q| = 1$, sillä tällöin jonon termeille pätee $|q^n| = 1$, joten $|q^n| \not\rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$ (seuraavassa luvussa nähdään, miksi tästä seuraa, että sarja hajaantuu). Esimerkiksi kun $q = 1$ saadaan $s_N = N \rightarrow \infty$, ja kun $q = -1$, saadaan $s_N = 1$, kun N on pariton, ja $s_N = 0$, kun N on parillinen. Tällainen vuorotteleva jono on kyllä rajoitettu, mutta se ei suppene kohti mitään kompleksilukua.

Kerätään nämä tulokset lauseeksi.

Lause 2.1 Geometrisen sarjan osasummille pätee

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^N}{1 - q}, & \text{kun } q \neq 1, \\ N, & \text{kun } q = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Geometrinen sarja suppenee jos ja vain jos $|q| < 1$, ja tällöin sen summa saadaan kaavasta

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1. \quad (2.4)$$

Esimerkki 2.2 Kun $N \in \mathbb{N}$ ja $x \in \mathbb{R}$, laske $\sum_{n=1}^N \sin(nx) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx$.

Ratkaisu: Sovelletaan geometrisen summan kaavaa. Tähän on monia tapoja, jotka kaikki tuottavat vähän erilaisen esityksen vastaukselle. Ehkä kaikkein siistein esitys saadaan tekemällä lasku seuraavasti: koska $x \in \mathbb{R}$, pätee Eulerin kaavan perusteella ja käyttäen tietoa $\sin 0 = 0$,

$$\sum_{n=1}^N \sin(nx) = \sum_{n=0}^N \sin(nx) = \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^N e^{inx} \right).$$

Jäljellä oleva summa voidaan laskea sijoittamalla $q = e^{ix}$ kaavaan (2.3). Jos $q = 1$, on $\sum_{n=0}^N e^{inx} = N + 1 \in \mathbb{R}$, joten $\sum_{n=1}^N \sin(nx) = 0$. Jos $q \neq 1$, saadaan

$$\sum_{n=0}^N e^{inx} = \sum_{n=0}^N (e^{ix})^n = \frac{1 - (e^{ix})^{N+1}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-ix/2}(1 - e^{ix(N+1)})}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} = e^{i\frac{Nx}{2}} \frac{-2i \sin((N+1)x/2)}{-2i \sin(x/2)}.$$

Tästä on helppo ottaa imaginääriosia käyttäen Eulerin kaavaa, sillä $x \in \mathbb{R}$, joten

$$\sum_{n=1}^N \sin(nx) = \begin{cases} \frac{\sin(Nx/2) \sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)}, & \text{kun } x \notin \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}, \\ 0, & \text{kun } x \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}. \end{cases}$$

2.1.2 Sarjojen perusominaisuuksia

Seuraavat sarjojen perusominaisuudet seuraavat suoraan määritelmistä ja raja-arvojen laskusäännöistä.

1. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} au_n = as$ kaikille vakioille $a \in \mathbb{C}$.
2. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ ja $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = t$, niin $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = s + t$.
3. Jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. (Sillä $u_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0$, kun $n \rightarrow \infty$.)
4. Jos jono (u_n) ei mene nollaan, kun $n \rightarrow \infty$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

Esimerkki 2.3 Kohtaa 2 voi käyttää myös jakamaan jokin annettu sarja kahteen osaan. Esimerkiksi, jos sekä parillisten että parittomien indeksien muodostamien osajonojen, $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ja $(u_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$, sarjat molemmat suppenevat, pätee

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n \text{ parillinen}} u_n + \sum_{n \text{ pariton}} u_n.$$

Kuten Esimerkissä 2.5 nähdään, voi ehdosta $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ tarkistaa vain sen hajaantuuko sarja, sillä siitä ei suoraan seuraa, että sarja suppenisi. Sarjojen suppenemisen tarkistaminen onkin työläämpää, sillä yleensä osasummille ei löydy mitään eksplisiittistä kaavaa, päinvastoin kuin geometriselle sarjalle kävi. Erilaisia suppenemistestejä käydään läpi tulevissa luvuissa, mutta seuraavasta yleisestä tuloksesta voi joskus olla apua.¹

Lause 2.4 (Cauchyn suppenemisperiaate) Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy raja-indeksi $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jonka jälkeen

$$|u_j + u_{j+1} + \cdots + u_k| < \varepsilon, \quad \text{kun } k \geq j > N_\varepsilon.$$

Tämän testin etu verrattuna suoraan jonon (s_N) suppenemisen todistamiseen on, että sitä varten ei tarvitse yrittää arvata mitä arvoa kohti jono suppenee.

Seuraavassa esimerkissä tarkastellaan jonoa $u_n = 1/n$, jolle selvästi pätee $u_n \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Havaitaan kuitenkin, että vastaava sarja hajaantuu, joten tästä saadaan esimerkki siitä, että yksinkertaisen ehdon $u_n \rightarrow 0$ tarkistaminen ei riitä osoittamaan sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenemistä.

Esimerkki 2.5 (Harmoninen sarja) Osoitetaan, että harmoniselle sarjalle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Ratkaisu: Koska jonon jokainen termi on positiivinen, niin selvästi osasummien $s_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ jono on kasvava. Tarkastellaan indeksien $N = 2^M$, $M \in \mathbb{N}$, muodostamaa osajonoa ja näytetään, että se kasvaa rajatta kun $M \rightarrow \infty$. Tästä seuraa suoraan, että myös $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \infty$, niin kuin tehtävässä pitää osoittaa.

¹(MAT) Cauchyn suppenemisperiaate on suora seuraus siitä, että osasummien jono (s_N) suppenee, jos ja vain jos se on Cauchy-jono, sillä kumoamalla yhteiset termit nähdään, että aina kun $k \geq i$, $s_k - s_i = u_{i+1} + u_{i+2} + \cdots + u_k$.

Kiinteällä M , jaotellaan osasumman termit uudelleen 2^m , $m = 0, 1, \dots, M$, mittaisiin pätkiin. Jokaisessa pätkässä voidaan käyttää alkuperäinen jonon väheneyttä. Näin saadaan tulos

$$\begin{aligned} s_{2^M} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \dots = 1 + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{2^m} \frac{1}{2^m + j} \\ &\geq \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=1}^{2^m} \frac{1}{2^m + 2^m} = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{2^m}{2 \times 2^m} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} 1 = \frac{M}{2} \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

kun $M \rightarrow \infty$. Näin ollen osajono (s_{2^M}) kasvaa rajatta.

2.1.3 Positiivitermiset sarjat

Jonon (u_n) muodostamaa sarjaa kutsutaan **positiivitermiseksi**, jos $u_n \geq 0$ kaikilla indekseillä n . Näillä sarjoilla on monia helpottavia ominaisuuksia, jotka eivät päde yleisesti sarjoille.

1. *Positiivitermisen sarjan osasumat muodostavat aina kasvavan jonon.*
2. *Positiiviterminen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ joko suppenee tai $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$.*
3. *Positiivitermisen sarjan termit voi aina järjestää uudelleen: Jos $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ on bijektio, pätee $\sum_{k=1}^{\infty} u_{p(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, myös silloin jos summa antaa äärettömän. (Numeroituville joukoille N bijektioita $p: N \rightarrow N$ kutsutaan myös *permutaatioiksi*.)*
4. *Iteroidussa positiivitermisessä sarjassa voi summausjärjestyksen aina vaihtaa:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k}.$$

Huomautus 2.6 Nämä tulokset ovat positiivitermisten sarjojen erikoisominaisuuksia, ja niitä ei voi ilman lisäehtoja käyttää suoraan reaalille sarjoille. Esimerkiksi, jos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ on reaalinen sarja, joka suppenee, mutta sen itseisarvojen sarja hajaantuu, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \infty$, löytyy jokaista reaalilukua $r \in \mathbb{R}$ kohti jokin permutaatio p , jolla $\sum_{n=1}^{\infty} u_{p(n)} = r$. (Lisätietoja löytää esim. Wikipediasta kohdasta *Riemann rearrangement theorem*.) Palataan tarvittaviin lisäehtoihin Luvussa 2.1.4.

Positiivitermisillä sarjoilla onkin yleensä helpompi tutkia sarjan suppenemista ja arvioida sarjan jäännöstermien suuruutta.

Määritelmä 2.7

- Jono (v_n) on jonon (u_n) **majorantti**, jos $v_n \geq u_n$ kaikilla n .
- Jono (v_n) on jonon (u_n) **minorantti**, jos $v_n \leq u_n$ kaikilla n .

Lause 2.8 (Vertailuperiaate) *Olkoot (u_n) ja (v_n) positiivitermisiä jonoja, joille löytyy sellainen vakio $C > 0$, että jono (Cv_n) on jonon (u_n) majorantti jostain indeksistä N_0 alkaen,*

$$u_n \leq Cv_n, \quad \text{kun } n \geq N_0.$$

1. *Jos majoranttisarja suppenee, eli $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$, suppenee myös sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, ja sen jäännöstermiä voidaan arvioida majoranttisarjan jäännöstermillä:*

$$0 \leq \sum_{n>N} u_n \leq C \sum_{n>N} v_n, \quad \text{kun } N \geq N_0.$$

2. Jos minoranttisarja hajaantuu, eli $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$, pätee myös $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \infty$.

TODISTUS Oletuksen mukaan pätee (u_n) :n osasummille seuraavat epäyhtälöt aina kun $N \geq N_0$

$$s_N := \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n < N_0} u_n + \sum_{n=N_0}^N u_n \leq \sum_{n < N_0} u_n + \sum_{n=N_0}^N C v_n = \sum_{n < N_0} u_n + C \sum_{n=N_0}^N v_n. \quad (2.5)$$

Näin ollen, jos $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty$, on jäännöstermi $\sum_{n > N} v_n$ aina positiivinen, sillä jokainen v_n oletettiin positiiviseksi. Siten kaavan (2.5) mukaan osasummille pätee $s_N \leq \sum_{n < N_0} u_n + C \sum_{n \geq N_0} v_n < \infty$, joten jono (s_N) on ylhäältä rajoitettu ja kasvava. Tällaiset reaaliulukujonot aina suppenevat. Kun $N \geq N_0$, pätee jäännöstermille

$$0 \leq \sum_{n > N} u_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^M u_n \leq C \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=N+1}^M v_n = C \sum_{n > N} v_n.$$

Näin ollen saatiin ensimmäinen vertailuperiaatetus todistettua.

Toista tulosta varten huomataan, että oletuksista seuraa, että

$$S_N := \sum_{n=1}^N v_n \geq \sum_{n=1}^{N_0-1} v_n + \frac{1}{C} \sum_{n=N_0}^N u_n,$$

jossa $\sum_{n=N_0}^N u_n \rightarrow \infty$ kun $N \rightarrow \infty$. Näin ollen osasummien jono (S_N) kasvaa rajatta, ja siis $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \infty$. □

Huomautus 2.9 Niin kuin yllä nähdään yleisestikin, että *äärellisen määrän termejä poistaminen jonosta (u_n) ei vaikuta sarjan $\sum_n u_n$ suppenemiseen*. Summan arvohan voi toki tästä poistamisesta muuttua.

Sarjasta voi lisäksi aina poistaa termit, joille $u_n = 0$, sillä tämä ei vaikuta osasummajonon suppenemiseen tai raja-arvoon (pois lukien triviaali tapaus, jossa $u_n = 0$ kaikilla n).

Soveltamalla vertailuperiaatetta geometrisen sarjan tunnettuihin suppenemisominaisuuksiin saadaan:

Lause 2.10 (Cauchyn testi) Oletetaan, että (u_n) on *positiiviterminen sarja*.

1. Jos löytyy $0 \leq q < 1$, jolla $(u_n)^{1/n} \leq q$ kaikilla n , sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee ja sen jäännöstermille pätee

$$0 \leq \sum_{n > N} u_n \leq \frac{q^{N+1}}{1-q}, \quad \text{kaikilla } N.$$

2. Jos $(u_n)^{1/n} \geq 1$ kaikilla n , on $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$.

TODISTUS Kohta 1: Ehdosta seuraa, että $0 \leq u_n \leq q^n$ kaikilla n ja Lauseen 2.1 mukaan majoranttisarja (q^n) suppenee, sillä $q < 1$. Vertailuperiaatteen mukaan tällöin $\sum_n u_n < \infty$ ja sen jäännöstermille pätee

$$\sum_{n > N} u_n \leq \sum_{n > N} q^n = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+N+1} = q^{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^{N+1}}{1-q}.$$

Kohta 2: Ehdosta seuraa erityisesti, että $u_n \geq 1$ kaikilla n , joten $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$.

Näin ollen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu. \square

Kuten kaikissa suppenemistesteissä, on Cauchyn testissäkin kyse lopulta pelkästään jonon (u_n) asympotoottisesta käyttäytymisestä kun $n \rightarrow \infty$. Sovelluksissa onkin usein helpompi tarkastella pelkästään jonon $(u_n^{1/n})$ raja-arvon käyttäytymistä, kuten Lauseessa 2.16 todistetaan. Usein raja-arvo ei kuitenkaan ole olemassa sellaisenaan ja testiä varten tarvitaan sen yleistystä, limes superioria, joka käydään läpi seuraavaksi.

Määritelmä 2.11 *Reaalilukujonon (u_n) supremum eli tarkka yläraja on pienin luvuista $M \in \mathbb{R}$, joilla $u_n \leq M$ kaikilla n . Tätä pienintä ylärajaa merkitään $\sup_n u_n$. Jos jonolla ei ole ainoatakaan ylärajaa M , merkitään $\sup_n u_n = \infty$.*

Esimerkki 2.12 Jonojen $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ ja $(1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ supremum 1. Jos $u_n := 1 - 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, pätee myös $\sup_n u_n = 1$, sillä $u_n < 1$ aina, mutta $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$. Jonolle $(u_n) := (1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$, eli kun $u_n = (-1)^{n-1}n$, pätee $\sup_n u_n = \infty$.

Tarkastellaan edelleen jotain reaalilukujonoa (u_n) . Kun $N \in \mathbb{N}$, merkitään osajonon $(u_{n+N-1})_{n=1}^{\infty}$ tarkkaa ylärajaa $\bar{u}_N := \sup_{n \geq N} u_n$. Tällöin joko $\bar{u}_N = \infty$ kaikilla N tai jono (\bar{u}_N) on vähenevä, jolloin se joko suppenee tai vähenee rajatta. Jonolla (\bar{u}_N) on siis aina raja-arvo $\mu := \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{u}_N$ joka on ∞ ensimmäisessä tapauksessa ja jokin reaaliluku tai $-\infty$ toisessa tapauksessa.

Lause 2.13 *Kaikilla reaalilukujonoilla (u_n) voidaan määritellä jonon limes superior kaavalla*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{n \geq N} u_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Sillä on seuraavat ominaisuudet

1. Jos jono suppenee, pätee $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.
2. $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ jos ja vain jos löytyy osajono $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ joka kasvaa rajatta.
3. Reaaliluku $\mu \in \mathbb{R}$ on jonon (u_n) limes superior jos ja vain jos

(a) kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy jonon katkaisukohta N_ε , josta eteenpäin

$$u_n < \mu + \varepsilon, \quad n \geq N_\varepsilon,$$

(b) ja löytyy osajono $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ jossa $n_{k+1} > n_k$ ja $\lim_{k \rightarrow \infty} u_{n_k} = \mu$.

Limes superior antaa parhaan mahdollisen ylärajan sille, miten jono (u_n) käyttäytyy indeksin suurilla arvoilla. Syy miksi \limsup esiintyy usein matematiikassa onkin se, että useilla jonoilla ei ole olemassa lainkaan raja-arvoa, mutta niille löytyy aina limes superior.

Annetun jonon (u_n) \limsup löydetäänkin yleensä iteroimalla yllä olevan lauseen kohtia: ensin tarkistetaan, onko jonolla jokin raja-arvo ($\pm\infty$ käyvät tässä myös), ja jos se löytyy, niin tämä raja-arvo on sama kuin jonon \limsup . Jos raja-arvoa ei löydy, tarkistetaan seuraavaksi onko jono ylipäätään ylhäältä rajoitettu: jos epäilee ettei näin ole, voi asian todistaa etsimällä osajono, joka kasvaa rajatta. Muuten tiedetään, että limes superior on äärellinen. Etsitään se pudottamalla jonon alusta pois arvoja ja pyrkimällä löytämään jäljelle jäävästä osajonosta jokin arvo, joka mahdollisimman hyvin approksimoi sen pienintä ylärajaa. Tämän voi aina tehdä niin, että approksimaatioiden muodostama osajono on kasvava, joten sille löytyy raja-arvo μ . Viimeinen asia on tarkistaa, että raja-arvo μ varmasti toteuttaa myös ehdon (a) yllä.

Esimerkki 2.14

- Jonon $(u_n) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ alkio on selvästi rajoitettu luvulla 1 ja toisaalta sen parillisten indeksien muodostama osajono koostuu pelkästään luvuista 1, joten sen raja-arvokin on 1. Saadaan siis $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

- Samoin nähdään, että myös jonolle $(u_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$ on $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.
- Jonolle $(u_n) = (1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ on $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, joten $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.
- Jos $u_n = 1 + 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, on $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$, joten $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$. (Huomaa, että jono on vähenevä, joten tälle jonolle $\sup_n u_n = u_1 = 3/2 > 1 = \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$.)
- Jos $u_n = (-1)^{n-1}n$, $n \in \mathbb{N}$, pätee sen parittomille arvoille $u_{2k+1} = 2k + 1 \rightarrow \infty$ kun $k \rightarrow \infty$. Näin ollen $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$.

Seuraavan tapainen esimerkki voi tulla vastaan myöhemmin käsiteltävien Fourier-sarjojen arvoista.

Esimerkki 2.15 Olkoon $u_n = \frac{n^2}{n^2+1} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$. Laske $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n$ ja $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-u_n)$.

Ratkaisu: Koska \cos on 2π -periodinen, on jono $(\cos[(2\pi n)/3])$ 3-periodinen. Laskemalla kolme ensimmäistä arvoa saadaan tästä jonoksi $(-1/2, -1/2, 1, -1/2, -1/2, 1, \dots)$. Toisaalta $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$. Näin ollen ottamalla jonosta joka kolmas arvo aloittaen jonon kolmannelta alkiossa (eli osajono (u_{3k})) saadaan osajono, jonka raja-arvo on 1. Toisaalta $u_n < 1$ kaikilla n , joten tästä seuraa $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

Vastaavasti jonolle $(-u_n)$ pätee $u_n < 1/2$ ja sen osajono $(-u_{3k+1})$ suppenee kohti arvoa $1/2$. Näin ollen $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-u_n) = 1/2$.

Limes superioria tarvitaan tässä monisteessa lähinnä seuraavan lauseen ehtojen tarkistamiseen.

Lause 2.16 Olkoon (u_n) positiiviterminen jono ja $\mu := \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n}$.

1. Jos $\mu < 1$, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee ja löytyy $q < 1$ siten, että sarjan jäännöstermille pätee $0 \leq \sum_{n>N} u_n \leq \frac{q^{N+1}}{1-q}$ alkaen jostain indeksistä N_0 , eli kun $N \geq N_0$. Tällainen q löytyy ainakin väliltä $]\mu, \frac{1+\mu}{2}]$.
2. Jos $\mu > 1$, on $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$.
3. Jos $\mu = 1$, voi sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ joko supeta tai hajaantua.

Huomaa, että kun $\mu < 1$, suppenee sarja eksponentiaalisesti sillä jäännöstermin ylärajan voi kirjoittaa myös muodossa $e^{-\ln(1/q)N} q/(1-q)$, jossa $\ln(1/q) \geq \ln(2/(1+\mu)) > 0$. Kun $\mu \rightarrow 1$ menee tässä $\ln(1/q) \rightarrow 0$, sillä $q > \mu$. Näin ollen hidastuu ylärajan vähenemisvauhti nolliin kun $\mu \rightarrow 1$.

TODISTUS Kohta 1: Koska $\mu < 1 < \infty$ toteutuvat Lauseen 2.13 kohdan 3 ominaisuudet (a) ja (b). Kohtaa (a) voidaan soveltaa arvolla $\varepsilon := (1 - \mu)/2 > 0$, eli löytyy N_0 , jolla kaikilla $n \geq N_0$,

$$u_n^{1/n} < \mu + \varepsilon = \frac{2\mu + 1 - \mu}{2} = \frac{1 + \mu}{2} =: q.$$

Koska $\mu < 1$, on tässä $\mu < q < 1$ ja $(u_n)_{n \geq N_0}$ toteuttaa Cauchyn testin tällä q :n arvolla. Lauseesta 2.10 seuraa, että sarja $\sum_{n \geq N_0} u_n$ suppenee ja sen jäännöstermi toteuttaa yllä mainitun ehdon. Valitsemalla pienempiä ε :n arvoja voidaan myös q :n arvoa pienentää, mutta näille kaikille pätee aina $q > \mu$.

Kohta 2: Jos $1 < \mu < \infty$, löytyy Lauseen 2.13 kohdan 3 (b) mukaan osajono $v_k := u_{n_k}^{1/n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, jolle $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \mu$. Erityisesti siis jostain N_0 alkaen pätee $|v_k - \mu| < \varepsilon$, $k \geq N_0$, valinnalla $\varepsilon := (\mu - 1)/2 > 0$. Kun $k \geq N_0$ on siis $\mu - v_k < \varepsilon$, joten

$$v_k > \mu - \varepsilon = \frac{2\mu + 1 - \mu}{2} = \frac{1 + \mu}{2} > 1.$$

Näin ollen $u_{nk} = v_k^{nk} \geq 1$ kaikilla $k \geq N_0$, joten tämä osajono ei mene kohti nollaa. Jos $\mu = \infty$, löytyy osajono, joka ei ole rajoitettu, eikä siis mene kohti nollaa. Näin ollen molemmissa tapauksissa, $u_n \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$, joten sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

Kohta 3: Harjoitustehtävässä 5.7 on annettu sarja, jolle $\mu = 1$, mutta joka suppenee. Yllä nähtiin, että harmoninen sarja $u_n = 1/n$ hajaantuu, ja sille pätee $(u_n)^{1/n} = \exp(-\frac{\ln n}{n}) \rightarrow \exp(0) = 1$, joten sillekin on $\mu = 1$. \square

Cauchyn testiä helpokäyttöisempi, mutta epätarkempi, on seuraava tulos.

Lause 2.17 (d'Alembertin testi) *Olkoon $u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Jos löytyy $q < 1$, jolla indeksistä N_0 alkaen pätee $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq q$, kun $n \geq N_0$, niin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee ja jäännöstermille pätee*

$$\sum_{n \geq N} u_n \leq u_{N_0} \frac{q^{N-N_0}}{1-q}, \quad N \geq N_0.$$

Jos $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq 1$ jostain indeksistä alkaen, sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

TODISTUS Oletetaan ensin, että $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq q < 1$ kun $n \geq N_0$. Kun $N \geq N_0$ ja $k \in \mathbb{N}$ pätee siis

$$u_{N+k} \leq q u_{N+k-1} \leq q^2 u_{N+k-2} \leq \dots \leq q^k u_N.$$

Jonoon $(u_{N+k})_{k \in \mathbb{N}}$ voidaan siis soveltaa vertailuperiaatetta, ja saadaan

$$\sum_{n \geq N} u_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_{N+k} \leq u_N \sum_{k=0}^{\infty} q^k = u_N \frac{1}{1-q}.$$

Näin ollen sarja suppenee, ja jäännöstermin estimaatti seuraa sitten käyttämällä iteraatiota uudestaan muodossa $u_N \leq q^{N-N_0} u_{N_0}$.

Jos $\frac{u_n}{u_{n-1}} \geq 1$ aina kun $n \geq N_0$, seuraa tästä kaikille $k \in \mathbb{N}$

$$u_{N_0+k} \geq u_{N_0+k-1} \geq \dots \geq u_{N_0} > 0.$$

Näin ollen $u_n \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$, joten sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu. \square

Huomautus 2.18 Kuten Cauchyn testissä, voin tässäkin olevan ehdon tarkistaa käyttäen raja-arvoja: esim. jos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} < 1$ toteutuu sarjan suppenemisehto. D'Alembertin testin ja Cauchyn testin suppenemismvakiot ovat itse asiassa tässä tapauksessa samat, eli tällöin pätee $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{u_{n-1}}$.

Esimerkki 2.19 Millä muuttujan arvoilla $x > 0$ sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ suppenee?

Ratkaisu: Cauchyn testissä olevan juuren laskeminen tuntuu hankalalta, mutta d'Alembertin testin osamäärälle taas pätee, nyt kun $u_n := \frac{x^n}{n!} > 0$ ja olettaen, että $n \geq 1$,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{x^n (n-1)!}{x^{n-1} n!} = \frac{x}{n} \rightarrow 0,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Voidaan valita $N_0 \in \mathbb{N}$ joksikin luvuksi, jolle $N_0 \geq 2x$, ja tämän jälkeen $u_n/u_{n-1} \leq \frac{1}{2}$ kun $n \geq N_0$. Näin ollen d'Alembertin testin mukaan sarja suppenee kaikilla $x > 0$ ja suppeneminen on eksponentiaalisen nopeaa ainakin indekseille $n \geq 2x$.

Viimeinen tämän luvun testeistä on kätevä, jos sarjan termit saadaan jonkin helposti integroitavan vähenevän funktion avulla. Tällöin sarjan suppeneminen tai hajaantuminen nähdään suoraan vastaavan integraalin suppenemisestä.

Lause 2.20 (Cauchyn integraalitestesti) Oletetaan, että jono (u_n) määritellään positiivisen funktion $f : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ avulla käyttäen kaavaa $u_n := f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Jos f on **vähenevä** funktio, niin sarja $\sum_n u_n$ suppenee täsmälleen silloin kun

$$\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty.$$

Jos integraali suppenee, voidaan myös sarjan jäännöstermiä arvioida sen avulla: aina kun $N \in \mathbb{N}$,

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n>N} u_n \leq \int_N^{\infty} f(x) dx.$$

TODISTUS Kun $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in [n, n+1]$, saadaan funktion f oletetusta vähenemisestä

$$u_n = f(n) \geq f(x) \geq f(n+1) = u_{n+1}.$$

Nämä epäyhtälöt voidaan integroida² koko välin yli, josta seuraa

$$u_n \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq u_{n+1}.$$

Summataan tämä arvojen $n = N, N+1, \dots, N+M$ yli, josta saadaan epäyhtälöt

$$\sum_{n=N}^{N+M} u_n \geq \int_N^{N+M+1} f(x) dx \geq \sum_{k=N+1}^{N+M+1} u_k. \quad (2.6)$$

Jos $\int_1^{\infty} f(x) dx = \infty$, kasvaa keskimääräinen integraali rajatta kun $N = 1$ ja $M \rightarrow \infty$, joten tällöin $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$. Jos $\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$, saadaan toisesta epäyhtälöstä tulos

$$\sum_{n=N+1}^{N+M+1} u_n \leq \int_N^{N+M+1} f(x) dx \leq \int_N^{\infty} f(x) dx < \infty,$$

joten sarjan osasummien jono on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Näin ollen sillä on raja-arvo, ja siten sarja $\sum_n u_n$ suppenee. Jäännöstermille saadaan halutut rajat suoraan ottamalla $M \rightarrow \infty$ kaavassa (2.6). \square

Esimerkki 2.21 Millä reaaliluvuilla s Dirichlet'n sarja suppenee, eli seuraava funktio on äärellinen

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty?$$

Ratkaisu: Nyt $u_n = f(n)$ funktiolle $f(x) := x^{-s}$, $x \geq 1$. Jos $s \leq 0$, on tässä $n^{-s} \geq 1$, joten tällöin $u_n \not\rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$, joten sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hajaantuu.

Oletetaan tästä eteenpäin, että $s > 0$. Koska $f'(x) = -sx^{-s-1} < 0$, on funktio f vähenevä ja voidaan soveltaa Cauchyn integraalitestistä, Lausetta 2.20. Jos $s = 1$ ja $M > 1$, pätee

$$\int_1^M f(x) dx = \int_1^M \frac{1}{x} dx = \ln M \rightarrow \infty,$$

kun $M \rightarrow \infty$. Tällöin sarja siis hajaantuu.

²(MAT) Monotoniset funktiot ovat aina Borel-mitallisia, joten mitään muita oletuksia ei tarvita integraalin olemassaololle.

Kun $M > 1$ ja $s \neq 1$, pätee

$$\int_1^M f(x) dx = \int_1^M \frac{1}{1-s} x^{1-s} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{1-s} M^{1-s}.$$

Jos $s < 1$, on tässä potenssi $1-s > 0$, joten $M^{1-s} \rightarrow \infty$ kun $M \rightarrow \infty$. Cauchyn integraalitestin mukaan sarja tällöin hajaantuu. Jos $s > 1$, saadaan $M^{1-s} \rightarrow 0$ kun $M \rightarrow \infty$, joten sekä tämä integraali että sarja suppenevat. Suppenemismuhti ei kyllä ole päätä huimaava, jos $s \approx 1$, sillä jäännöstermille pätee

$$\frac{1}{s-1} \frac{1}{(N+1)^{s-1}} \leq \sum_{n>N} u_n \leq \frac{1}{s-1} \frac{1}{N^{s-1}}.$$

Vastaus: Sarja $\zeta(s)$ suppenee kun $s > 1$ ja hajaantuu kun $s \leq 1$.

Yllä olevan esimerkin tulos käsittelee kuuluisan *Riemannin zeta-funktion* määrittelyä sarjan avulla reaaliakselilla. Huomaa, että tämä tapaus kuuluu siihen luokkaan, jossa ” $\mu = 1 = q$ ” Cauchyn ja d’Alembertin testeissä, joten niiden avulla ei saa mitään tietoa tämän sarjan suppenemisestä. Zeta-funktion määrittelyä arvoilla $s < 1$ puhutaan lisää monisteen toisessa osassa, jossa käsitellään analyttistä jatkamista.

2.1.4 Kompleksilukusarjojen yleisiä ominaisuuksia

Itseisesti suppenevat sarjat

Määritelmä 2.22 Kompleksiarvoisen jonon (u_n) määräämä sarja on *itseisesti suppeneva*, jos sen moduli muodostama positiiviterminen sarja suppenee, eli

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty.$$

Yksi tärkeimpiä edellisistä positiivitermien sarjojen sovelluksista onkin yllä olevan itseisen suppenemisen tutkiminen.

Itseisesti suppenevat sarjat käyttäytyvät monessa mielessä hyvin samalla tavalla kuin positiivitermit sarjat. Alla olevaan lauseeseen on kerätty näistä tärkeimpiä yleistyksiä.

Lause 2.23 Olkoon jonon (u_n) määräämä sarja itseisesti suppeneva. Tällöin

1. Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ suppenee, ja sen jäännöstermille pätee arvio

$$\left| \sum_{n>N} u_n \right| \leq \sum_{n>N} |u_n|. \quad (2.7)$$

2. Sarjan termit voi järjestää uudelleen, eli jos p on permutaatio, pätee

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_{p(k)}.$$

Lisäksi, jos $(u_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$ on kokoelma kompleksilukuja, joille

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |u_{n,k}| < \infty,$$

suppenevat molemmat iteroidut sarjat kohti samaa kompleksilukua, eli on sallittua vaihtaa summausjärjestystä,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} u_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,k}.$$

TODISTUS Todistetaan tässä vain 1. kohta. Käytetään sitä varten kaksi kertaa Cauchyn suppenemisperiaatetta Lauseessa 2.4. Olkoon tätä varten $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Koska sarja $\sum_n |u_n|$ suppenee, löytyy Cauchyn suppenemisperiaatteen mukaisesti $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolle $\sum_{n=j}^k |u_n| < \varepsilon$ aina kun $k \geq j > N_\varepsilon$. Toisaalta kolmioepäyhtälöä iteroimalla nähdään, että kaikilla $k \geq j$

$$|u_j + u_{j+1} + \dots + u_k| \leq |u_j| + |u_{j+1}| + \dots + |u_k| = \sum_{n=j}^k |u_n|, \quad (2.8)$$

joka on pienempi kuin ε kun $k \geq j > N_\varepsilon$. Näin ollen myös sarja $\sum_n u_n$ toteuttaa suppenemisperiaatteen ehdon ja siis suppenee. Sijoittamalla epäyhtälöön (2.8) $j = N + 1$ ja ottamalla $k \rightarrow \infty$ saadaan myös haluttu arvio (2.7) jäännöstermille.

(MAT) Kohdan 2 todistus löytyy esimerkiksi Wikipediasta (*absolute convergence*). Kohta 3 on seuraus kohdasta 2, kun ensin käytetään bijektiota $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ tekemään kaksoissummasta yksinkertainen summa. Se seuraa myös Fubinin lauseesta sopivalle joukon \mathbb{N} mitalle sovellettuna (engl. *counting measure*). \square

Esimerkki 2.24 Dirichlet'n sarja suppenee itseisesti kaikilla $\operatorname{Re} s > 1$, sillä kun $x = \operatorname{Re} s > 1$ ja $y = \operatorname{Im} s$, on kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$n^{-s} = \exp(-(x + iy) \operatorname{Ln} n) = \exp(-x \operatorname{Ln} n) \exp(-iy \operatorname{Ln} n) = n^{-x} \exp(-iy \operatorname{Ln} n).$$

Koska tässä $\operatorname{Ln} n \in \mathbb{R}$, saadaan modulille $|n^{-s}| = n^{-x}$. Esimerkissä 2.21 todistettiin, että kun $x > 1$, suppenee sarja $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$, joten aina kun $\operatorname{Re} s > 1$ on Dirichlet'n sarja $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ itseisesti suppeneva.

Riemannin zeta-funktio voidaan näin ollen määritellä kaikille arvoille $\operatorname{Re} s > 1$ suppenevan Dirichlet'n sarjan avulla:

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Lisäksi jäännöstermin estimaatista saadaan myös epäyhtälö $|\zeta(s)| \leq \zeta(\operatorname{Re} s)$, kun $\operatorname{Re} s > 1$.

Vuorotteleva sarja

Määritelmä 2.25 Vuorotteleva sarja on reaalinen sarja, joka saadaan jonosta, jossa kahden peräkkäisen termin merkki vaihtuu. Kun oletetaan, että jonon ensimmäinen termi on positiivinen, on vuorotteleva sarja siis aina muotoa

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, \quad u_n \geq 0.$$

Huomautus 2.26 Sarjat, joiden ensimmäinen termi on negatiivinen voidaan myös käsitellä seuraavilla menetelmillä. Tätä varten riittää vaihtaa kaikkien sarjan termien merkit, eli kirjoittamalla sarja muodossa $-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$.

Lause 2.27 (Leibnizin testi) Jos (u_n) on positiiviterminen jono, joka vähenee monotonisesti kohti nollaa, suppenee siitä muodostettu vuorotteleva sarja $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ ja sarjan jäännöstermille pätee arvio

$$\left| \sum_{n \geq N} (-1)^{n-1} u_n \right| \leq u_N. \quad (2.9)$$

TODISTUS Oletuksista seuraa, että $u_n \geq 0$, $u_n \geq u_{n+1}$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Näin ollen voidaan osasummien termit ryhmitellä niin, että saadaan aikaiseksi termejä, joiden merkki on tiedossa: esimerkiksi parilliselle osasummalle pätee

$$s_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - u_{2k} \leq u_1.$$

Toisaalta $s_{2(k+1)} = s_{2k} + u_{2k+1} - u_{2k+2} \geq s_{2k}$, joten parillisten osasummien jono (s_{2k}) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu. Näin ollen sillä on raja-arvo $S := \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k}$. Parittomien osasummien jonolle pätee tällöin $s_{2k-1} = s_{2k} + u_{2k} \rightarrow S$, sillä oletusten mukaan $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Tästä seuraa, että $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$, eli sarja suppenee.

Jäännöstermiä varten huomataan, että

$$\sum_{n \geq 2k} (-1)^{n-1} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2k}^{2N+1} (-1)^{n-1} u_n = -u_{2k} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2k+1}^{2N+2} (-1)^{n-1} u_n,$$

jossa

$$\begin{aligned} \sum_{n=2k}^{2N+1} (-1)^{n-1} u_n &= \sum_{j=k}^N (-u_{2j} + u_{2j+1}) \leq 0, \\ \sum_{n=2k+1}^{2N+2} (-1)^{n-1} u_n &= \sum_{j=k}^N (u_{2j+1} - u_{2j+2}) \geq 0. \end{aligned}$$

Näin ollen,

$$-u_{2k} \leq \sum_{n \geq 2k} (-1)^{n-1} u_n \leq 0.$$

Samalla tavalla seuraa yhtälöistä ($k \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{n \geq 2k-1} (-1)^{n-1} u_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2k-1}^{2N} (-1)^{n-1} u_n = u_{2k-1} + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2k}^{2N+1} (-1)^{n-1} u_n,$$

estimaatit

$$0 \leq \sum_{n \geq 2k-1} (-1)^{n-1} u_n \leq u_{2k-1}.$$

Näin ollen jäännöstermin itseisarvolle pätee sekä parittomilla että parillisilla indekseillä estimaatti (2.9). \square

Esimerkki 2.28 Esimerkiksi jono $u_n = \frac{1}{n}$ toteuttaa Leibnizin testin ehdot. Näin ollen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

suppenee (logaritmin sarjaesitys muistaen huomataan, että raja on $\ln 2$). Jos sarjasta otetaan 99 ensimmäistä termiä, saadaan approksimaatio, jonka tarkkuus on $u_{100} = 0.01$, eli ei vielä kauhean suuri. (Cauchyn testissä näin huonoon tarkkuuteen päätäisiin arvolla $q \approx 0.955$.)

Tämä sarja tarjoaa siis myös esimerkin sarjasta, joka suppenee, muttei suppene itseisesti.

Cauchyn kertosaäntö

Lause 2.29 Oletetaan, että jonojen (u_n) ja (v_n) muodostamat sarja **suppenevat** ja ainakin toinen niistä **suppenee itseisesti**. Tällöin

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^k u_n v_{k-n+1} \right). \quad (2.10)$$

Alla käytetään seuraavaa yleistä **karakteristista funktiota**, joka on erittäin kätevä tämän tyyppisten summien ja integraalien muokkaamisessa.

$$\mathbb{1}_{\{P\}} := \begin{cases} 1, & \text{jos ehto } P \text{ on totta,} \\ 0, & \text{jos ehto } P \text{ ei ole totta.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Esimerkiksi, jos x on reaaliluku,

$$\mathbb{1}_{\{x>0\}} := \begin{cases} 1, & \text{jos } x > 0, \\ 0, & \text{jos } x \leq 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Huomaa, että tällöin $\mathbb{1}_{\{x>0\}} + \mathbb{1}_{\{x\leq 0\}} = 1$ riippumatta luvun x arvosta.

TODISTUS Lauseen todistus löytyy esimerkiksi Wikipediasta (engl. *Cauchy product* tai *Merten's theorem*). Todistuksen idean näkee muokkaamalla osasummien $S_N := \sum_{n=1}^N u_n$ ja $T_N := \sum_{m=1}^N v_m$ tuloa seuraavasti

$$S_N T_N = \sum_{n,m=1}^N u_n v_m = \sum_{n,m=1}^N u_n v_m (\mathbb{1}_{\{n+m \leq N+1\}} + \mathbb{1}_{\{n+m > N+1\}})$$

Muuttujanvaihdolla $k = m + n - 1$ nähdään, että tässä saatu ensimmäinen termi on

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^N u_n v_m \mathbb{1}_{\{n+m \leq N+1\}} &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=n}^{N+n-1} u_n v_{k-n+1} \mathbb{1}_{\{k \leq N\}} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=n}^N u_n v_{k-n+1} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N u_n v_{k-n+1} \mathbb{1}_{\{k \geq n\}} = \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^N u_n v_{k-n+1} \mathbb{1}_{\{n \leq k\}} = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{n=1}^k u_n v_{k-n+1} \right). \end{aligned}$$

Näin ollen se on halutun sarjan N :s osasumma. Todistuksen hankala osa onkin osoittaa, että oletuksista seuraa, että jäljelle jäävä termi $\sum_{n,m=1}^N u_n v_m \mathbb{1}_{\{n+m > N+1\}} \rightarrow 0$ kun $N \rightarrow \infty$. □

(Lisä) Abelin muunnos eli diskreetti osittaisintegraanti

Tutkitaan kahdesta jonosta (u_n) ja (v_n) niiden tulojonosta muodostettua summaa arvoilla $j \leq n < k$, eli äärellistä summaa $\sum_{n=j}^k u_n v_n$. Jos u_n on hitaasti muuttuva indeksin n funktiona, voidaan tämän summan arvon laskemista usein helpottaa **diskreetin osittaisintegraoinnin avulla**: Aina kun $j < k$ pätee

$$\sum_{n=j+1}^k u_n v_n = u_k V_k - u_j V_j + \sum_{n=j}^{k-1} (u_n - u_{n+1}) V_n, \quad (2.13)$$

jossa $V_n := \sum_{i=j}^n v_i$ vastaa ”integraalifunktiota” ja $u_n - u_{n+1} = -(Du)_n$, missä $(Du)_n = u_{n+1} - u_n$ on diskreetti derivaatta.

TODISTUS Uutta jonoa V_n käyttäen pätee $v_n = V_n - V_{n-1}$, jos $n \geq j$, kunhan määritellään $V_i = 0$ kun $i < n$. Näin ollen

$$\sum_{n=j}^k u_n v_n = \sum_{n=j}^k u_n (V_n - V_{n-1}) = \sum_{n=j}^k u_n V_n - \sum_{m=j-1}^{k-1} u_{m+1} V_m = u_k V_k + \sum_{n=j}^{k-1} (u_n - u_{n+1}) V_n.$$

Siirtämällä tässä termi $n = j$ yhtälön oikealle puolelle saadaan (2.13). □

Tätä tulosta soveltamalla saadaan testejä tällaisten tulojonon avulla muodostettujen sarjojen suppenemiselle: sen avulla voi johtaa **Dirichlet'n testin** ja **Abelin testin** suppenemiselle (ks. Wikipedia).

2.2 Funktiosarjat

Funktiosarja tarkoittaa sarjaa, jonka termit ovat parametrin x funktioita. Tarkemmin, jos E on jokin joukko (esimerkiksi \mathbb{C} :n tai \mathbb{R}^d :n osajoukko) ja $u_n : E \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, jono sen kompleksiarvoisia funktioita, määrittelevät ne funktiosarjan

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in E.$$

Jos sarja suppenee kaikilla $x \in E$, saadaan näin siis määriteltyä uusi funktio $S : E \rightarrow \mathbb{C}$.

Esimerkki 2.30 Kun valitaan $E := \mathbb{C}$ ja $u_n(z) := \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$, saadaan funktiosarja

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Kun $|z| = 0$, on $z = 0$, joten vain sarjan ensimmäinen termi on nolasta eroava ja $S(0) = 1$. Koska $|z^n| = |z|^n$, voidaan arvoilla $|z| > 0$ soveltaa Esimerkin 2.19 tulosta. Näin ollen $S(z)$ suppenee itseisesti jokaisella $z \in \mathbb{C}$ ja määrittelee siis funktion $S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Esimerkki 2.31 Valitaan $E := [0, 1]$ ja $u_1(x) := x$, $u_n(x) := x^{n-1}(x-1)$ kun $n \geq 2$. Kun $x \in [0, 1]$ on sarjan osasumma

$$s_N(x) := \sum_{n=1}^N u_n(x) = x + \sum_{n=2}^N x^n - \sum_{n=2}^N x^{n-1} = x^N.$$

Näin ollen, sarja suppenee kaikilla $x \in [0, 1]$, ja sen arvoksi saadaan

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

Huomataan, että vaikka jokainen funktiosta u_n ja s_N on jatkuva koko välillä, sarjan määrittelemä funktio ei ole jatkuva pisteessä $x = 1$. Samoin nähdään, että päätepisteessä ei saa vaihtaa raja-arvon ja äärettömän summan järjestystä:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = 0 \neq 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} u_n(x).$$

2.2.1 (Lisä) Funktiosarjan jatkuvuus, integrointi ja derivointi

Esimerkissä 2.31 nähtiin, että sarjoilla määritellyllä funktiolla ei välttämättä olekaan enää kaikkia ominaisuuksia mitä sen termeille ja osasummille pätee. Esimerkissä menetettiin termien jatkuvuus, ja sama voi tapahtua integroitavuudelle ja derivoitavuudelle. Alla on listattu suhteellisen helposti tarkistettavia ehtoja, joiden avulla voi varmistaa, että esimerkiksi raja-arvon oton järjestyksen voi vaihtaa. Nämä ehdot ovat *riittäviä* muttei välttämättömiä, eli vaihto-operaatio voi onnistua vaikkei lauseen ehto toteutuisikaan.

Ensimmäiset tulokset käsittelevät integrointia ja ovat hyvin samanlaisia kuin aiemmin summille annetut tulokset:

- (1) Jos $u_n(x) \geq 0$ kaikilla x , voi integroinnin ja summauksen järjestyksestä aina vaihtaa (myös jos tulos on ääretön)³

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x) dx.$$

³(MAT) Todistuksen löytää esim. lähteestä [3, Lause 1.27].

- (2) Jos (u_n) on jono kompleksiarvoisia funktioita, jotka ovat itseisesti integroituvia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |u_n(x)| dx < \infty,$$

voi integroinnin ja summauksen järjestystä vaihtaa⁴

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int u_n(x) dx \quad \in \mathbb{C}.$$

Raja-arvon ja derivoinnin vaihtamisesta varten on usein kätevä käyttää seuraavaa Weierstrassin majoranttitestiä.

Määritelmä 2.32 (Weierstrassin majoranttitesti eli M-testi)

Funktioista $u_n : E \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, koottu sarja (u_n) toteuttaa Weierstrassin **M-testin**, jos löytyy positiiviterminen jono (M_n) , jonka muodostama sarja suppenee, $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, ja joilla pätee

$$|u_n(x)| \leq M_n, \quad \text{kaikilla } n, x.$$

Testiä varten on siis löydettävä jotkin koko määrittelyjoukossa pätevät ylärajat funktioille, siten että näiden ylärajojen muodostama sarja suppenee. Alla olevat tulokset pätevät aina kun funktiojono (u_n) toteuttaa Weierstrassin M-testin.⁵

- (3) Sarja $S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ suppenee itseisesti kaikissa lähtöjoukon E pisteissä x ja määrittelee siten funktion $S : E \rightarrow \mathbb{C}$. Funktio S on rajoitettu ja pätee

$$|S(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

- (4) Raja-arvot voi ottaa termeittäin, eli jos $x_0 \in E$ ja raja-arvot $\lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x)$ ovat olemassa kaikilla n , niin pätee

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x).$$

- (5) Termien jatkuvuus periytyy sarjalle, eli jos jokainen u_n on jatkuva, niin myös sarja S on jatkuva funktio E :ssä.
- (6) Parametrin yli voi integroida termeittäin kunhan joukko E on rajoitettu (riittää itseasiassa, että $\int \mathbb{1}_{\{x \in E\}} dx < \infty$).

Sarjan derivoituvuuden tarkistaminen onkin vähän hankalampaa yleisessä tapauksessa. Tällä kurssilla olemme kuitenkin kiinnostuneita lähinnä kompleksiderivoituvuudesta eli analytytisuuden säilymisestä sarjoissa. Tätä varten riittääkin tarkistaa pelkästään, että Weierstrassin M-testi toteutuu kaikissa alueen Ω suljetuissa kiekkoissa eli riittää osoittaa, että jokaista $z_0 \in \Omega$ ja sellaista $\varepsilon > 0$, jolla $\overline{B}_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$, kohden löytyy jono (M_n) , jolle

$$|u_n(z)| \leq M_n, \quad \text{kun } |z - z_0| \leq \varepsilon, \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Tässä siis jono (M_n) voi myös muuttua, kun pistettä z_0 tai sädettä ε muutetaan. Erityisesti nämä ehdot tietysti toteutuvat, jos jono toteuttaa Weierstrassin M-testin koko alueessa Ω .

⁴(MAT) Todistuksen löytää esim. lähteestä [3, Lause 1.38].

⁵(MAT) Tulos (3) seuraa Lauseesta 2.23. Tulos (4) seuraa lähteen [3] Lausetta 1.34 soveltaen ja tulos (5) on taas tämän seuraus, käyttäen jatkuvuuden perusominaisuuksia. Tulos (6) seuraa soveltamalla aiempaa tulosta (2).

Lause 2.33 Olkoon Ω kompleksitason avoin joukko ja (u_n) jono sen analyyttisiä funktioita, eli $u_n \in H(\Omega)$ kaikilla n . Jos jono (u_n) toteuttaa Weierstrassin M-testin **kaikissa suljetuissa kiekkoissa** $D \subset \Omega$, määrittelee sarja $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ analyyttisen funktion joukossa Ω ja sen m :n kertaluvun derivaatalle pätee

$$S^{(m)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(m)}(z), \quad z \in \Omega. \quad (2.14)$$

TODISTUS Oletetaan, että $z_0 \in \Omega$. Koska Ω on avoin, löytyy jokin $\varepsilon > 0$, jolla avoin kiekko $B_{3\varepsilon}(z_0) \subset \Omega$ ja tällöin myös $D := \overline{B_{2\varepsilon}}(z_0) \subset \Omega$ ja $U := B_\varepsilon(z_0) \subset D \subset \Omega$. Koska $u_n \in H(\Omega)$, on se jatkuva, eli erityisesti jatkuva koko joukossa $D \subset \Omega$. Koska Weierstrassin M-testi oletettiin toteutuvaksi D :ssä, niin seuraa tästä kohdan (5) mukaan, että myös sarja $S(z)$ suppenee itseisesti kaikilla $z \in D$ ja sen määrittelemä funktio on jatkuva D :ssä. Näin ollen S on jatkuva myös alueessa $U \subset D$.

Olkoon γ mielivaltainen alueeseen U sisältyvän kolmion reunaa kiertävä polku, niin kuin Moreran lausetta (Lause 1.53) varten vaaditaan. Koska polun pituus on äärellinen ja Weierstrassin M-testi toteutuu polulla, voidaan tässä soveltaa kohdan (6) tulosta ja vaihtaa integrointijärjestys sarjan summan kanssa. Näin ollen

$$\oint_{\gamma} S(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_{\gamma} u_n(z) dz = 0,$$

Cauchyn lauseen mukaan, sillä jokainen u_n on analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa U , jossa polku γ kulkee. Voidaan siis soveltaa Moreran lausetta ja päätellä, että S on analyyttinen kiekossa U .

Erityisesti S on siis derivoituva pisteessä z_0 . Sovelletaan Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille polulla $\gamma_0(t) := z_0 + \frac{\varepsilon}{2} e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, joka kiertää kerran pisteen z_0 ympäri kiekossa U . Tästä seuraa kaikille $m \geq 1$

$$S^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{S(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m!}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz,$$

sillä integrandissa $\left| \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{m+1}} \right| \leq M_n (2/\varepsilon)^{m+1}$, jossa M_n on M-testin vakio kiekossa D , ja näin ollen myös tämä integrandissa olevan funktio toteuttaa M-testin oletukset. Tähän voidaan soveltaa Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille, sillä jokainen u_n on analyyttinen U :ssa, ja lopputuloksena on yhtälö (2.14). Huomaa, että koska z_0 oli tässä mielivaltainen ja erityisesti osoitettiin ($m = 1$), että $S'(z_0)$ on olemassa, seuraa tästä myös, että $S \in H(\Omega)$. \square

2.3 Potenssisarjat

Potenssisarja on funktiosarja, joka muodostetaan antamalla sen **kertoimet** kompleksilukujonona $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja sarjan **keskipiste** $z_0 \in \mathbb{C}$. Sarjan $(n + 1)$:n elementti on n :n asteen polynomi $u_n(z) := a_n(z - z_0)^n$, eli

$$S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots \quad (2.15)$$

Potenssisarja suppenee aina itseisesti pisteessä $z = z_0$ ja $S(z_0) = a_0$, sillä tällöin $u_n(z) = 0$ kun $n \geq 1$. Sillä ei tarvitse olla mitään muita pisteitä, joissa se suppenee, mutta kuten seuraavasta lauseesta käy ilmi, potenssisarjan suppenemisjoukko on suhteellisen yksinkertainen, sillä se koostuu tietyistä avoimesta kiekosta ja mahdollisesti osasta kiekon kehän pisteitä. Tämän kiekon sädettä kutsutaan potenssisarjan **suppenemissäteeksi**.

Lause 2.34 (Cauchyn–Hadamardin lause) Potenssisarjalle (2.15) löytyy aina suppenemissäde $R \in [0, \infty]$, jolla

1. $S(z)$ suppenee itseisesti kaikilla $|z - z_0| < R$,
2. $S(z)$ hajaantuu kaikilla $|z - z_0| > R$.

Suppenemissäteen voi aina ratkaista kaavasta

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad (2.16)$$

Huomautus 2.35

- Lause ei sano mitään siitä, mitä tapahtuu suppenemisalueen reunalla, eli kun $|z - z_0| = R$.
- Erikoistapauksessa $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \infty$ lauseesta saadaan siis suppenemissäteeksi $R = 0$, eli potenssisarja hajaantuu aina kun $z \neq z_0$.
- Toinen erikoistapaus on $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 0$, jolloin $R = \infty$. Tämä tarkoittaa sitä, että potenssisarja suppenee itseisesti kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

TODISTUS Todistetaan aluksi Abelin lause: Jos potenssisarja (2.15) suppenee jossain pisteessä $w \neq z_0$, niin se suppenee *itseisesti* jokaisella $z \in \mathbb{C}$, jolla $|z - z_0| < r := |w - z_0|$. Oletetaan siis, että w on tällainen piste, jolloin $r > 0$. Koska sarja $S(w)$ suppenee, täytyy erityisesti olla $a_n(w - z_0)^n \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$. Koska tämä kompleksilukujono suppenee, täytyy sen olla rajoitettu, eli löytyy $M > 0$, jolla $|a_n| r^n = |a_n(w - z_0)^n| \leq M$. Jos nyt z on kompleksiluku, jolle $|z - z_0| < r$, pätee vastaavalle potenssisarjan $S(z)$ termeille

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n| r^n \frac{|z - z_0|^n}{r^n} \leq M q^n,$$

jossa $q := |z - z_0|/r < 1$. Näin ollen vertailuperiaatteen (Lause 2.8) mukaan itseisarvojen muodostama sarja suppenee, joten sarja $S(z)$ suppenee itseisesti.

Sarjan $S(z)$ itseinen suppeneminen on helppo ratkaista Lausetta 2.16 käyttäen. Oletetaan, että $z \neq z_0$ ja merkitään $r := |z - z_0| > 0$. Potenssisarjan $S(z)$ termien itseisarvot muodostavat jonon (v_n) , jossa $v_n := |a_n(z - z_0)^n| = |a_n| r^n$, ja näin ollen $v_n^{1/n} = r |a_n|^{1/n}$. Tästä seuraa, että $\limsup_{n \rightarrow \infty} v_n^{1/n} = r \nu$, kun $\nu := \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$. Lauseen 2.16 mukaan $S(z)$ siis suppenee itseisesti, jos $r \nu < 1$, ja se ei suppene itseisesti, jos $r \nu > 1$.

Oletetaan ensin, että $0 < \nu < \infty$ ja määritellään $R := 1/\nu > 0$. Jos nyt $r < R$, pätee $r \nu = r/R < 1$, joten $S(z)$ suppenee itseisesti. Jos taas $r > R$, täytyy sarjan $S(z)$ hajaantua, sillä muuten sarjan $S(w)$ pitäisi Abelin lauseen perusteella supeta itseisesti kaikissa pisteissä w , joilla $R < |w - z_0| < r$, jolloin kuitenkin $|w - z_0| \nu = |w - z_0|/R > 1$.

Jos $\nu = \infty$ on myös $r \nu = \infty$, joten $S(z)$ suppenee itseisesti vain kun $z = z_0$. Tällöin ei $S(z)$ voi supeta millään $z \neq z_0$, koska muuten seuraa ristiriita Abelin lauseen kanssa. Näin ollen, voidaan valita $R = 0$.

Jos $\nu = 0$, on aina myös $r \nu = 0$. Näin ollen $S(z)$ suppenee itseisesti kaikilla $z \in \mathbb{C}$, ja voidaan valita $R = \infty$. \square

Esimerkki 2.36 Esimerkissä 2.30 nähtiin, että kun $z_0 = 0$ ja $a_n = 1/(n!)$ vastaava potenssisarja suppenee kaikkialla. Näin ollen sen suppenemissäteen täytyy olla $R = \infty$, eli tästä saadaan kiertotietä laskettua $\limsup_{n \rightarrow \infty} (n!)^{-1/n} = 0$.

Esimerkki 2.37 Mikä on suurin kompleksitason avoin kiekko, jonka pisteissä z potenssisarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-i)^n$ suppenee itseisesti?

Ratkaisu: Nyt $z_0 = i$, $a_0 = 0$ ja $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, kun $n \geq 1$, joten

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = n^{-1/n} = e^{-\ln n/n} \rightarrow e^0 = 1,$$

kun $n \rightarrow \infty$. Koska raja-arvo on olemassa, saadaan tästä suoraan suppenemissäteelle R tulos $1/R = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, eli $R = 1$. Cauchyn–Hadamardin lauseen mukaan annettu potenssisarja suppenee itseisesti avoimessa kiekossa $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-i| < 1\} = B_1(i)$ ja mahdollisesti joissain sen reunan pisteissä. Näin ollen haluttu suurin avoin kiekko on U .

Esimerkki 2.38 Laske potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} [2(-1)^n - 1]^n (z+1)^n$ suppenemissäde.

Ratkaisu: Tässä riittää tutkia kertoimia $a_n = [2(-1)^n - 1]^n$, joille

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = |2(-1)^n - 1| = \begin{cases} 1, & \text{kun } n \text{ parillinen,} \\ 3, & \text{kun } n \text{ pariton.} \end{cases}$$

Näiden muodostamalla jonolla on yläraja 3, jota kohti parittomien indeksien muodostama osajono suppenee, joten saadaan $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 3$. Näin ollen sarjan suppenemissäde on $R = \frac{1}{3}$.

Osoitetaan seuraavaksi, että **potenssisarjoja saa aina derivoida ja integroida termeittäin suppenemissäteen sisällä**.

Lause 2.39 Oletetaan, että potenssisarjan (2.15) suppenemissäde $R > 0$. Olkoon $\Omega := B_R(z_0)$ suppenemissäteen sisälle jäävä avoin kiekko, jos $R < \infty$, tai $\Omega = \mathbb{C}$, jos $R = \infty$.

1. Sarjan määrittelemä funktio on analyyttinen eli $S \in H(\Omega)$ ja pisteessä $z \in \Omega$ pätee kaikilla $m \in \mathbb{N}$ vastaavalle derivaatalle potenssisarjaesitys

$$S^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{n!}{(n-m)!} (z-z_0)^{n-m}, \quad z \in \Omega. \quad (2.17)$$

2. Jos γ on pisteestä z_1 pisteeseen z_2 kulkeva polku alueessa Ω , pätee

$$\int_{\gamma} S(z) dz = F(z_2) - F(z_1), \quad (2.18)$$

jossa integraalifunktio F voidaan myös esittää potenssisarjana,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}, \quad z \in \Omega. \quad (2.19)$$

TODISTUS Olkoon $D \subset \Omega$ jokin suljettu kiekko. Tällöin löytyy säde $r > 0$, jolla $r < R$ ja $D \subset \overline{B}_r(z_0)$. Näin ollen kaikissa kiekon pisteissä $z \in D$ pätee $|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n|r^n$, ja Cauchyn–Hadamardin lauseen mukaan $\sum_n |a_n|r^n < \infty$, koska $r < R$. Näin ollen $M_n := |a_n|r^n$ muodostaa jonon, jolle S toteuttaa Weierstrassin M-testin kiekossa D . Voidaan siis soveltaa Lausetta 2.33 ja päätellä, että $S \in H(\Omega)$. Lisäksi voidaan S :n derivaatat laskea sarjasta, joka muodostetaan derivoimalla m kertaa polynomeja $a_n(z-z_0)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Tämä derivaatta on helppo laskea (ja tuloksen voi myös halutessaan tarkistaa oikeaksi induktiolla)

$$\frac{d^m}{dz^m} (z-z_0)^n = \begin{cases} 0, & \text{kun } n < m, \\ n(n-1)\cdots(n-m+1)(z-z_0)^{n-m}, & \text{kun } n \geq m. \end{cases}$$

Näin ollen kaava (2.17) pätee.

Kaavan (2.19) potenssisarjalle pätee $\limsup_{n \rightarrow \infty} (|a_{n-1}|/n)^{1/n} = 1/R$, joten sen suppenemissäde on sama kuin alkuperäisen sarjan. Näin ollen voidaan soveltaa ensimmäisen kohdan tulosta ja havaitaan, että $F' = S$. Näin ollen (2.18) seuraa suoraan Lauseesta 1.32. \square

2.4 Taylorin sarja

Jos yleiselle potenssisarjan (2.15) suppenemissäde $R > 0$, niin Lauseen 2.39 mukaan se on analyyttinen suppenemissäteen sisällä ja erityisesti saadaan sen derivaattojen sarjaesityksestä (2.17) laskettua kaikki derivaatat kehityspisteessä: $S^{(m)}(z_0) = a_m m!$, sillä vakiotermitä lukuun ottamatta ovat kaikki muut sarjan termit nollia. Koska lisäksi $a_0 = S(z_0)$, pätee potenssisarjan määrittelemälle funktiolle aina kaava

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Tätä kaavaa kutsutaan analyyttisen funktion S esitykseksi **Taylorin sarjan** avulla pisteessä z_0 . Tämä tulos myös osoittaa, että kaksi eri kerroinjonoa (a_n) ja (b_n) saavat aina aikaan eri funktiot, jos potenssisarjoilla on sama keskipiste eikä kummankaan jonon suppenemissäde ole nolla. (Oletetaan, että löytyy jokin m , jolla $a_m \neq b_m$, ja että sarjojen suppenemissäteet toteuttavat $R_1 \geq R_2 > 0$. Tällöin $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ja $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ ovat molemmat määritelty arvoille $|z - z_0| < \varepsilon$, kun $\varepsilon \leq R_2$, mutta koska $F^{(m)}(z_0) = a_m m! \neq b_m m! = G^{(m)}(z_0)$, on $F \neq G$ tässä ε -säteisessä kiekossa.)

Osoitetaan seuraavaksi, että myös käänteinen tulos pätee. Yhdistämällä tämä edelliseen havaintoon nähdään, että *analyyttisellä funktiolla on olemassa jokaisessa määrittelyalueensa pisteessä täsmälleen yksi potenssisarjaesitys ja tämä esitys on Taylorin sarjan antama.*

Lause 2.40 *Olkkoon Ω avoin joukko ja $f \in H(\Omega)$. Jos $z_0 \in \Omega$ ja $r > 0$ on mikä tahansa säde, jolla avoin kiekko $B_r(z_0)$ sisältyy joukkoon Ω , suppenee funktion f Taylorin sarja itseisesti jokaisessa kiekon pisteessä ja pätee*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \text{kun } |z - z_0| < r. \quad (2.20)$$

TODISTUS Merkitään avointa kiekkoa $U := B_r(z_0)$ ja oletetaan, että $z \in B_r(z_0)$. Koska $|z - z_0| < r$, löytyy säde r_0 , jolle $|z - z_0| < r_0 < r$. Tällöin kiertää käyrä $\gamma(t) := z_0 + r_0 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, kerran positiiviseen suuntaan pisteen z ympäri yhdesti yhtenäisessä alueessa U . Koska f on analyyttinen U :ssa, voidaan tässä siis soveltaa Cauchyn integraalikaavaa, Lausetta 1.43, ja pätee siis

$$f(z) = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i}.$$

Integrandissa oleva funktio voidaan esittää geometrisenä sarjana seuraavasti: kaikilla $\zeta = \gamma(t)$ on $|\zeta - z_0| = r_0 > |z - z_0|$, joten kun $q = (z - z_0)/(\zeta - z_0)$, on $|q| < 1$ ja

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

jossa oleva geometrinen sarja suppenee itseisesti ja sen termeillä on majorantti $M_n = (|z - z_0|/r_0)^n / r_0$, jolle $\sum_n M_n < \infty$. Koska myös funktiolla $|f(\zeta)|$ on maksimi integrointireitillä, Weierstrassin M-testi toteutuu ja voidaan vaihtaa summan ja integroinnin

järjestystä. Lopputuloksena on itseisesti suppeneva sarja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1} 2\pi i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n,$$

jossa viimeisessä vaiheessa on sovellettu Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille. \square

Huomautus 2.41 Pisteen $z_0 = 0$ ympäristössä kehitettyä Taylorin sarjaa kutsutaan myös **Maclaurinin sarjaksi**.

Esimerkki 2.42 Kuten aiemmin nähtiin, on eksponenttifunktio $f(z) = e^z$ kokonainen ja $f' = f$. Erityisesti siis $f^{(n)}(0) = 1$ kaikilla $n \geq 0$, joten eksponenttifunktion Maclaurinin sarja on

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

ja se suppenee kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Näin ollen Esimerkin 2.30 potenssisarjan määrittelemä funktio on sama kuin Luvussa 1.3.2 kosinin ja sinin avulla määritelty eksponenttifunktio.

Taylorin sarjan laskeminen suoraan annettua funktiota derivoimalla on yleensä työläästä. Usein työtä voi helpottaa jakamalla funktio osiin, joiden sarjat tunnetaan. Alla on tästä muutamia esimerkkejä.

Esimerkki 2.43 Eksponenttifunktion sarjaesityksestä nähdään nyt helposti, että monet muutkin reaalfunktioista tutut sarjaesitykset yleistyvät kompleksitasoon. Esimerkiksi, kaikilla $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) \frac{i^n}{n!} z^n = \sum_{n \text{ parillinen}} \frac{i^n}{n!} z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Esimerkki 2.44 Kehitä funktio $f(z) = \frac{1}{1-z}$ Taylorin sarjaksi pisteen $z_0 = -2$ ympäristössä. *Ratkaisu:* Tarkoitus on löytää esitys muuttujan $w = z - z_0 = z + 2$ potenssisarjana. Koska

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{3-w} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{w}{3}},$$

Aina, kun $|w| < 3$, voidaan viimeinen termi esittää geometrisen sarjan summana, josta saadaan

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} (z-z_0)^n.$$

Potenssisarjaesityksen yksikäsitteisyyden vuoksi täytyy tämän sarjan olla myös haluttu Taylorin sarja, ja siten esimerkiksi $f^{(n)}(-2) = n!3^{-n-1}$ kaikilla n .

Esimerkki 2.45 Kehitä Maclaurinin sarjaksi funktio

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 19}{(z-3)^2(2z+5)}.$$

Ratkaisu: Hajotetaan funktio aluksi osamurtokehitelmäksi

$$\frac{z^2 - 2z + 19}{(z-3)^2(2z+5)} = \frac{1}{2z+5} + \frac{2}{(z-3)^2}.$$

Tässä ensimmäinen termi voidaan suoraan kehittää geometriseksi sarjaksi

$$\frac{1}{2z+5} = \frac{1}{5} \frac{1}{1 - (-\frac{2}{5}z)} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n z^n,$$

aina kun $|z| < 5/2$. Edellisen esimerkin laskusta saadaan suoraan

$$\frac{1}{z-3} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} z^n,$$

kun $|z| < 3$. Tätä potenssisarjaa saa derivoida suppenemissäteensä sisällä termeittäin, joten

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{(z-3)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n+1}} z^{n-1}.$$

Tästä seuraa, että aina kun $|z| < 3$ pätee

$$\frac{2}{(z-3)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+1)}{3^{k+2}} z^k.$$

Yhdistämällä tulokset saadaan f :lle potenssisarjaesitys

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-2)^n}{5^{n+1}} + \frac{2(n+1)}{3^{n+2}} \right) z^n,$$

joka suppenee ainakin kun $|z| < \min(5/2, 3) = 5/2$. Itse asiassa tämän täytyy myös olla sarjan suppenemissäde: jos säde olisi suurempi kuin $5/2$, olisi sen määrittelemä funktio analyttinen erityisesti pisteessä $z = -5/2$, mikä ei pidä paikkaansa.

Yllä nähtiin miten Taylorin sarjan joskus löytää helpoiten jotain tunnettua sarjaa derivoimalla. Vastaavasti voi joskus käyttää myös sarjan integrointia.

Esimerkki 2.46 Etsi Taylorin sarja pisteessä $z_0 = -1$ logaritmin sille haaralle, joka saa tässä pisteessä arvon $i3\pi$.

Ratkaisu: Olkoon f pisteen -1 jossain ympäristössä määritelty analyttinen funktio, jolle $e^{f(z)} = z$. Koska $e^{i3\pi} = e^{i\pi} = -1$, voi $i3\pi$ todellakin olla funktion f arvo pisteessä -1 . Merkitään taas $w = z - z_0 = z + 1$. Käänteisfunktion derivaattakaavan mukaan pätee nyt

$$f'(z) = \frac{1}{z} = -\frac{1}{1-w} = -\sum_{n=0}^{\infty} w^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n,$$

kun $|z - z_0| < 1$. Lauseen 2.39 mukaan saadaan siis suppenemissäteensä sisällä pisteestä z_0 pisteeseen z kulkevaa polkua pitkin integroimalla

$$f(z) - f(z_0) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (z - z_0)^{n+1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (z - z_0)^k.$$

Näin ollen saadaan halutuksi Taylorin sarjaksi esitys, joka suppenee kun $|z + 1| < 1$,

$$f(z) = i3\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (z + 1)^k.$$

2.5 Laurentin sarja

Laurentin sarja on kahden funktiosarjan summa, joka yleistää Taylorin sarjaesityksen tapaukseen, jossa suppenemissäteensä sisältä löytyy singulariteettejä. Se muodostetaan antamalla sarjan

kertoimet kahtena kompleksilukujonona $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ja $(a_n)_{n=-\infty}^{-1}$, sekä sarjan **keskipiste** $z_0 \in \mathbb{C}$. Tarkemmin, vastaava Laurentin sarja S määritellään **kaksipuolisena sarjana**

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := S_-(z) + S_+(z), \quad (2.21)$$

$$S_+(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad (2.22)$$

$$S_-(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}. \quad (2.23)$$

Tässä S_+ on **Laurentin sarjan säännöllinen osa** ja se on siis tavallinen potenssarja, jonka suppenemissäde R_+ saadaan ratkaistua kaavasta $1/R_+ = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$. Sarja S_- on **Laurentin sarjan pääosa**. Myös se voidaan ymmärtää potenssarjana, nimittäin muuttujassa $w = 1/(z-z_0)$. Merkitään tämän potenssarjan suppenemissädettä R_- , jolloin $1/R_- = r$, kun määritellään $r := \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{-n}|^{1/n} \in [0, \infty]$. Tästä seuraa, että potenssarja $g(w) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ suppenee itseisesti aina kun $|w| < R_-$ ja se on analyyttinen funktio vastaavassa alueessa, kunhan $R_- > 0$. Koska $S_-(z) = g(1/(z-z_0))$ nähdään, että sarja S_- suppenee itseisesti aina kun $|z-z_0| > r$ ja yhdistetyn kuvauksen ketjusäännön perusteella se on analyyttinen tässä alueessa. (Esimerkiksi, kun $r = 0$, on $R_- = \infty$. Silloin funktio g on kokonainen ja näin ollen S_- on analyyttinen funktio alueessa $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.)

Yhteenvetona pätee siis seuraava perustulos koskien Laurentin sarjoja.

Lause 2.47 Jonon $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ antama, pisteen z_0 ympäristössä kehitetty, Laurentin sarja **suppenee**, jos $r < R$, kun

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{-n}|^{1/n} \quad \text{ja} \quad \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Tällöin $0 \leq r < \infty$, $0 < R \leq \infty$, sarjat S_+ ja S_- suppenevat itseisesti **rengasalueessa** (engl. annulus)

$$A_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z-z_0| < R\},$$

ja niiden määräämä Laurentin sarja $S = S_+ + S_-$ on analyyttinen funktio koko alueessa $A_{r,R}(z_0)$.

Jos Laurentin sarjan pääosa on nolla, eli $a_n = 0$ kun $n < 0$, on Laurentin sarja tavallinen potenssarja ja tässä erikoistapauksessa se on määritelty myös pisteessä $z = z_0$. Yleensä näin ei tarvitse olla, ja funktion moduli voi esimerkiksi kasvaa rajatta kun lähestytään pistettä z_0 . Kuten luvun alussa ennakoitiin, käytetään Laurentin sarjaa yleistämään Taylorin sarjakehitelmä funktioille, joilla on singulariteettejä kehityspisteen läheisyydessä.

Lause 2.48 (Laurentin lause) Olkoon Ω avoin joukko ja $f \in H(\Omega)$. Oletetaan, että $z_0 \in \mathbb{C}$ ja $0 \leq r < R$ ovat sellaiset, että rengasalue $A_{r,R}(z_0) \subset \Omega$. Tällöin funktiolla f on Laurentin sarjaesitys koko rengasalueessa,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \text{kun } r < |z-z_0| < R. \quad (2.24)$$

Funktio f määrää kertoimet a_n yksikäsitteisesti ja ne voidaan laskea kaavalla

$$a_n = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.25)$$

jossa $r < \rho < R$ ja $\gamma_\rho(t) := z_0 + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, on rengasalueen $A_{r,R}(z_0)$ sisällä pisteen z_0

ympäri kerran positiiviseen suuntaan kiertävä polku.

TODISTUS Oletetaan, että $z \in A_{r,R}(z_0)$. Rengasalue $A_{r,R}(z_0)$ ei ole yhdesti yhtenäinen, joten Cauchyn integraaliesitystä ei voi nyt käyttää suoraan. Leikataan alueesta pois pisteet, jotka osuvat keskipisteestä z_0 lähtevälle suoran puolikkaalle, joka ei kulje pisteen z kautta. Tällöin saadaan yhdesti yhtenäinen alue $U := A_{r,R}(z_0) \setminus \{z_0 + ce^{i\varphi} \mid c \in [0, \infty]\}$, jossa $\varphi \in \mathbb{R}$ valitaan siten, että $z \in U$. Koska $U \subset \Omega$, pätee $f \in H(U)$. Näin ollen voidaan soveltaa Cauchyn lauseita suljetulle polulle $\Gamma^\varepsilon(t) = z_0 + \gamma^\varepsilon(t)e^{i\varphi}$, jossa γ^ε on polku, jota käytettiin Esimerkissä 1.38. Valitaan polun parametrit siten, että $r < R_1 < |z - z_0| < R_2 < R$ ja $\varepsilon > 0$ on niin pieni, että polku kulkee alueessa U kerran pisteen z ympäri.

Polku on piirretty Kuvassa 1.5, jossa pitää nyt ajatella kuvan keskipiste pisteeksi z_0 ja positiivinen reaaliakseli kierrettyksi kulman φ verran: kuten kuvasta näkyy, kulkee polku tällöin pisteen z ympäri positiiviseen kiertosuuntaan. Cauchyn integraalikaavaa soveltamalla (Lause 1.43) nähdään siis, että

$$f(z) = \oint_{\Gamma^\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} - \oint_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i}. \quad (2.26)$$

Tässä raja $\varepsilon \rightarrow 0$ on laskettu aivan kuten Esimerkissä 1.38, eli siinä on otettu huomioon, että f on nyt analyttinen myös koko rengasalueessa $A_{r,R}(z_0)$, joten on se erityisesti jatkuva poistetulla janan pätkällä ja siten tämän janan suuntaisesti kulkevien polun osakäyrien antamat integraalit kumoavat toisensa rajalla $\varepsilon \rightarrow 0$. Jäljelle jäävät integrointikäyrät on merkitty käyttäen todistettavan Lauseen polkua γ_ρ kahdella eri säteen ρ arvolla.

Nyt jäljellä olevassa suurempaa ympyränkehää kulkevassa integraalissa on $|\zeta - z_0| = R_2 > |z - z_0|$, joten siinä voidaan kehittää nimittäjän sisältävä termi sarjaksi aivan kuten Taylorin sarja todistuksessa: kun $q = (z - z_0)/(\zeta - z_0)$, on $|q| < 1$ ja pätee

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Näin saatu sarja toteuttaa myös M-testin, joten se voidaan integroida termeittäin, josta saadaan

$$\oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n =: S_+(z),$$

$$a_n := \oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Koska nimittäjän nollakohta $z_0 \notin A_{r,R}(z_0)$, voidaan a_n :n määritelmässä muuttaa integrointikäyrän säde miksi tahansa arvoksi ρ , kunhan $r < \rho < R$, soveltaen Lausetta 1.41.

Toisen termin integrointikäyrällä on $|\zeta - z_0| = R_1 < |z - z_0|$, ja määritelläänkin silloin $p := (\zeta - z_0)/(z - z_0)$, jolloin $|p| < 1$ ja

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - p} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = -\sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{m+1}}.$$

Tässäkin tapauksessa M-testi toteutuu ja termeittäin integrointi antaa tulokseksi

$$-\oint_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{2\pi i} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n =: S_-(z),$$

$$a_n := \oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i}, \quad n < 0.$$

Myös arvoilla $n < 0$ voidaan a_n :n määritelmässä muuttaa integrointikäyrän säde miksi tahansa arvoksi ρ , kunhan $r < \rho < R$, joten saadaan tulos, että jonon $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ alkiot toteuttavat kaavan (2.25) kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Molemmat sarjoista $S_-(z)$ ja $S_+(z)$ suppenevat itseisesti, joten vastaava kaksipuolinen Laurentin sarja suppenee ja kaava (2.24) seuraa tuloksesta (2.26).

Osoitetaan vielä lopuksi, että Laurentin sarjan kertoimet ovat yksikäsitteisiä. Olkoon $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ jokin toinen Laurentin sarjaesitys arvoille $r < |z - z_0| < R$. Lauseen 2.47 mukaan suppenee tässä olevat kaksi sarjaa itseisesti, joten jos $r < \rho < R$ ja $n \in \mathbb{Z}$, on

$$a_n = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m \oint_{\gamma_\rho} \frac{(\zeta - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \frac{d\zeta}{2\pi i},$$

sillä integrandi toteuttaa Weierstrassin M-testin. Esimerkin 1.39 mukaan on tässä

$$\oint_{\gamma_\rho} (\zeta - z_0)^{m-n-1} \frac{d\zeta}{2\pi i} = \text{Ind}_\gamma(z_0) \mathbb{1}_{\{m-n-1=-1\}} = \mathbb{1}_{\{m=n\}}.$$

Tästä seuraa $a_n = b_n$, eli sarjan kertoimet ovat samat kuin kaavassa (2.25). \square

Esimerkki 2.49 Laske funktion f origokeskinen Laurentin sarja, kun

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)},$$

ja

$$(a) \quad 0 < |z| < 1, \quad (b) \quad 1 < |z| < 2, \quad (c) \quad |z| > 2.$$

Ratkaisu: Jaetaan ensin funktio osamurtokehitelemäksi

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}.$$

Tässä ensimmäinen termi on suoraan Laurentin sarjan muotoa, joten sitä ei tarvitse muokata alueesta toiseen siirryttäessä.

(a) Alueessa $0 < |z| < 1$ voidaan kaksi jälkimmäistä termiä suoraan kehittää suppeneviksi geometrisiksi sarjoiksi,

$$-\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1, \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2(z-2)} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad |z| < 2.$$

Laurentin sarjaksi saadaan siis

$$f(z) = \frac{1}{2} z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n, \quad 0 < |z| < 1,$$

jossa ensimmäinen termi on sarjan pääosa ja loput muodostavat sen säännöllisen osan.

(b) Alueessa $1 < |z| < 2$ vain toinen yllä olevista geometrisista sarjoista suppenee. Toinen termi kannattaakin nyt kehittää muuttujan $1/z$ geometrisena sarjana,

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z^{-1}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = -\frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-(n+1)}, \quad |z| > 1.$$

Laurentin sarjaksi saadaan siis

$$f(z) = -\frac{1}{2}z^{-1} + \sum_{n=-\infty}^{-2} (-z^n) + \sum_{n=0}^{\infty} (-2^{-n-2})z^n, \quad 1 < |z| < 2.$$

Huomataan, että sekä pää-, että säännöllinen osa muuttuivat verrattuna alueen (a) sarjaan.

(c) Alueessa $|z| > 2$ täytyy myös viimeinen termeistä kehittää muuttujan $1/z$ geometrisena sarjana,

$$\frac{1}{2(z-2)} = \frac{1}{2z} \frac{1}{1-(2/z)} = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^{n+1}} = \sum_{m=-\infty}^{-1} 2^{-m-2}z^m, \quad |z| > 2.$$

Huomataan, että termit joiden kertaluku on $n = -1$ ja $n = -2$ summautuvat nolnaan, ja päädytään Laurentin sarjaan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-3} (2^{-n-2} - 1)z^n, \quad |z| > 2.$$

Määritelmä 2.50 Olkoon Ω avoin joukko ja f on analyyttinen Ω :ssa mahdollisesti lukuun ottamatta pistettä $z_0 \in \Omega$, eli $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$. Tällöin f :llä on Laurentin sarjaesitys pisteen z_0 ympäristössä jossain rengasalueessa $A_{0,R}(z_0)$, $R > 0$. Tämän Laurentin sarjan kerrointa a_{-1} kutsutaan funktion f **residyksi pisteessä** z_0 , merkitään $\text{Res}(f, z_0)$. Se voidaan siis määritellä integraalina

$$\text{Res}(f, z_0) = \oint_{\gamma_\varepsilon} f(\zeta) \frac{d\zeta}{2\pi i},$$

jossa $\varepsilon > 0$ on niin pieni säde, ettei funktiolla f ole pistettä z_0 lukuun ottamatta muita singulariteetteja vastaavan avoimen kiekon sisällä (eli jolla $B_\varepsilon(z_0) \subset \Omega$).

Huomautus 2.51 Jos f on analyyttinen pisteessä z_0 , on sillä tässä pisteessä Taylorin sarjaesitys, joten sen Laurentin sarjan pääosa on nolla. Näin ollen erityisesti $\text{Res}(f, z_0) = 0$, niin kuin myös Cauchy'n lauseen perusteella nähdään residyn määritelmästä.

Luvussa 3 näytetään, miten monia tavallisia integraaleja voidaan laskea pelkästään laskemalla sopivia integrandin residyjä kompleksitasossa. Tätä varten ei usein kannatakaan lähteä liikkeelle residyn integraaliesityksestä, vaan käyttää tunnettuja perusfunktioiden sarjaesityksiä ja muokata niitä samoin kuin Taylorin sarjoille tehtiin edellisessä luvussa.

Esimerkki 2.52 Laske funktion f origokeskinen Laurentin sarja ja residy $\text{Res}(f, 0)$, kun f on määritelty arvoille $z \neq 0$ kaavalla

$$(a) \quad f(z) = \frac{\sinh z}{z^2}, \quad (b) \quad f(z) = (z^3 + z)e^{1/z}.$$

Ratkaisu: (a) Kuten Esimerkissä 2.43, saadaan sinh-funktion Taylorin sarjaesitys suoraan eksponenttifunktion sarjaa käyttäen

$$\sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

sillä tässä parilliset termit kumoavat toisensa. Näin ollen, saadaan alueessa $|z| > 0$ suppeneva Laurentin sarja

$$\frac{\sinh z}{z^2} = z^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} z^{2n+1}.$$

Tästä seuraa suoraan, että $\text{Res}(f, 0) = 1$.

(b) Käyttäen eksponenttifunktion Taylorin sarjaa nähdään, että kun $|z| > 0$

$$(z^3 + z)e^{1/z} = (z^3 + z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{3-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{1-n}.$$

Keräämällä molemmista sarjoista positiiviset potenssit saadaan säännölliseksi osaksi

$$z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3!} + z + 1 = z^3 + z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{7}{6}.$$

Pääosa toteuttaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+3)!} + \frac{1}{(k+1)!} \right) z^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (k+3)(k+2)}{(k+3)!} z^{-k}.$$

Näin ollen $\text{Res}(f, 0) = \frac{13}{24}$, ja pyydetty funktion Laurentin sarja on

$$f(z) = z^3 + z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{7}{6} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{n^2 + 7 - 5n}{(3-n)!} z^n, \quad |z| > 0.$$

Luku 3

Residylaskenta

3.1 Analyttisen funktion nollakohdat

Palautetaan mieleen, että kaikille polynomien nollakohdille voitiin määritellä nollakohdan asteen perusteella kuin monta kertaa nollakohta esiintyi algebran peruslauseen tuloesityksessä. Tämä ominaisuus periytyy myös kaikille analyttisille funktioille, jotka eivät ole vakiofunktioita nollakohdan ympäristössä.

Lause 3.1 *Olkkoon Ω alue ja $f \in H(\Omega)$. Jos $z_0 \in \Omega$ on f :n nollakohta, joko*

1. $f(z) = 0$ kaikilla $z \in \Omega$ tai
2. nollakohdan z_0 **kertaluku on äärellinen**, eli löytyy $m \in \mathbb{N}$, $g \in H(\Omega)$ ja jokin säde $\varepsilon > 0$, joilla $g(z) \neq 0$ kaikilla $|z - z_0| < \varepsilon$, ja

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad z \in \Omega.$$

TODISTUS Todistus perustuu siihen, että analyttisellä funktiolla f on Taylorin sarja pisteen z_0 ympäristössä, eli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Koska $f(z_0) = 0$, on tässä $a_0 = 0$. Näin ollen, joko $a_n = 0$ kaikilla n , tai löytyy jokin pienin $m \in \mathbb{N}$, jolla $a_m \neq 0$. Ensimmäisessä tapauksessa on $f = 0$ koko kiekossa, ja toisessa tapauksessa voidaan määritellä $g(z_0) := a_m \neq 0$ ja muuten $g(z) := f(z)/(z - z_0)^m$, jolloin g :llä on Taylorin sarja $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k$ ja $g \in H(\Omega)$. Funktion g jatkuvuudesta pisteessä z_0 seuraa myös, että löytyy jokin avoin kiekko, jossa se ei mene nolliin ja tämä antaa halutun säteen $\varepsilon > 0$. Tarkemmat yksityiskohdat löytyvät esimerkiksi lähteestä [3, Lause 10.18]. \square

Seuraus 3.2 1. *Analyttisen ei-vakion funktion nollakohdat ovat aina eristettyjä: jos Ω on alue ja $z_0 \in \Omega$ on funktion $f \in H(\Omega)$ nollakohta, niin löytyy säde $\varepsilon > 0$, jolla $f(z) \neq 0$ aina kun $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.*

2. *Analyttisellä ei-vakiolla funktiolla on äärellinen määrä nollakohtia kaikissa määrittelyalueeseensa sisältyvissä suljetuissa kiekkoissa.*

Tällä tuloksella on seurauksena, että jos tiedetään ääretön määrä analyttisen funktion arvoja jokin määrittelyalueen pisteen ympäristössä, nämä määräävät funktion arvot kaikissa alueen pisteissä.

Seuraus 3.3 *Olkkoon Ω alue ja (z_n) sen pistejono, jossa mikään piste ei toistu kahdesti ja jolle $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \Omega$. Jos $f, g \in H(\Omega)$ ja $f(z_n) = g(z_n)$ kaikilla n , pätee tällöin $f(w) = g(w)$ kaikilla $w \in \Omega$.*

TODISTUS Nyt funktio $h := f - g \in H(\Omega)$ ja sille pätee $h(z_n) = 0$ kaikilla n . Koska h on erityisesti jatkuva jonon raja-arvopisteessä z , on tällöin myös $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) = h(z)$, joten myös piste z on funktion h nollakohta. Se ei voi kuitenkaan olla eristetty, sillä jokainen kiekko $B_\varepsilon(z)$ sisältää jonkin jonon (z_n) alkion, joka ei ole z . Näin ollen $h(w) = 0$ kaikilla $w \in \Omega$. \square

Esimerkki 3.4 Jos f, g on määritelty ja analyyttisiä oikeassa puolitasossa ja ne saavat samat arvot jollain positiivisen reaaliksi akselin avoimella välillä, täytyy olla $f = g$ koko puolitasossa.

Esimerkki 3.5 Määrittelyalueen **yhtenäisyys** on oleellista kaikissa yllä olevissa tuloksissa. Esimerkiksi voidaan määrittellä $f(z) = 0$, kun $|z| < 1$, ja $f(z) = z$, kun $|z| > 2$, ja näin saatu funktio on analyyttinen, se yhtyy nollafunktioon origon ympäristössä, mutta $f \neq 0$.

3.2 Analyyttisten funktioiden erikoispisteet

Määritelmä 3.6 Olkoon f kompleksifunktio, joka on analyyttinen alueessa Ω . Piste $z_0 \in \mathbb{C}$ on **analyyttisen funktion f erikoispiste**, jos f ei ole siinä analyyttinen (esim. arvoa $f(z_0)$ ei ole määritelty) vaikka jokainen kiekkoista $B_\varepsilon(z_0)$, $\varepsilon > 0$, leikkaa analyyttisyysaluetta Ω . Kyseessä on **eristetty erikoispiste**, jos löytyy sellainen $R > 0$, jolla funktio f on analyyttinen rengasalueessa $A_{0,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$.

Eristetyt erikoispisteet luokitellaan kolmeen eri luokkaan, jotka selitetään alla. On olemassa myös erikoispisteitä, jotka eivät ole eristettyjä. Esimerkiksi logaritmin päähaaralle jokainen negatiivisen reaaliksi akselin $]-\infty, 0]$ piste on sen erikoispiste: $\ln z$ ei ole määritelty pisteessä $z = 0$, eikä se ole jatkuva pisteissä $z < 0$, mutta jokainen kiekkoista $B_\varepsilon(z)$, $z \in]-\infty, 0]$, $\varepsilon > 0$, leikkaa logaritmin analyyttisyysaluetta. Toisaalta negatiivisen reaaliksi akselin piste ei ole eristetty, sillä sen mielivaltaisessa ympäristöstä löytyy aina muita pisteitä negatiiviselta reaaliksi akselilta. Monet muutkin analyyttisten funktioiden käänteiskuvauksina saadut moniarvoiset kuvaukset (neliöjuuri, yleiset potenssit, arkus- ja areafunktiot) käyttäytyvät samalla tavoin: kun valitaan näistä jokin haara, joutuu yleensä luopumaan derivoituvuudesta vähintään jollain janalla.

Eristettyjen erikoispisteiden löytäminen ja luokittelu on hyödyllistä erityisesti kun halutaan soveltaa residylausetta. Tämä tapahtuu samalla tavoin kuin mitä nollakohdille tehtiin edellisessä luvussa.

Määritelmä 3.7 Olkoon Ω avoin, $f \in H(\Omega)$, ja $z_0 \notin \Omega$ funktion f eristetty erikoispiste. Lauseen 2.48 mukaan on funktiolla f tällöin Laurentin sarjakehitelmä rengasalueessa $A_{0,R}(z_0) \subset \Omega$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R. \quad (3.1)$$

- Jos $a_n = 0$ kaikilla $n < 0$, niin kyseessä on **poistuva erikoispiste**. Jos erikoispiste ei ole poistuva, se on **poistumaton erikoispiste**.
- Jos $a_n = 0$ kaikilla $n < -m < 0$ ja $a_{-m} \neq 0$, niin kyseessä on **napa** ja $m \in \mathbb{Z}_+$ on **navan kertaluku**. Puhutaan myös m -kertaisesta navasta, eli esimerkiksi $m = 1$ vastaa yksinkertaista napaa.
- Jos $|\{n \in \mathbb{Z}_- \mid a_n \neq 0\}| = \infty$ eli jos Laurentin sarjan pääosa ei ole äärellisen pituinen, niin kyseessä on **oleellinen erikoispiste**.

Tarkastellaan tarkemmin näitä kolmea eri luokkaa. Poistuva erikoispiste on nimensä mukainen, sillä tällöin funktiolle voidaan määritellä jatke $g(z)$ koko kiekkoon $B_R(z_0)$ seuraavasti:

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \text{kun } z \in \Omega, \\ a_0, & \text{kun } z = z_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Lisätty arvo $g(z_0) = a_0$ määräytyy suoraan vaatimalla, että uusi funktio on jatkuva, sillä se on Laurentin sarjan raja-arvo kun $z \rightarrow z_0$, ja siten myös $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$. Näin määritelty jatke on analyyttinen koko joukossa $\Omega \cup \{z_0\}$, eli erityisesti kiekossa $B_R(z_0)$, joten erikoispiste on näin ”poistettu”. Itse asiassa raja-arvon olemassaoloa voi myös käyttää luokittelemaan erikoispiste: **eristetty erikoispiste on poistuva jos ja vain jos funktiolla on raja-arvo tässä pisteessä**, nimittäin navoille selvästi pätee $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ ja alla olevan Picardin lauseen mukaan ei $|f(z)|$ lähesty mitään raja-arvoa kun $z \rightarrow z_0$, jos z_0 on oleellinen erikoispiste.

Esimerkki 3.8 Klassinen esimerkki, joka löytyy lähes jokaisesta kompleksianalyysin oppikirjasta: osoitetaan, että erikoispiste $z = 0$ on poistuva funktiolle

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Ratkaisu: Tämä funktio on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sen Laurentin sarjakehitelmä on

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + O(z^4),$$

joten sillä on poistuva erikoispiste origossa. Lisäksi $a_0 = 1$. Funktion jatke on siis kokonainen funktio, joka määritellään

$$\text{sinc}(z) := \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & \text{kun } z \neq 0, \\ 1, & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$

Tehtävän olisi saanut ratkaistua myös suoraan L'Hôpitalin säännön avulla (ks. alla), josta seuraa

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{1} = \cos 0 = 1.$$

Lause 3.9 (L'Hôpitalin sääntö analyyttisille funktioille) Oletetaan, että F ja G ovat analyyttisiä pisteen z_0 ympäristössä ja $F(z_0) = 0 = G(z_0)$.

1. Jos $G'(z_0) \neq 0$, pätee

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z)}{G(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F'(z)}{G'(z)} = \frac{F'(z_0)}{G'(z_0)}.$$

2. Jos $G'(z_0) = 0 \neq F'(z_0)$, on $\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{F(z)}{G(z)} \right| = \infty$.

3. Jos $G'(z_0) = 0 = F'(z_0)$, voidaan sääntöä iteroida uudestaan käyttäen funktioita F', G' .

TODISTUS Koska $F(z_0) = 0 = G(z_0)$, on kaikilla $z \neq z_0$

$$\frac{F(z)}{G(z)} = \frac{F(z) - F(z_0)}{G(z) - G(z_0)} = \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} \bigg/ \frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0}.$$

Tämä on siis kahden erotusosamäärän osamäärä ja, jos $G'(z_0) \neq 0$, voidaan kaavassa ottaa suoraan raja-arvo $z \rightarrow z_0$, tuloksena $F'(z_0)/G'(z_0)$. Jos $G'(z_0) = 0 \neq F'(z_0)$ voidaan taas käyttää hyväksi raja-arvojen suppenemista ja osoittaa, että mille tahansa $\varepsilon > 0$ pätee $\left| \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} \right| \geq \frac{1}{2}|F'(z_0)|$ ja $\left| \frac{G(z)-G(z_0)}{z-z_0} \right| \leq \varepsilon$, kun $|z-z_0|$ on tarpeeksi pieni. Tästä seuraa $\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{F(z)}{G(z)} \right| = \infty$. \square

Huomautus 3.10

- Muuttujanvaihto (esim. $w = 1/z$, jne.) on joskus hyödyllinen ennen derivoinnin aloittamista.
- Napaa etsiessä lähdetään aina liikkeelle nimittäjän nollakohdasta, eli $G(z_0) = 0$, joten voidaan joko käyttää L'Hôpitalin sääntöä tai $F(z_0) \neq 0$, jolloin $\lim_{z \rightarrow z_0} |F(z)/G(z)| = \infty$.
- Reaalifunktiolle kaavaa voi soveltaa paljoin yleisemminkin (ks. Wikipedia) raja-arvoihin, joille $\frac{F(z_0)}{G(z_0)} = "0"$ tai $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Lause 3.11 Olkoon Ω avoin joukko, $z_0 \in \Omega$ ja $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$. Seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja:

1. Piste z_0 on funktion f kertaluvun m napa.
2. Löytyy analyyttinen funktio $g \in H(\Omega)$, jolle $g(z_0) \neq 0$ ja

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}, \quad \text{kun } z \in \Omega.$$

Tällöin voidaan myös laskea funktion f residy pisteessä z_0 derivoimalla funktiota g ,

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}. \quad (3.3)$$

TODISTUS Osoitetaan ensimmäiseksi suunta $(1) \Rightarrow (2)$. Funktion f Laurentin sarja pisteen z_0 ympäristössä on

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n+m} \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m}(z-z_0)^k, \end{aligned}$$

missä Määritelmän 3.7 mukaan $a_{-m} \neq 0$. Sarjan suppenemissäde on vähintään R , joten kun määritellään

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R,$$

saadaan koko kiekossa $B_R(z_0)$ analyyttinen funktio, jolle pätee $g(z) = f(z)(z-z_0)^m$, kun $z \neq z_0$. Näin ollen, jos asetetaan $g(z_0) = a_{-m} \neq 0$ ja $g(z) = f(z)(z-z_0)^m$, kun $z \in \Omega$, saadaan funktio $g \in H(\Omega \cup \{z_0\})$, kuten kohdassa 2.

Osoitetaan seuraavaksi suunta $(2) \Rightarrow (1)$. Koska g on analyyttinen pisteessä z_0 , sillä on sarjaesitys

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n,$$

jossain kiekossa $B_R(z_0)$ ja oletusten mukaan tässä $g(z_0) = b_0 \neq 0$. Jaetaan yllä oleva esitys puolittain tekijällä $(z - z_0)^m$, jolloin nähdään, että

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^{n-m} = \sum_{k=-m}^{\infty} b_{k+m}(z - z_0)^k,$$

kaikilla $z \in A_{0,R}(z_0)$. Tämä on siis funktion f Laurentin sarjaesitys pisteessä z_0 , ja koska sen kerroin potenssille $k = -m$ on $b_0 \neq 0$, on funktiolla f kertalukua m oleva napa pisteessä z_0 . Lisäksi $\text{Res}(f, z_0) = b_{m-1} = g^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!$, sillä kertoimet b_n saatiin funktion g Taylorin sarjasta. \square

Esimerkki 3.12 Tarkastellaan funktiota

$$f(z) = \frac{\tan(z)}{z} = \frac{\sin(z)}{z \cos(z)},$$

joka on analyyttinen lukuun ottamatta nimittäjän nollakohtia, joten ovat kun $z = 0$ tai z on kosinin nollakohta, eli $z = z_n := (n + \frac{1}{2})\pi$, jollakin $n \in \mathbb{Z}$. Koska $\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$, alkaa kosinin Taylorin sarja pisteen z_n ympäristössä

$$\cos z = (z - z_n)(-\sin z_n) + O(z - z_n)^2.$$

Koska $\sin z_n = \pm 1 \neq 0$, saadaan tästä

$$\lim_{z \rightarrow z_n} (z - z_n)f(z) = \frac{\sin z_n}{z_n(-\sin z_n)} = -\frac{1}{z_n} \neq 0,$$

joten funktiolla f on yksinkertainen napa jokaisessa kosinin nollakohdassa z_n . Toisaalta origo on poistuva erikoispiste, koska $f(z) = \text{sinc}(z)/\cos(z)$ tai laskemalla $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$.

Seuraava tulos osoittaa, että jos z_0 on funktion f oleellinen erikoispiste, niin sen käytös muuttuu ”villiksi” erikoispistettä lähestyttäessä. Näin vahvassa muodossa tuloksen todistus on hankala, mutta se löytyy esimerkiksi Wikipedian kautta.

Lause 3.13 (Picardin lause) *Olkoon funktio f analyyttinen rengasalueessa $A_{0,R}(z_0)$ ja olkoon z_0 sen oleellinen erikoispiste. Tällöin kuvajoukko $f(A_{0,R}(z_0))$ sisältää kaikki kompleksiluvut mahdollisesti yhtä poikkeusta lukuun ottamatta.*

Lauseen molemmat mahdolliset tapaukset esiintyvät:

Esimerkki 3.14 Tarkastellaan funktioita

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \quad g(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right).$$

Näiden Laurentin sarjakehitelmät origossa ovat

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}},$$

mistä näemme, että origo on molempien funktioiden oleellinen erikoispiste.

- Funktion $e^{1/z}$ kuvajoukko missä tahansa rei'itettyssä kiekossa on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- Funktion $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ kuvajoukko missä tahansa rei'itettyssä kiekossa on \mathbb{C} .

3.3 Residylause

Näimme edellisessä luvussa, että Cauchyn integraalikaava mahdollistaa erilaisten kompleksitason viivaintegraalien laskemisen helposti, kunhan integrandin analyyttisominaisuudet tunnetaan. Tätä tulosta voi soveltaa myös reaali-integraaleille: tavoitteena on käyttää alkuperäistä integrointimuuttujaa sopivasti valitun kompleksitason polun parametrisointina ja täydentää näin saatu kompleksitason viivaintegraali esimerkiksi suljetuksi poluksi, johon Cauchyn lausetta ja integraalikaavoja pystyy suoraan soveltamaan. Luvussa 3.4 näytetään, miten tätä ideaa voi soveltaa joihinkin fysiikassa usein vastaan tuleviin integraaleihin. Loppujen lopuksi kyse on kuitenkin pitkälti käsityöstä, kun etsitään sopivaa polkua ja sen parametrisointia, mutta juuri tämän takia menetelmää on vaikea ”automatisoida” symbolisen laskennan kirjastoihin: käytännön esimerkki tästä löytyy Mathematics Stack Exchange -sivulta (URL <http://math.stackexchange.com/questions/562694/integral-int-11-frac1x-sqrt-frac1x1-x-ln-left-frac2-x2+2x+12-x2-2x+1>), jossa keskustellaan integraalin

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \ln \left(\frac{2x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} \right) dx,$$

laskemisesta.

Tärkein työkalu tässä yhteydessä on seuraava lause, joka yleistää Cauchyn integraalikaavoja tapaukseen, jossa polku kiertää useita funktion napoja.

Lause 3.15 (Residylause) *Olkoon Ω yhdesti yhtenäinen alue ja f on funktio, joka on analyyttinen Ω :ssa lukuun ottamatta sen pisteitä z_1, \dots, z_n . Jos γ on alueessa Ω kulkeva suljettu polku, joka välttää kaikki f :n erikoispisteet z_i (eli $z_i \notin \text{Ran } \gamma$ millään $i = 1, \dots, n$), pätee*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(z_i) \text{Res}(f, z_i).$$

Erityisesti, jos γ kiertää erikoispisteet kerran positiiviseen suuntaan, eli vastapäivään, pätee

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, z_i).$$

TODISTUS Koska erikoispisteitä on äärellinen määrä löytyy sellainen säde $\varepsilon > 0$, jolla suljetuissa kiekkoissa $D_i := \overline{B}_{\varepsilon}(z_i) \subset \Omega$, $i = 1, \dots, n$, on tasan yksi funktion f erikoispiste. Polku γ voidaan nyt muokata jatkuvasti siten, että se muuttuu summaksi polkuja γ_i^{ε} , jotka kulkevat kiekkojen reunoja ∂D_i pitkin. Tällöin Lauseen 1.37 mukaan

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \oint_{\gamma_i^{\varepsilon}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Ind}_{\gamma}(z_i) \text{Res}(f, z_i),$$

jossa viimeinen tulos seuraa integroimalla termeittäin funktion f pisteen z_i ympäristössä pätevää Laurentin sarjaesitystä. (Tarkempi todistus: [3, Lause 10.42].) \square

Huomautus 3.16

- Jos osa erikoispisteistä jää polun γ ”ulkopuolelle” ($\text{Ind}_{\gamma}(z_i) = 0$) tai jos polku kiertää osan pisteistä myötäpäivään, antaa Lauseen ensimmäinen tulos kaavan

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{polun sisälle jäävät erikoispisteet } z_i} (\pm \text{Res}(f, z_i)),$$

jossa merkki valitaan kiertosuunnan mukaan.

- Lausetta voi yleistää niin sanotuille **meromorfisille funktioille**, jotka saadaan ottamalla rationaalifunktio f/g mistä tahansa kahdesta avoimessa joukossa Ω määritellyistä funktioista f ja g (ks. [3, Määritelmä 10.41 ja Lause 15.12]).

Kuten aiemmin mainittiin, funktion residyn laskeminen suoraan integroimalla on useimmissa tapauksissa hankalaa. Joskus tämän voi tehdä laskemalla koko vastaavan Laurentin sarjan pääosa, esimerkiksi tunnettuja sarjakehitelmiä käyttäen kuten edellisessä luvussa tehtiin. Jos funktion eristetyn erikoispisteen laatu tunnetaan, voidaan residy määrittää suoraviivaisesti derivoimalla ja ottamalla raja-arvo. Poistuvan erikoispisteen tapauksessa residy on aina 0 ja navoille sen voi laskea esimerkiksi seuraavaa kaavaa käyttäen.

Lause 3.17 *Olkoon funktiolla f napa pisteessä z_0 kertalukua m . Tällöin*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z)) .$$

Erityisesti, jos f :llä on yksinkertainen napa pisteessä z_0 , pätee

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0) f(z)) .$$

TODISTUS Tulos seuraa suoraan Lauseen 3.11 kaavasta (3.3), kun huomataan, että siinä oleva funktio toteuttaa $g(z) = f(z)(z - z_0)^m$, kun $z \neq z_0$, ja se on analyyttinen pisteessä z_0 , joten sen derivaatoille pätee $g^{(n)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g^{(n)}(z)$. \square

Esimerkki 3.18 Määritetään funktion

$$f(z) = \frac{3}{2z + z^2 - z^3}$$

residy origossa. Koska

$$\lim_{z \rightarrow 0} (zf(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{3}{2 + z - z^2} = \frac{3}{2} ,$$

on $zf(z)$ analyyttinen origon ympäristössä, joten funktiolla f on origossa ensimmäisen kertaluvun napa. Lisäksi Lauseen 3.17 perusteella $\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} (zf(z)) = 3/2$.

Esimerkki 3.19 Määritetään funktion

$$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$$

residy nollassa Lauseen 3.17 avulla. Koska sinin derivaatta on kosini, on sininkin nollakohdissa sen derivaatan arvo aina $\pm 1 \neq 0$, joten ne ovat kaikki yksinkertaisia. Kuten Esimerkissä 3.12, seuraa tästä, että kotangentilla on origossa ensimmäisen kertaluvun napa, joten funktiolla f on kolmannen kertaluvun napa origossa (Lause 3.11). Suoralla derivoinnilla saadaan Lauseesta 3.17

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (\pi z \cot(\pi z)) = \frac{\pi}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \frac{z \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi^2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi z \cos(\pi z) - \sin(\pi z)}{\sin^3(\pi z)} \\ &= \pi^2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\pi^2 z}{3\pi \sin(\pi z) \cos(\pi z) \sin(\pi z)} = -\frac{\pi^2}{3} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\pi z)} = -\frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

missä neljännessä yhtäsuuruudessa turvauduttiin L'Hôpitalin sääntöön.

" $\gamma_{z_0 \rightarrow z_1}$ "	Pisteestä z_1 pisteeseen z_2 kulkeva janapolku, $\gamma_{z_0 \rightarrow z_1}(t) := z_0 + t(z_1 - z_0)$, $t \in [0, 1]$.
" $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\circlearrowright}$ "	z_0 -keskisen ε -säteisen ympyrän kehää kerran $+$ -suuntaan kiertävä polku, $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\circlearrowright}(t) := z_0 + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
" $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowright}$ "	z_0 -keskisen ε -säteisen ympyrän <i>yläkehää</i> $+$ -suuntaan kiertävä polku, $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowright}(t) := z_0 + \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, \pi]$.
" $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowleft}$ "	z_0 -keskisen ε -säteisen ympyrän <i>alakehää</i> $+$ -suuntaan kiertävä polku, $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowleft}(t) := z_0 + \varepsilon e^{it}$, $t \in [-\pi, 0]$.
" $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\circlearrowleft}$ "	z_0 -keskisen ε -säteisen ympyrän <i>yläkehää</i> $-$ -suuntaan kiertävä polku, $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\circlearrowleft}(t) := z_0 + \varepsilon e^{-it}$, $t \in [-\pi, 0]$. (Polun $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowright}$ käänteispolku.)
" $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowleft}$ "	z_0 -keskisen ε -säteisen ympyrän <i>alakehää</i> $-$ -suuntaan kiertävä polku, $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowleft}(t) := z_0 + \varepsilon e^{-it}$, $t \in [0, \pi]$. (Polun $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\curvearrowright}$ käänteispolku.)
" $\gamma_{\varepsilon}^{\circlearrowright}$ "	Origokeskisen ε -säteisen ympyrän kehää kerran $+$ -suuntaan kiertävä polku, eli $\gamma_{\varepsilon}^{\circlearrowright} = \gamma_{\varepsilon, 0}^{\circlearrowright}$, eli $\gamma_{\varepsilon}^{\circlearrowright}(t) := \varepsilon e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
" $\gamma_{\varepsilon}^{\curvearrowright}$ ", jne.	Kuten yllä, eli jos $z_0 = 0$, jätetään se yleensä merkitsemättä.

Taulukko 3.1: Luvun 3.4 integrointikäyrien lyhennysmerkinnät.

3.4 Reaali-integraalien laskeminen residylauseen avulla

Monet reaaliset integraalit saadaan kätevästi laskettua residylauseen avulla laajentamalla integroimisreitit kompleksitasoon. Tähän valitut esimerkit on valittu siten, että ne ovat mahdollisimman yleisiä: laskuharjoitustehtävissä olisi tarkoitus soveltaa johdossa käytettyä ideaa jossain erikoistapauksessa. Monet taulukkointegraalit seuraavat valituista esimerkeistä valitsemalla vapaalle parametrille jokin tietty arvo tai derivoimalla parametrin suhteen.

Huom: Tämän luvun integrointipolut rakennetaan janoista ja ympyrän kaarista, joista **käytetään Taulukon 3.1 lyhennysmerkintöjä**.

3.4.1 Rationaaliset integraalit koko reaaliakselin yli

Tarkastellaan muotoa

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \quad f(x) = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)} \quad (3.4)$$

olevia integraaleja, missä P_N ja Q_M ovat polynomeja, joiden asteet ovat N ja M . Tarkastellaan tässä luvussa tapauksia, jossa $M \geq N + 2$ ja oletetaan, että nimittäjäpolynomilla Q_M ei ole reaaliosuutta nollakohtia.

Algebran peruslauseen mukaan on polynomilla Q_M korkeintaan M kappaletta nollakohtia. Numeroidaan nollakohtia *yläpuolitasoon* kuuluvat z_1, \dots, z_n , jossa n on tällaisten nollakohtien lukumäärä. Jos Q_M on reaalikertoiminen, niin $Q_M(z)^* = Q_M(z^*)$, joten jokaista nollakohtaa z_0 kohti myös sen konjugaatti z_0^* on nollakohta. Tässä tapauksessa on nollakohtia yhtä monta ylä- ja alapuolitasossa, joten niitä on vähintään yksi ja korkeintaan $M/2$ yläpuolitasossa, eli $1 \leq n \leq M/2$. Huomataan myös, että reaalikertoimisen polynomin täytyy olla parillista astetta tai muuten sillä on vähintään yksi nollakohta reaaliakselilla.

Oletuksesta $M \geq N + 2$ seuraa, että integraali (3.4) suppenee: Suurilla $|x|$:n arvoilla löytyy vakiot C_1, C_2 , joille $|P_N(x)| \leq C_1|x|^N$ ja $|Q_M(x)| \geq C_2|x|^M$. Nämä tulokset näkee suoraan algebran

peruslauseesta, sillä kaavan (1.19) mukaan kun w_k ovat polynomin P_N nollakohdat pätee

$$|z|^{-N}|P_N(z)| = |a_N||z|^{-N} \prod_{k=1}^N |z - w_k| = |a_N| \prod_{k=1}^N \frac{|z - w_k|}{|z|} = |a_N| \prod_{k=1}^N |1 - w_k/z|,$$

joka menee kohti arvoa $|a_N| \neq 0$, kun $|z| \rightarrow \infty$. Näin ollen löytyy jokin vakio C , jolla

$$\left| \frac{P_N(x)}{Q_M(x)} \right| \leq C|x|^{-2},$$

ja koska $\int_1^{\infty} r^{-2} dr = -\int_1^{\infty} r^{-1} = 1 < \infty$, suppenee myös itseisarvon $|f| = |P_N/Q_M|$ yli otettu integraali.

Koska Q_M ja P_N ovat polynomeja, ovat kaikki funktion f erikoispisteet joko napoja tai poistuvia ja niitä on äärellinen määrä. Näistä yläpuolitasossa sijaitsevat yllä numeroidut Q_M :n nollakohdat z_1, \dots, z_n . Yhtälön (3.4) tyyppiä olevat integraalit lasketaan kompleksitasossa residylauseetta käyttäen. Huomataan ensin, että (polkujen lyhennysmerkinnät on selitetty Taulukossa 3.1)

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{-R \rightarrow R}} f(z) dz. \quad (3.5)$$

Integrintipolku voidaan täydentää yläpuolitasossa kulkevaksi suljetuksi poluksi R -säteisen ympyränkaaren lisäyksellä, määrittelemällä $\gamma := \gamma_{-R \rightarrow R} \dot{+} \widehat{\gamma}_R$. Kun $R \rightarrow \infty$ on se lopulta niin suuri, että polun γ sisään jäävät kaikki ylemmässä puolitasossa sijaitsevat erikoispisteet z_1, \dots, z_n . Koska käyrä kiertää nämä erikoispisteet kerran positiiviseen kiertosuuntaan, seuraa residylauseesta, että kaikilla riittävän suurilla säteillä R pätee

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res}(f, z_i).$$

Toisaalta suoraan viivaintegraalin määritelmän mukaan

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_{-R \rightarrow R}} f(z) dz + \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) dz. \quad (3.6)$$

Näistä jälkimmäinen integrintipolku kulkee pitkin R -säteistä ympyränkehää, joten siinä $|z| = R$. Yllä johdetun f :n ylärajan perusteella pätee tällä integrintikäyrällä aina siis $|f(z)| \leq C|z|^{-2} = C/R^2$. Jälkimmäiselle integraalille saadaan siis arvio maksimin ja polun pituuden avulla:

$$\left| \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) dz \right| \leq \frac{C}{R^2} \pi R = \frac{\pi C}{R} \rightarrow 0, \quad \text{kun } R \rightarrow \infty.$$

Siispä kun puoliympyrän säde kasvaa rajatta, kaari-integraali häviää, ja tuloksista (3.5) ja (3.6) seuraa

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_{-R \rightarrow R}} f(z) dz + \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) dz \rightarrow I, \quad \text{kun } R \rightarrow \infty.$$

Yhdistämällä tämä residylauseeseen, saadaan lopputulos

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f(z), z_k)}, \quad (3.7)$$

jossa summa käy kaikkien ylemmässä puolitasossa sijaitsevien erikoispisteiden yli.

Esimerkki 3.20 Olkoon $a > 0$. Lasketaan integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2}.$$

Ratkaisu: Koska $(x - ia)(x + ia) = x^2 + a^2$, on nimittäjän polynomilla kaksi yksinkertaista napaa pisteissä $\pm ia$. Vain toinen näistä navoista sijaitsee ylemmässä puolitasossa. Näin ollen (3.7) mukaan ja Lausetta 3.17 soveltaen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2 + a^2}, ia\right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{z - ia}{(z - ia)(z + ia)} = \frac{2\pi i}{2ia} = \frac{\pi}{a}.$$

Esimerkki 3.21 Kvanttikenttäteoriassa tulee usein vastaan integraaleja, jotka saadaan lasketuksi joko residylauseella tai derivoimalla parametrin suhteen jotakin perusintegraalia. Parametrin suhteen derivointimenetelmän teki fyysikkojen keskuudessa tunnetuksi Richard Feynman. Jatkaen edellistä esimerkkiä, kun $a > 0$, lasketaan integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}.$$

Edellisessä esimerkissä johdettiin, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}.$$

Derivoidaan tätä parametrin a suhteen,

$$-2a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{\pi}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}.$$

Sama voidaan laskea myös tuloksesta (3.7) kun huomaa, että nyt $z = ia$ onkin toisen kertaluvun napa, sillä $(x^2 + a^2)^2 = (x - ia)^2(x + ia)^2$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2 + a^2)^2}, ia\right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} \frac{d}{dz} \frac{(z - ia)^2}{(z - ia)^2(z + ia)^2} \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow ia} (-2)(z + ia)^{-3} = \frac{-4\pi i}{(2ia)^3} = \frac{4\pi(-i)}{8a^3(-i)} = \frac{\pi}{2a^3}. \end{aligned}$$

Iteroimalla tätä voidaan johtaa myös yleinen tapaus (todistus induktiolla), kun $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{\pi}{2^{2n-2} a^{2n-1}} \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} = \frac{\pi}{(n-1)! 2^{n-1} a^{2n-1}} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}.$$

3.4.2 Pääarvointegraalit

Edellisessä kappaleessa oletimme, että integrandilla ei ole nappoja reaaliakselilla. Mitä jos kohtaamme kuitenkin *yksinkertaisen navan* x_0 ? Tällöin integraali ei enää suppene itseisesti navan kohdalla, ja joudutaan laskemaan Cauchyn pääarvointegraali (engl. *principal value integral*)

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{\infty} f(x) dx \right).$$

Käytämme lähes samanlaista reitti-integraalia kuin edellisessä kappaleessa, paitsi että napa ohitetaan ε -säteisen x_0 -keskisen puoliympyrän kaarella ylemmän puolitason kautta: Valitaan $\gamma := \gamma_{-R \rightarrow x_0 - \varepsilon} + \gamma_{x_0, \varepsilon} + \gamma_{x_0 + \varepsilon \rightarrow R} + \gamma_R$, jolloin saadaan viivaintegraalin määritelmästä

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma} f(z) dz = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz. \quad (3.8)$$

Riittää siis tutkia tapausta, jossa R on valittu niin suureksi, että kaikki ylemmässä puolitasossa olevat navat sijaitsevat puoliympyrän sisäpuolella ja $\varepsilon > 0$ on niin pieni, että vain napa pisteessä $z = x_0$ jää vastaavan kiekon sisään. Viime kappaleessa osoitimme, että suurempi R -säteinen puoliympyrän kaari ei kontribuoi integraaliin, ja tämä lasku kelpaa edelleen sellaisenaan.

Tarkastellaan siis pienempää kaarta, eli polkua $\gamma_{x_0, \varepsilon}$, ja merkitään $g(z) := (z - x_0)f(z)$. Koska oletettiin, että napa x_0 on yksinkertainen on tällöin g analyyttinen pisteessä z_0 (Lause 3.11). Toisaalta, koko integrointikäyrällä on

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - x_0} = \frac{g(z) + g(x_0) - g(x_0)}{z - x_0} = \frac{g(x_0)}{z - x_0} + \frac{g(z) - g(x_0)}{z - x_0}.$$

Pienempi kaari-integraali on siis

$$\int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} f(z) dz = g(x_0) \int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} \frac{dz}{z - x_0} + \int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} \frac{g(z) - g(x_0)}{z - x_0} dz.$$

Koska funktio g on derivoituva pisteessä $z = x_0$, on erotusosamäärä $(g(z) - g(x_0))/(z - x_0)$ rajoitettu, eli löytyy jokin C , jolle $|(g(z) - g(x_0))/(z - x_0)| \leq C$ pisteen x_0 ympäristössä, joka voidaan valita riippumatta luvusta ε . Näin ollen voidaan tämän yli otettua integraalia arvioida ylhäältä päin funktion maksimin ja käyrän pituuden avulla, eli saadaan

$$\left| \int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} f(z) dz \right| \leq C\pi\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{kun } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Tämä osa integraalista ei siis tuota mitään alkuperäiseen raja-arvoon.

Viimeinen jäljellä oleva integraali voidaan laskea suoraan käyttäen käyrän parametrisaatiota $\gamma_{\varepsilon, z_0}^{\leftarrow}(t) := z_0 + \varepsilon e^{-it}$, $t \in [-\pi, 0]$. Viivaintegraalin määritelmän mukaan

$$\int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} \frac{dz}{z - x_0} = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{\varepsilon e^{-it}} \varepsilon(-i)e^{-it} dt = -i\pi.$$

Saadaan siis lopputulos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{x_0, \varepsilon}} f(z) dz = -i\pi g(x_0).$$

Tässä

$$g(x_0) = \lim_{z \rightarrow x_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow x_0} (z - x_0)f(z) = \text{Res}(f, x_0)$$

on funktion f residy yksinkertaisessa navassa x_0 .

Kuten edellisessä kappaleesta, on suljetun polun γ yli otetun integraalin arvo $2\pi i$ kertaa ylemmässä puolitasossa olevien erikoispisteiden residyjen summa. Jos numeroidaan nyt jonoon (z_1, \dots, z_n) kaikki integrandin erikoispisteet, pätee

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \text{Im } z_k > 0}}^n \text{Res}(f, z_k) \quad (3.9)$$

Yhdistämällä yhtälöt (3.8) ja (3.9) saadaan pääarvointegraaliksi saadaan pääarvointegraaliksi

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \text{Im } z_k > 0}}^n \text{Res}(f, z_k) + \pi i \text{Res}(f, x_0). \quad (3.10)$$

Mikäli reaaliakselilla on useita yksinkertaisia napoja, voidaan yo. yhtälö yleistää seuraavasti:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \text{Im } z_k > 0}}^n \text{Res}(f, z_k) + \pi i \sum_{\substack{k=1 \\ \text{Im } z_k = 0}}^m \text{Res}(f, z_k). \quad (3.11)$$

Tämä tulos voidaan siis tiivistää nyrkkisääntöön: *reaaliakselilla olevan yksinkertaisen navan yli integroitaessa otetaan sen residystä mukaan vain "puolet"*.

Esimerkki 3.22 Olkoon $a > 0$. Integraali

$$\int_{-a}^a \frac{dx}{x}$$

ei normaalisti suppene, sillä integrandilla on epäjatkuvuuskohta origossa. Integrandin parittomuudesta seuraa, että jos sillä olisi jokin arvo, sen tulisi olla 0. Laskemalla sen sijaan pääarvointegraali saadaan

$$\text{P.V.} \int_{-a}^a \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^a \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln \frac{-\varepsilon}{-a} + \ln \frac{a}{\varepsilon} \right) = \ln 1 = 0.$$

Samaan tapaan voidaan määritellä hajaantuvan integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx$$

pääarvo:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\int_{-M}^0 x dx + \int_0^M x dx \right) = 0,$$

missä suoritetaan ensimmäiseen integraaliin muuttujanvaihto $x \mapsto -x$.

3.4.3 Rationaaliset trigonometriset integraalit

Tarkastellaan kosinin ja sinin suhteen rationaalisia integraaleja

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \phi, \sin \phi) d\phi, \quad (3.12)$$

missä $f(x, y)$ on rationaalifunktio. Sijoituksella $z = e^{i\phi}$, $dz = ie^{i\phi} d\phi = iz d\phi$ integrointi siirtyy kompleksitason yksikköympyrän kaarelle, kiertosuunta vastapäivään. Tällöin

$$\sin \phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi}) = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \quad \cos \phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

ja integraaliksi saadaan

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \phi, \sin \phi) d\phi = \oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{1}{iz} f\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) dz, \quad (3.13)$$

jonka voi laskea suoraan residylauseen avulla.

Esimerkki 3.23 Tehdään aluksi asiat ”hankalasti” ja sovelletaan äsken johdettua menetelmää triviaaliin integraaliin:

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi \, d\phi = \int_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{z^2 + 1}{2iz^2} dz.$$

Integrandilla on 2. kertaluvun napa origossa, ja se on integroimiskäyrän sisäpuolella. Residylauseen ja Lauseen 3.17 mukaan

$$\int_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{z^2 + 1}{2iz^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2 + 1}{2iz^2}, 0\right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{z^2 + 1}{2iz^2} \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{i} = 0.$$

Esimerkki 3.24 Olkoon $n \in \mathbb{N}$. Lasketaan integraali

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \phi \, d\phi$$

sijoituksella $z = e^{i\phi}$. Saadaan

$$\oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \left(\frac{z^2 + 1}{2z} \right)^{2n} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{2^{2n}i} \oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{(z^2 + 1)^{2n}}{z^{2n+1}} dz.$$

Havaitaan, että integrandilla on kertalukua $2n + 1$ oleva napa origossa. Integraaliksi saadaan

$$\frac{2\pi i}{2^{2n}i} \operatorname{Res}\left(\frac{(z^2 + 1)^{2n}}{z^{2n+1}}, 0\right) = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} (z^2 + 1)^{2n}.$$

Binomilauseen mukaan

$$(1 + z^2)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^{2n-k} (z^2)^k = \binom{2n}{0} z^0 + \dots + \binom{2n}{n} z^{2n} + \dots + \binom{2n}{2n} z^{4n}.$$

Ainoa merkitsevä termi on verrannollinen tekijään z^{2n} , sillä tätä alemmaa kertalukua olevat termit katoavat derivoimisissa ja ylempää kertalukua olevat rajankäynnillä $z \rightarrow 0$. Siispä

$$\frac{1}{(2n)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} (z^2 + 1)^{2n} = \frac{1}{(2n)!} \binom{2n}{n} 2n(2n-1) \dots 2 \cdot 1 = \binom{2n}{n},$$

ja tulos on

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \phi \, d\phi = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n}{n}}.$$

Esimerkki 3.25 Lasketaan integraali

$$\int_0^{2\pi} e^{2 \cos \phi} \, d\phi$$

sijoituksella $z = e^{i\phi}$. Saadaan

$$\oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} e^{z + \frac{1}{z}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \oint_{\gamma_1^{\circlearrowleft}} \frac{e^z}{z} e^{\frac{1}{z}} dz.$$

Kehitetään molemmat eksponenttifunktiot Taylorin sarjaksi ja käytetään residylausetta:

$$\frac{1}{i} \oint \frac{dz}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k k!} = \frac{1}{i} \oint dz \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n-k-1}}{n! k!} = 2\pi \operatorname{Res} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{n-k-1}}{n! k!}, 0 \right)$$

Residy saadaan summan termeistä, joissa $k = n$, joten tulos on

$$\boxed{\int_0^{2\pi} e^{2 \cos \phi} d\phi = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \approx 14,3231.}$$

3.4.4 Fourier'n muunnoksen integraalit

Fourier'n muunnos on yksi tärkeimmistä menetelmistä ratkaista fysiikassa esiintyviä differentiaaliyhtälöitä, kuten tyhjiön elektrodynamiikan ja vapaan hiukkasen kvanttimekaniikan liikeyhtälöitä, tai aalto- ja lämpöyhtälöitä (tästä lisää Ib-kurssilla). Fourier'n muunnos tuottaa integraaleja, jotka ovat muotoa

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx, \quad k > 0. \quad (3.14)$$

Näytetään tässä luvussa, miten näitä integraaleja voi laskea käyttäen residylausetta. Oletetaan tätä varten, että funktio f on analyyttinen lukuun ottamatta äärellistä määrää eristettyjä erikoispisteitä. Numeroidaan *ylemmän puolitason* erikoispisteet (z_1, \dots, z_n) , ja oletetaan, että reaaliakselilla ei lainkaan erikoispisteitä. Tämän lisäksi vaaditaan, että funktio f *häviää lähestyttäessä ääretöntä ylemmässä puolitasossa*; tarkemmin oletetaan, että kaikille tarpeeksi suurille säteille R löytyy funktiolle ympyrän ylätasen kehällä yläraja M_R , joka menee nolleen kun $R \rightarrow \infty$; kaavana oletetaan siis, että

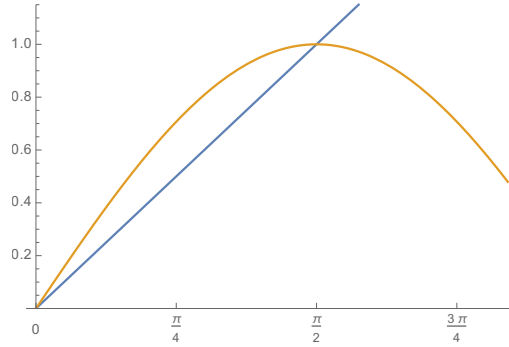
$$|f(Re^{i\phi})| \leq M_R, \quad \text{kun } \phi \in [0, \pi], \quad \text{ja} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0. \quad (3.15)$$

Näillä oletuksilla voidaan yhtälön (3.14) tyyppiset integraalit laskea täydentämällä polku $\gamma_{-R \rightarrow R}$ suljetuksi poluksi lisäämällä sen perään puolikaari-polku $\widehat{\gamma}_R$, juuri niin kuin tehtiin Luvussa 3.4.1. Tällöin nimittäin rajalla $R \rightarrow \infty$ saadaan

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{\gamma} f(z) e^{ikz} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{ikx} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) e^{ikz} dz = I + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) dz. \quad (3.16)$$

Jotta suljetun polun integraali olisi hyödyllinen, on jäljelle jäävän kaari-integraalin raja-arvo laskettava. Selviää, että se itse asiassa katoaa kokonaan. Tämä tulos tunnetaan Jordanin lemmän. Silloin kun sitä voi käyttää, saadaan siis lopputulokseksi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(f(z) e^{ikz}, z_i). \quad (3.17)$$



Kuva 3.1: Jordanin lemmassa käytetään epäyhtälöä $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ välillä $[0, \pi/2]$. Epäyhtälön kertoimet on helppo muistaa oheisen kuvan avulla, johon on piirretty funktion $\sin x$ kuvaaja ja suoran kuvaaja, joka kulkee pisteiden $\sin(0) = 0$ ja $\sin(\pi/2) = 1$ kautta. Suoran yhtälöksi saadaan tästä $\frac{2}{\pi}x$ ja välillä $[0, \pi/2]$ tosiaan pätee $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.

Lause 3.26 (Jordanin lemma) *Olkoon $k > 0$ ja f funktio, joka toteuttaa luvun alussa mainitut ehdot, erityisesti häviämisehdon (3.15). Tällöin*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) e^{ikz} dz = 0.$$

TODISTUS R -säteisen puoliympyrän kaarella $z = Re^{i\phi}$, $dz = iRe^{i\phi}d\phi$ ja integrointi tapahtuu kulman suhteen:

$$I_R := \int_{\widehat{\gamma}_R} f(z) e^{ikz} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\phi}) e^{ikR \cos \phi - kR \sin \phi} iRe^{i\phi} d\phi,$$

jossa eksponentissa on käytetty Eulerin kaavaa $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$. Suoraan oletetun f :n häviämisehdon perusteella on tässä integraalissa $|f(Re^{i\phi})| \leq M_R$ kaikilla $\phi \in [0, \pi]$. Voimme nyt arvioida integraalia:

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq \int_0^\pi |f(Re^{i\phi}) e^{ikR \cos \phi - kR \sin \phi} iRe^{i\phi}| d\phi \leq M_R R \int_0^\pi e^{-kR \sin \phi} d\phi \\ &= M_R R \left(\int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin \phi} d\phi + \int_{\pi/2}^\pi e^{-kR \sin \phi} d\phi \right) = 2M_R R \int_0^{\pi/2} e^{-kR \sin \phi} d\phi \end{aligned}$$

missä viimeinen rivi saatiin tekemällä jälkimmäiseen integraaliin muuttujanvaihto $\phi \mapsto \pi - \phi$. Nyt kun $0 \leq x \leq \pi/2$ ja $k, R > 0$, pätee (vertaa Kuva 3.1)

$$\frac{2\phi}{\pi} \leq \sin \phi \quad \Rightarrow \quad e^{-kR \sin \phi} \leq e^{-2kR\phi/\pi},$$

joten

$$\begin{aligned} |I_R| &\leq 2M_R R \int_0^{\pi/2} e^{-2kR\phi/\pi} d\phi = 2M_R R \int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{-2kR} e^{-2kR\phi/\pi} = \frac{M_R \pi}{k} (1 - e^{-kR}) \\ &\leq \frac{M_R \pi}{k} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $R \rightarrow \infty$, oletuksen $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$ mukaan. Siispä kaari-integraalikin menee nolleen rajalla $R \rightarrow \infty$. \square

Esimerkki 3.27 Kun $k \in \mathbb{R}$, lasketaan pääarvointegraali

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x} dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ikx}}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x} dx \right).$$

Ratkaisu: Oletetaan ensin, että $k > 0$. Luvun 3.4.2 integrointikäyrää $\gamma := \gamma_{-R \rightarrow -\varepsilon} + \gamma_{\varepsilon} + \gamma_{\varepsilon \rightarrow R} + \gamma_R^{\leftarrow}$ käyttäen pätee tässäkin

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma} f(z) e^{ikz} dz = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{\varepsilon}^{\leftarrow}} f(z) e^{ikz} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R^{\leftarrow}} f(z) e^{ikz} dz,$$

jossa $f(z) := \frac{1}{z}$, kun $z \neq 0$. Funktiolla f on siis vain yksi erikoispiste, joka on ensimmäisen kertaluvun napa origossa, sijaiten alkuperäisellä integrointireitillä. Toisaalta, kun $R > 0$ ja $\phi \in [0, \pi]$, pätee

$$|f(Re^{i\phi})| = \frac{1}{|Re^{i\phi}|} = \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

joten myös häviämisehto (3.15) toteutuu. Näin ollen Jordanin lemman mukaan suurempi kaari-integraali häviää rajalla $R \rightarrow \infty$, joten voidaan käyttää suoraan Luvussa 3.4.2 johdettua pääarvointegraalikaavaa (3.11). Koska funktiolla f ei ole erikoispisteitä yläpuolitasossa, saadaan näin tulokseksi

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x} dx = \pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{ikz}}{z}, 0 \right) = \pi i \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{ikz}}{z} = \pi i, \quad k > 0.$$

Esimerkissä 3.22 laskettiin pääarvointegraalin arvoksi 0, kun $k = 0$, ja jos $k < 0$, saadaan kompleksikonjugoimalla

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x} dx = \left(\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x} dx \right)^* = (\pi i)^* = -i\pi.$$

Vastaus:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x} dx := i\pi \cdot \begin{cases} 1, & \text{kun } k > 0, \\ 0, & \text{kun } k = 0, \\ -1, & \text{kun } k < 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

3.4.5 Fourier'n kosini ja sinimuunnoksen integraalit

Fourier'n muunnos voidaan ottaa myös käyttäen joko kosineja tai sinejä eksponenttifunktion e^{ikx} sijaan. Strategiana on tämääntyyppisissä integraaleissa ilmaista kosini ja sini funktion e^{ikx} reaali- ja imaginääriosina:

$$\cos(kx) = \operatorname{Re}(e^{ikx}), \quad \sin(kx) = \operatorname{Im}(e^{ikx}).$$

Tässä vaiheessa voi myös helposti tarvittaessa vaihtaa reaaliparametrin k merkin positiiviseksi, sillä $\cos(-kx) = \cos(kx)$ ja $\sin(-kx) = -\sin(kx)$. Tämän jälkeen voidaan käyttää Jordanin lemmaa, kunhan funktio f toteuttaa edellä vaaditut ominaisuudet.

Esimerkki 3.28 Olkoon $k > 0$ ja $a^2 < b^2$. Lasketaan integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + 2ax + b^2} dx$$

huomaamalla, että se on reaaliosa integraalista

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x^2 + 2ax + b^2} dx.$$

Nimittäjällä on yksinkertaiset kompleksiset nollakohdat pisteissä

$$x_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2} = -a \pm i\sqrt{b^2 - a^2}.$$

Tässä $\sqrt{b^2 - a^2} > 0$, joten näistä ainoastaan $x_+ = -a + i\sqrt{b^2 - a^2}$ sijaitsee ylemmässä puolitasossa. Nyt residylauseen ja Jordanin lemman mukaan

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{(x - x_+)(x - x_-)} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{ikz}}{(z - x_+)(z - x_-)}, x_+ \right) \\ &= 2\pi i \frac{e^{ikx_+}}{x_+ - x_-} = 2\pi i \frac{e^{ik(-a + i\sqrt{b^2 - a^2})}}{2i\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}} e^{-ika - k\sqrt{b^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Tämän reaaliosasta saadaan alkuperäisen integraalin arvo. Itse asiassa sen imaginääriosasta saa myös samalla tavalla vastaavan sini-integraalin arvon, eli yhteenvetona

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{x^2 + 2ax + b^2} dx &= -\frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}} e^{-k\sqrt{b^2 - a^2}} \sin(ka) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + 2ax + b^2} dx &= \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}} e^{-k\sqrt{b^2 - a^2}} \cos(ka) \end{aligned}$$

Ottamalla jälkimmäisessä raja $a \rightarrow 0$ saadaan integraalikaava, jossa $k, b > 0$, mutta negatiiviset arvot löytyvät myös symmetriaa käyttäen:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{b} e^{-kb}.}$$

3.4.6 (Lisä) Logaritmi- ja yleisiä potenssifunktioita sisältävät integraalit

Residylauseen avulla voi laskea myös joitain sellaisia integraaleja, joissa esiintyy yleisiä erikoispisteitä sisältäviä funktioita, kuten esimerkiksi logaritmia ja yleistä potenssia. Tarkastellaan ensin muotoa

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x) dx$$

olevia integraaleja silloin, kun $\alpha \notin \mathbb{Z}$, ja olettaen, että f on meromorfinen funktio, jolla ei ole napoja integrointireitillä eli positiivisella reaaliakselilla.¹

Tavoitteena on tehdä sopiva analyttinen jatke funktiolle $x^{\alpha} = \exp(\alpha \operatorname{Ln} x)$, $x > 0$. Osoittautuu, että tässä tapauksessa on helpointa asettaa logaritmin leikkaus kulkemaan integrointireittiä pitkin. Määritelläänkin

$$\boxed{L(z) := \overline{\operatorname{Ln}(-z)} + i\pi}, \quad (3.19)$$

¹Jos $\alpha \in \mathbb{Z}$ ja f on rationaalifunktio P_N/Q_M , kasvattaisi x^{α} pelkästään joko rationaalifunktion osoittajan P_N astetta ($\alpha \geq 0$) tai sen nimittäjän Q_M astetta ($\alpha < 0$). Tällöin integraalin voi laskea suoraan käyttäen aiempia tekniikoita.

jossa $\overline{\ln}$ tarkoittaa logaritmin päähaaraa. Tällöin $L(z)$ on analyttinen funktio pois lukien pisteet, joilla $-z$ kuuluu negatiiviselle reaaliakselille, eli pisteet $z \in [0, \infty[$. Lisäksi $\exp(L(z)) = (-z)e^{i\pi} = z$, joten tämä on tosiaan logaritmin haara. Tällä haaralla on seuraavat ominaisuudet, kun positiivista reaaliakselia lähestytään ylhäältä tai alhaalta päin: jos $x > 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} L(x + i\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\overline{\ln}(-x - i\varepsilon) + i\pi) = \operatorname{Ln}|-x| - i\pi + i\pi = \operatorname{Ln}x, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} L(x - i\varepsilon) &= \operatorname{Ln}|-x| + i\pi + i\pi = \operatorname{Ln}x + i2\pi.\end{aligned}$$

Määritellään tämän jälkeen kompleksitason funktio $F(z) := \exp(\alpha L(z))f(z)$, joka on analyttinen positiivista reaaliakselia ja f :n napoja lukuun ottamatta. Koska f :llä ei ole napoja positiivisella reaaliakselilla, on se siinä jatkuva, ja saadaan siis F :n raja-arvoiksi, kun $x > 0$,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(x + i\varepsilon) &= \exp(\alpha \operatorname{Ln}x)f(x) = x^\alpha f(x), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F(x - i\varepsilon) &= \exp(\alpha(\operatorname{Ln}x + i2\pi))f(x) = e^{i2\pi\alpha}x^\alpha f(x).\end{aligned}$$

Näin ollen pätee myös vastaaville reaaliakselin suuntaisille viivaintegraaleille seuraavat raja-arvot, kun $b > a > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{a+i\varepsilon \rightarrow b+i\varepsilon}} F(z)dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b F(x + i\varepsilon)dx = \int_a^b x^\alpha f(x)dx, \quad (3.20)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma_{a-i\varepsilon \rightarrow b-i\varepsilon}} F(z)dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b F(x - i\varepsilon)dx = e^{i2\pi\alpha} \int_a^b x^\alpha f(x)dx. \quad (3.21)$$

Huomataankin, että näin päästään käsiksi alkuperäiseen integraaliin integroimalla funktiota F Kuvassa 1.5 olevaa polkua $\gamma^\varepsilon = \gamma_{R_2}^\varepsilon \dot{+} \gamma_2^\varepsilon \dot{+} \overleftarrow{\gamma_{R_1}^\varepsilon} \dot{+} \gamma_3^\varepsilon$ pitkin, kun $0 < \varepsilon < R_1 < 1 < R_2$. Tällöin nimittäin polku γ_2^ε on samaa muotoa kuin kaavassa (3.20) ja γ_3^ε on käänteispolku kaavan (3.21) muotoa olevalle polulle. Saadaan siis tulokseksi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma^\varepsilon} F(z)dz = (1 - e^{i2\pi\alpha}) \int_{R_1}^{R_2} x^\alpha f(x)dx - \oint_{\gamma_{R_1}^\circ} F(z)dz + \oint_{\gamma_{R_2}^\circ} F(z)dz.$$

Koska $\alpha \notin \mathbb{Z}$, on $e^{i2\pi\alpha} \neq 1$, joten voidaan jakaa yhtälö kompleksiluvulla $1 - e^{i2\pi\alpha}$. **Jos kaksi jäljellä olevaa ympyränkaarta pitkin integroitua viivaintegraalia häviävät**, eli jos

$$\lim_{R_1 \rightarrow 0^+} \oint_{\gamma_{R_1}^\circ} F(z)dz = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \oint_{\gamma_{R_2}^\circ} F(z)dz = 0, \quad (3.22)$$

saadaan residylauseesta tulos

$$\boxed{\int_0^\infty x^\alpha f(x)dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_n \operatorname{Res}(e^{\alpha L(z)} f(z), z_n), \quad \alpha \notin \mathbb{Z}}, \quad (3.23)$$

jossa summataan kaikkien meromorfinen funktion f napapisteiden z_n yli (koska $L(z)$:lla ei ole muita erikoispisteitä kuin leikkaus reaaliakselilla, ovat nämä tosiaan myös funktion F ainoat erikoispisteet, jotka jäävät integrointikäyrän γ^ε sisälle).

Esimerkki 3.29 Osoitetaan, että kun $0 < p < 1$,

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}.$$

Ratkaisu: Tämä integraali on yllä annettua muotoa valinnoilla $\alpha = p - 1 \in]-1, 0[$ ja $f(z) = (1+z)^{-1}$. Funktiolla f on yksi ainoa erikoispiste $z = -1$, joka on ensimmäisen kertaluvun napa. Näin ollen tämä piste on myös funktion $F(z) := e^{\alpha L(z)} f(z)$ ensimmäisen kertaluvun napa, josta saadaan vastaavaksi residyksi

$$\operatorname{Res}(F(z), -1) = \lim_{z \rightarrow -1} ((z+1)F(z)) = \lim_{z \rightarrow -1} e^{\alpha L(z)} = e^{\alpha L(-1)} = e^{\alpha(\overline{\ln} 1 + i\pi)} = e^{i\alpha\pi}.$$

Kaavan (3.23) oikea puoli antaa siis tulokseksi

$$\frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \operatorname{Res}(F(z), -1) = 2\pi i \frac{e^{i\alpha\pi}}{1 - e^{i2\pi\alpha}} = 2\pi i \frac{1}{e^{-i\alpha\pi} - e^{i\pi\alpha}} = \frac{2\pi i}{-2i \sin(\alpha\pi)} = -\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Tässä $\sin(\alpha\pi) = \sin((p-1)\pi) = \sin(p\pi - \pi) = \sin(p\pi) \cos(\pi) - \cos(p\pi) \sin(\pi) = -\sin(p\pi)$, joten kaavan oikea puoli antaa etsityn arvon $\pi/\sin(\pi p)$. Riittää siis tarkistaa, että kaavan (3.22) raja-arvot häviävät.

Suoraan määritelmästä seuraa, että $|e^{\alpha L(z)}| = e^{\alpha \operatorname{Re} L(z)} = e^{\alpha \operatorname{Ln} |z|} = |z|^\alpha = |z|^{p-1}$. Toisaalta, jos $|z| \leq \frac{1}{2}$ on kolmioepäyhtälön perusteella $|1+z| \geq \frac{1}{2}$, joten tällöin pätee $|F(z)| \leq 2|z|^{p-1}$. Jos taas $|z| \geq 2$, pätee $|1+z| \geq |z| - 1 = \frac{1}{2}(|z| + |z| - 2) \geq \frac{1}{2}|z|$, joten näillä arvoilla voidaan käyttää arviota $|F(z)| \leq 2|z|^{-1}|z|^{p-1} = 2|z|^{p-2}$. Näin ollen saadaan helposti integraaleille (3.22) ylärajat kaaren pituuden avulla, jotka pätevät aina kun $0 < R_1 \leq \frac{1}{2}$ ja $R_2 \geq 2$,

$$\left| \oint_{\gamma_{R_1}^{\circlearrowleft}} F(z) dz \right| \leq 2\pi R_1 \cdot 2R_1^{p-1} = 4\pi R_1^p \rightarrow 0, \quad \text{kun } R_1 \rightarrow 0^+,$$

$$\left| \oint_{\gamma_{R_2}^{\circlearrowleft}} F(z) dz \right| \leq 2\pi R_2 \cdot 2R_2^{p-2} = 4\pi R_2^{p-1} \rightarrow 0, \quad \text{kun } R_2 \rightarrow \infty,$$

sillä oletettiin, että $0 < p < 1$. Näin ollen molemmat raja-arvoista (3.22) toteutuvat ja integraalin arvo saadaan yllä annetulla residylaskulla.

Logaritmin sisältävät integraalit

Yllä olevaan ideaa voidaan soveltaa myös muotoa

$$I := \int_0^\infty \ln x f(x) dx$$

oleviin integraaleihin, jossa f on meromorfinen funktio ilman nappoja positiivisella reaaliakselilla. Apufunktion F valinta on kuitenkin vähän hankalampi, sillä suoraviivaista määritelmää $F_1(z) := L(z)f(z)$ käyttäen pätee kaikilla $x > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (F_1(x+i\varepsilon) - F_1(x-i\varepsilon)) = \operatorname{Ln} x f(x) - (\operatorname{Ln} x + i2\pi)f(x) = -i2\pi f(x),$$

joten vaikka raja-arvoehdot (3.22) toteutuisivat valinnalla $F = F_1$, saataisiin residylauseesta pelkästään tulos

$$2\pi i \sum_n \operatorname{Res}(L(z)f(z), z_n) = -i2\pi \int_0^\infty f(x) dx,$$

Tämän avulla saadaan ainoastaan laskettua integraali

$$\int_0^\infty f(x) dx = - \sum_n \operatorname{Res}(L(z)f(z), z_n). \quad (3.24)$$

Määritelläänkin nyt $F_2(z) := L(z)^2 f(z)$, jolla on samat analyttisyysominaisuudet kuin mitä aiemman residylauseen sovellusta varten vaadittiin, ja toisaalta sille pätee kaikilla $x > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (F_2(x+i\varepsilon) - F_2(x-i\varepsilon)) = (\operatorname{Ln} x)^2 f(x) - (\operatorname{Ln} x + i2\pi)^2 f(x) = (-i4\pi \operatorname{Ln} x + 4\pi^2) f(x).$$

Näin ollen, jos raja-arvoehdot (3.22) toteutuvat kun $F = F_2$, saadaan residylauseesta tulokseksi

$$2\pi i \sum_n \operatorname{Res}(L(z)^2 f(z), z_n) = -i4\pi I + 4\pi^2 \int_0^\infty f(x) dx.$$

Yhdistämällä tämä tulokseen (3.24), seuraa lopulta myös laskukaava alkuperäisen integraalin arvolle residyjen avulla: **olettaen, että raja-arvoehdot (3.22) toteutuvat sekä funktiolle $F(z) = L(z)^2 f(z)$ että funktiolle $F(z) = L(z)f(z)$, pätee**

$$\int_0^\infty \ln x f(x) dx = -\frac{1}{2} \sum_n \operatorname{Res}(L(z)^2 f(z), z_n) + i\pi \sum_n \operatorname{Res}(L(z)f(z), z_n), \quad (3.25)$$

missä summataan yli kaikkien meromorfinen funktion f napapisteiden z_n .

Esimerkki 3.30 Kun $a > 0$, lasketaan integraali

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{a^2 + x^2} dx.$$

Ratkaisu: Tämä integraali on yllä annettua muotoa, kun $f(z) = (z^2 + a^2)^{-1}$. Koska $z^2 + a^2 = (z + ia)(z - ia)$ ja $a > 0$, on funktiolla f on kaksi ensimmäisen kertaluvun napaa $z_\pm = \pm ia$. Vastaavien funktioiden F_1 ja F_2 residyt saadaan siis laskettua suoraan raja-arvoista (merkitään selkeyden vuoksi navan merkkiä $\sigma = \pm 1$, jolloin $z^2 + a^2 = (z + i\sigma a)(z - i\sigma a)$)

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(L(z)f(z), \sigma ia) &= \lim_{z \rightarrow \sigma ia} \left((z - i\sigma a) \frac{L(z)}{(z + i\sigma a)(z - i\sigma a)} \right) = \lim_{z \rightarrow \sigma ia} \frac{L(z)}{z + i\sigma a} = \frac{L(i\sigma a)}{2i\sigma a}, \\ \operatorname{Res}(L(z)^2 f(z), \sigma ia) &= \lim_{z \rightarrow \sigma ia} \left((z - i\sigma a) \frac{L(z)^2}{(z + i\sigma a)(z - i\sigma a)} \right) = \frac{L(i\sigma a)^2}{2i\sigma a}. \end{aligned}$$

Tässä ia kuuluu positiiviselle imaginaariakselille ja $-ia$ negatiiviselle imaginaariakselille. Näin ollen,

$$L(i\sigma a) = \overline{\ln(-i\sigma a)} + i\pi = \begin{cases} \operatorname{Ln} a - i\frac{\pi}{2} + i\pi, & \text{kun } \sigma = +1, \\ \operatorname{Ln} a + i\frac{\pi}{2} + i\pi, & \text{kun } \sigma = -1, \end{cases}$$

joka voidaan ilmaista tiiviimmin muodossa $L(i\sigma a) = \operatorname{Ln} a - \sigma i\frac{\pi}{2} + i\pi$. Kaavan (3.25) oikea puoli antaa siis tässä tapauksessa

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=\pm 1} \left(-\frac{1}{2} \sigma \frac{L(i\sigma a)^2}{2ia} + i\pi \sigma \frac{L(i\sigma a)}{2ia} \right) &= \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \frac{L(i\sigma a)}{2ia} \left(-\frac{1}{2} L(i\sigma a) + i\pi \right) \\ &= \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{1}{2ia} \left(\sigma \operatorname{Ln} a + \sigma i\pi - i\frac{\pi}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \operatorname{Ln} a + i\frac{\pi}{2} + \sigma i\frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Termit, joissa on pariton määrä σ :n potensseja, summautuvat nolnaan, sillä $\sum_{\sigma=\pm 1} \sigma = 0$. Päädytään siis sievennettyyn muotoon

$$\sum_{\sigma=\pm 1} \frac{1}{2ia} i\frac{\pi}{4} \left[\operatorname{Ln} a + i\pi - 2 \left(-\frac{1}{2} \operatorname{Ln} a + i\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\pi \operatorname{Ln} a}{2a}.$$

Tämän jälkeen pitäisi enää tarkistaa, että kaavan (3.22) vaaditut raja-arvot häviävät. Sen voi tehdä samoin kuin Esimerkissä 3.29, esimerkiksi käyttämällä seuraavaa kolmioepäyhtälöstä seuraavaa arviota integraalissa esiintyville logaritmeille

$$|L(z)| = |\operatorname{Ln} |z| + i \operatorname{Arg}(-z) + i\pi| \leq |\operatorname{Ln} |z|| + 2\pi.$$

Nimittäjää voi arvioida kuten edellisessä esimerkissä, eli $|z^2 + a^2| \geq \frac{1}{2}a^2 > 0$ pienillä $|z|$, ja $|z^2 + a^2| \geq \frac{1}{2}|z|^2$ suurilla $|z|$. Funktiolle F_2 pätee siis

$$\left| \oint_{\gamma_{R_1}^{\circlearrowleft}} F_2(z) dz \right| \leq 2\pi R_1 \cdot \frac{2}{a^2} (\ln R_1^{-1} + 2\pi)^2 \rightarrow 0, \quad \text{kun } R_1 \rightarrow 0^+,$$

$$\left| \oint_{\gamma_{R_2}^{\circlearrowleft}} F_2(z) dz \right| \leq 2\pi R_2 \cdot 2R_2^{-2} (\ln R_2 + 2\pi)^2 \rightarrow 0, \quad \text{kun } R_2 \rightarrow \infty,$$

ja itse asiassa samoja ylärajoja voi käyttää myös funktiolle F_1 . Näin ollen kaikki vaadituista raja-arvoista menevät nollaan ja integraalin arvo saadaan yllä annetulla residylaskulla.

Vastaus: Kun $a > 0$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

Luku 4

Lisää analyttisistä funktioista

4.1 Äärettömyyspiste ja Riemannin pallo

Kompleksianalyysia on usein hyödyllistä ajatella laajentamalla kompleksitason määritelmä siten, että siihen lisätään äärettömyyspiste, samoin kuin reaaliakselilla kannattaa joskus käsitellä laajennetulla reaaliakselilla $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Päinvastoin kuin reaaliakselilla erityisesti analyttisiä funktioita käsiteltäessä on parasta unohtaa ”suunta”, josta äärettömyyttä lähestytään. Tämä saadaan aikaan lisäämällä kompleksitasoon vain yksi piste, eli tarkastelemalla **laajennettua kompleksitasoa** $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, jota tässä monisteessa merkitään \mathbb{C}_∞ (muita usein esiintyviä vaihtoehtoisia merkintöjä ovat $\hat{\mathbb{C}}$ ja $\bar{\mathbb{C}}$).

Lisättyyn joukkoon määritellään tämän jälkeen metriikka käyttämällä kuvausta, jolla laajennetun kompleksitason pisteet voi samastaa pallonpinnan kanssa: näin saatua avaruutta kutsutaan **Riemannin palloksi**.¹ Samastaminen tapahtuu seuraavan kuvauksen avulla, jota kutsutaan *stereografiseksi projektioksi*: kuvauksena yksikköpallolta

$$S^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = 1\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 1\} \quad (4.1)$$

laajennettuun kompleksitasoon \mathbb{C}_∞ yksi mahdollinen määritelmä stereografiselle projektiolle on kuvaus

$$(a, b, c) \mapsto \left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c} \right),$$

joka kuvaa ”etelänavan” $(0, 0, -1)$ origoon, ”päiväntasaajan” $(a, b, 0)$ yksikköympyrälle ja ”pohjoisnavan” $(0, 0, 1)$ tasoon lisättyyn äärettömyyspisteeseen ∞ . Tätä vastaava käänteiskuvaus $\mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$ on

$$z \mapsto \frac{1}{|z|^2 + 1} (2 \operatorname{Re} z, 2 \operatorname{Im} z, |z|^2 - 1).$$

Stereografisella projektiolla on myös suoraviivainen geometrinen tulkinta kuvauksena, joka samastaa tason pisteen vastaavaan yksikköpallon pisteeseen, joka saavutetaan tason pisteen ja pallon pohjoisnavan läpi kulkevan suoran leikkauspisteessä (ks. https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection).

Riemannin pallolla on sovelluksia erityisesti konformimuunnosten kautta, jotka vastaavat kulkien säilyttäviä tason muunnoksia. Tämän muunnoksen suhteen invariantteja kenttäteorioita kutsutaan *konformikenttäteorioiksi* (engl. *conformal field theory*) ja niihin törmää esimerkiksi tietyissä statistisen fysiikan ja kvanttikenttäteorioiden ongelmissa. Lisää Riemannin pallon ominaisuuksista ja sovelluksia kvanttimekaniikassa löytyy Wikipediasta https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sphere.

¹(MAT) Annettu kuvaus on itse asiassa homeomorfismi, joten topologisestikin näin saatu avaruus on yhtenevä pallonpinnan S^2 kanssa.

Myös tätä äärettömyyspistettä voidaan käsitellä analyyttisen funktion mahdollisena erikoispisteenä. Se luokittelu voidaan tehdä joko suoraan Laurentin sarjojen kautta tai käyttäen muuttujanvaihtoa $w = 1/z$. Suoraviivaisessa lähestymistavassa alkuperäinen määritelmä käännetään pääläelleen.

Määritelmä 4.1 *Olkoon f funktio, joka on analyyttinen jonkin säteen $R_0 \geq 0$ ulkopuolella, eli pisteissä z , joille $|z| > R_0$. Tällöin se voidaan kehittää Laurentin sarjaksi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, joka suppee kun $|z| > R_0$.*

- Jos $a_n = 0$ kaikilla $n > 0$, niin ∞ on **poistuva erikoispiste**.
- Jos $a_n = 0$ kaikilla $n > m > 0$ ja $a_m \neq 0$, niin ∞ on **napa**, jonka kertaluku on m .
- Jos $|\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}| = \infty$ eli jos Laurentin sarjan säännöllinen osa ei ole äärellisen pituinen, niin ∞ on **oleellinen erikoispiste**.

Muuttujanvaihdolla $w = 1/z$ saadaan sarjaesitys, joka pätee kun $0 < |w| < 1/R_0$,

$$f(1/w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} w^m.$$

Nyt jos origo on tämän funktion poistuva erikoispiste, napa, tai oleellinen erikoispiste, niin ∞ on vastaavasti alkuperäisen funktion poistuva erikoispiste, napa tai oleellinen erikoispiste.

Esimerkki 4.2 Tarkastellaan kolmea eri tapausta.

- $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ on polynomifunktio, jonka aste on n , eli $a_n \neq 0$. Tällöin sillä on kertaluvun n napa äärettömydessä.
- Eksponenttifunktiolla äärettömyys on oleellinen erikoispiste: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
- Äärettömyys on toisen kertaluvun napa rationaalifunktiolle

$$\frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^2 - z - 3}.$$

Määritelmä 4.3 *Jos ääretön on funktion f eristetty erikoispiste, on sen residy äärettömydessä*

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R^{\circlearrowleft}} f(z) dz = -a_{-1}, \quad (4.2)$$

jossa $R > R_0$, kun R_0 on jokin säde kuten Määritelmässä 4.1 ja a_{-1} siinä annetun Laurentin sarjan termin z^{-1} kerroin.

Tässä valitaan kiertosuunta negatiiviseksi, jotta se olisi positiivinen muuttujanvaihdon $w = 1/z$ jälkeen. Tästä konventiosta on myös se hyöty, että esimerkiksi tavallisille rationaalifunktiolle pätee seuraava residyjen summasääntö.

Lause 4.4 *Olkoon funktio f analyyttinen joukossa \mathbb{C}_{∞} lukuun ottamatta eristettyjä erikoispisteitä z_1, \dots, z_m , $m \in \mathbb{N}_0$, sekä lisäksi mahdollisesti erikoispistettä ∞ . Tällöin sen residyjen summa on nolla:*

$$\sum_{n=1}^m \operatorname{Res}(f, z_n) + \operatorname{Res}(f, \infty) = 0.$$

TODISTUS Seuraa suoraan residylauseesta, sillä $\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R^{\circlearrowleft}} f(z) dz$ □

Residy äärettömyydessä voidaan toki laskea myös apufunktion $f(1/t)$ avulla. Jos merkitään sen origon ympärillä kehitettyä Laurentin sarjaa $\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m t^m$, on siinä $b_1 = a_{-1}$, joten

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -b_1 = \operatorname{Res}(-t^{-2}f(1/t), t=0).$$

4.2 (Lisä) Argumentin periaate ja Rouchen lause

Tarkastellaan aluetta Ω ja jotain sen sisällä olevaa suljettua kiekkoa $D := \overline{B}_R(z_0) \subset \Omega$. Olkoon γ kiekon kehää kerran positiiviseen suuntaan kiertävä polku, eli $\gamma := \gamma_{R, z_0}^{\circlearrowleft}$. Oletetaan, että f on funktio, joka on analyyttinen Ω :ssa lukuun ottamatta mahdollisesti se sisälle jääviä napoja, ja lisäksi vaaditaan, että f ei ole identtisesti nolla kiekossa D . Merkitään N_f :llä funktion f nollakohtien lukumäärää kiekossa D , kertaluvullaan painotettuina, ja P_f :llä funktion f napojen lukumäärää kiekossa D , nekin kertaluvullaan painotettuina. Koska sekä navat että nollakohdat ovat näillä oletuksilla eristettyjä pisteitä, voi niitä olla korkeintaan äärellinen määrä kiekossa D , eli oletuksista seuraa suoraan, että $0 \leq N_f, P_f < \infty$. Näin ollen funktio $F(z) := f'(z)/f(z)$ (eli funktion $\ln f(z)$ derivaatta) on analyyttinen kiekon D ympäristössä pois lukien kaikki f :n navat ja nollakohdat, joita on äärellinen määrä.

Oletetaan tämän jälkeen, että kiekko D on valittu siten, että mikään navoista tai nollakohdista ei osu sen reunalle. Tällöin N_f ja P_f laskevat nollakohtia ja napoja käyrän γ sisälle jäävissä pisteissä. Tällöin, jos $z_0 \in D$ on napa tai nollakohta, pätee sille $\operatorname{Ind}_{\gamma}(z_0) = +1$. Toisaalta Lauseista 3.1 ja 3.11 seuraa, että löytyy pisteen z_0 ympäristössä analyyttinen funktio g , jolle $g(z_0) \neq 0$ ja $f(z) = (z - z_0)^{m(z_0)}g(z)$, missä määritellään $m(z_0) := m > 0$, jos z_0 on kertaluvun m nollakohta, ja $m(z_0) = -m < 0$, jos z_0 on kertaluvun m napa. Suoralla laskulla saadaan tästä kyseisen pisteen ympäristössä pätevä kaava funktiolle

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z_0)}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Koska $g(z_0) \neq 0$, on tässä toinen termi analyyttinen pisteessä $z = z_0$, joten z_0 on funktion F ensimmäisen kertaluvun napa ja sen residyksi saadaan $\operatorname{Res}(F, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)F(z)] = m(z_0)$. Näin ollen saadaan residylauseesta tulos

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{2\pi i} = \sum_{z_0} m(z_0) = N_f - P_f.$$

Määritellään uusi kompleksitason polku $\Gamma(t) := f(\gamma(t))$, jolle pätee ketjusäännön mukaan

$$\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t))}.$$

Näin ollen suoraan viivaintegraalin määritelmää käyttäen

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{2\pi i} = \int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) \frac{dt}{2\pi i} = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} \frac{dt}{2\pi i} = \oint_{\Gamma} \frac{1}{z} \frac{dz}{2\pi i} = \operatorname{Ind}_{\Gamma}(0).$$

Tätä tulosta kutsutaan ”argumentin periaatteeksi”, koska vasemmalla puolella oleva integraali voidaan tulkita $f(z)$:n argumentin muutokseksi suljetulla polulla γ .

Tästä seuraa erityisesti, että jos funktiolla f ei ole lainkaan napoja kiekon D sisällä, niin sen nollakohtien lukumäärä säilyy vakiona, jos funktiota f muutetaan tavalla, joka säilyttää sen analyyttisyyden kiekossa, eikä muuta liikaa sen arvoja kiekon reunalla. Tähän ominaisuuteen perustuu seuraava tulos, jonka avulla voi yrittää arvioida analyyttisen funktion nollakohtien lukumäärää jossain annetussa alueessa (todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [3, Lause 10.43 ja Tehtävä 10.24]).

Lause 4.5 (Rouchén lause) *Olkoon $K \subset \mathbb{C}$ suljettu ja rajoitettu ja $\Omega \subset K$ suurin mahdollinen avoin joukko, joka sisältyy K :hon. Oletetaan, että funktiot f ja g ovat jatkuvia joukossa K ja analyyttisiä joukossa Ω .*

Jos g on riittävän lähellä funktiota f joukossa $K \setminus \Omega$,

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)|, \quad \text{kun } z \in K \text{ ja } z \notin \Omega,$$

on funktioilla f ja g sama määrä nollakohtia joukossa Ω .

Lauseen oletukset toteutuvat esimerkiksi kun K on jokin suljettu kiekko $\overline{B}_R(z_0)$ ja Ω on sen sisälle jäävä avoin kiekko $B_R(z_0)$. Tällöin $K \setminus \Omega$ koostuu kiekon kehän pisteistä.

Lisätietoa ja esimerkkejä siitä, miten lausetta voi soveltaa käytännössä löytyy Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Rouch%C3%A9%27s_theorem).

4.3 (Lisä) Meromorfinen funktion napakehitelmä

Edellä on nähty, kuinka analyyttisen funktion pystyy esittämään Taylorin ja Laurentin sarjojen avulla. Näiden esitysten ongelma on kuitenkin se, että esitystä joutuu yleensä vaihtamaan sitä mukaa kun kehityspistettä muutetaan. Tässä ja seuraavassa luvussa annetaan kaksi muuta tapaa esittää analyyttisiä funktioita sarjoina, jotka suppenevat koko määrittelyalueessa. Näiden sarjojen rakentaminen on kuitenkin selvästi työläämpää kuin Taylorin ja Laurentin sarjojen.

Esitetään ensin, miten ns. meromorfinen funktioille voidaan johtaa niiden koko määrittelyjoukossa toimiva **napakehitelmä**. Funktion f on meromorfinen, jos se muotoa $f = F/G$, jossa F ja G ovat analyyttisiä koko avoimessa joukossa Ω . Kuten edellä nähtiin, voi tällöin funktiolle f syntyä napoja nimittäjän nollakohtiin, mutta nämä ovat toisaalta kaikki eristettyjä.

Napakehitelmä on helpoin johtaa tapauksessa, jossa funktio f häviää määrittelyalueensa reunaan, kuten esimerkiksi äärettömyyspistettä lähestyttäessä. Oletetaan tätä varten, että γ_n on jono suljettuja polkuja, joilla on seuraavat kaksi ominaisuutta:

1. Jokainen piste $z \in \Omega$ jää käyrien γ_n sisälle ($\text{Ind}_{\gamma_n}(z) = 1$) alkaen jostain arvosta, eli kaikille $n \geq n_0$, jossa n_0 saa riippua pisteestä z .
2. Käyrien yli otetut viivaintegraalit häviävät rajalla $n \rightarrow \infty$; tarkemmin, jokaisella $z \in \Omega$, joka ei ole f :n napa, vaaditaan

$$\oint_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

Tällöin voidaan soveltaa suoraan residylausetta näihin integraaleihin, ja kun n on riittävän suuri, saadaan

$$\oint_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \frac{dz}{2\pi i} = \text{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z\right) + \sum_{z_i \text{ on napa käyrän } \gamma_n \text{ sisällä}} \text{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i\right).$$

Ensimmäisessä termissä on joko $f(z) \neq 0$, jolloin $\zeta = z$ on ensimmäisen kertaluvun napa ja $\text{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z\right) = \lim_{\zeta \rightarrow z} f(\zeta) = f(z)$, tai $f(z) = 0$, jolloin $\zeta = z$ on poistuva erikoispiste ja $\text{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z\right) = 0 = f(z)$. Kun $n \rightarrow \infty$, jäävät lopulta kaikki napapisteetkin käyrien γ_n sisään, joten ottamalla raja $n \rightarrow \infty$, päädytään seuraavaan sarjaesitykseen, joka pätee kaikilla $z \in \Omega$, jotka eivät ole napapisteitä,

$$f(z) = - \sum_{z_i \text{ on funktion } f \text{ napa}} \text{Res}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i\right).$$

Numeroidaan tässä esiintyvät napapisteet jonoksi (z_1, z_2, \dots) siinä järjestyksessä, jossa ne jäävät käyrien γ_n sisälle. Tällöin yllä olevan summa voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(z) = - \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{Res} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i \right).$$

Jäljelle jäävissä residyissä on oletuksen mukaan $z \neq z_i$, joten kerroin $(\zeta - z)^{-1}$ on analyyttinen kehityspisteessä. Toisaalta $\zeta = z_i$ on funktion $f(\zeta)$ napa, joten sen Laurentin sarjan pääosa on äärellisen mittainen: merkitään sitä

$$P_i(\zeta) := \sum_{n=1}^{m_i} a_{-n,i} \frac{1}{(\zeta - z_i)^n},$$

missä $m_i \geq 1$ on navan z_i aste ja $a_{m,i}$ ovat sen ympärillä kehitetyn f :n Laurentin sarjan kertoimet. Koska pisteen z_i ympäristössä on Laurentin sarjan säännöllinen osa, $f - P_i$, analyyttinen, on myös $(f(\zeta) - P_i(\zeta))/(\zeta - z)$ analyyttinen pisteessä z_i , ja sen residy tässä pisteessä on nolla. Tästä seuraa, että

$$\operatorname{Res} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i \right) = \operatorname{Res} \left(\frac{P_i(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i \right).$$

Tästä muokkaamisesta on se hyöty, että funktio $\frac{P_i(\zeta)}{\zeta - z}$ onkin määritelty koko laajennetussa kompleksitasossa \mathbb{C}_∞ , lukuun ottamatta kahta napaa pisteissä $\zeta = z$ ja $\zeta = z_i$ (funktio menee kohti nollaa, kun $|z| \rightarrow \infty$, joten äärettömyyspiste on sen poistuva erikoispiste). Lauseen 4.4 mukaan sen residyjen summa on nolla, joten

$$- \operatorname{Res} \left(\frac{P_i(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z_i \right) = \operatorname{Res} \left(\frac{P_i(\zeta)}{\zeta - z}, \zeta = z \right) = P_i(z),$$

missä viimeisessä yhtäsuuruudessa käytettiin jo aiemmin funktiolle f johdettua yleistä ominaisuutta.

Ollaan siis nähty kuinka kahdesta tehdystä oletuksesta seuraa kaikissa f :n analyyttisyysalueen pisteissä suppeneva f :n **napakehitelmä**:

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i(z),$$

missä P_i on funktion napapisteen z_i ympäristössä kehitetyn Laurentin sarjan pääosaa vastaava rationaalifunktio. Tätä tulosta voi joskus yleistää myös tapauksiin, joissa jälkimmäinen ehdoista $(\oint_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0)$ ei toteudu, vähentämällä ensin funktiosta f jokin sopivasti valittu polynomi tai kokonainen funktio.

Koska jokainen yllä olevan sarjan osasummista, $\sum_{i=1}^N P_i(z)$, on rationaalifunktio, seuraa yllä olevasta laskusta erityisesti, että annettua funktiota f voidaan approksimoida rationaalifunktioilla. Tämä tulos pätee itse asiassa aina, kuten seuraavasta tuloksesta näkee (Lauseen todistuksen ja tarkempia yksityiskohtia siitä, millaisia rationaalifunktiota siinä voi käyttää, löytyy kohdista [3, Lause 13.8 ja 13.9]).

Lause 4.6 (Rungen lause) *Olkkoon U kompleksitason avoin joukko ja f siinä määritelty analyyttinen funktio. Tällöin löytyy kahden polynomin osamääränä tehdyt rationaalifunktiot R_n , $n \in \mathbb{N}$, joilla $R_n(z) \rightarrow f(z)$ kaikilla $z \in U$. Suppeneminen on lisäksi tasaista jokaisessa joukon Ω kompaktissa osajoukossa.*

Lyhyesti: *Analyyttistä funktiota voidaan aina approksimoida mielivaltaisen tarkasti sopivan rationaalifunktion avulla.* Approksimaation tarkkuus voi heiketä joukon reunaa lähestyttäessä, mutta virhe voidaan pitää mielivaltaisen pienenä joukossa, joka ei kosketa U :n reunaa. Lisätietoa ja esimerkkejä siitä, miten lausetta voi soveltaa käytännössä löytyy Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_theorem ja https://en.wikipedia.org/wiki/Mittag-Leffler%27s_theorem).

Esimerkki 4.7 Johda meromorfinen funktion $\cot z = \cos z / \sin z$ napakehitelmä.

Ratkaisu: Valitaan yllä $\Omega = \mathbb{C}$ ja $F(z) = \cos z$, $G(z) = \sin z$, jolloin $f = F/G$ on meromorfinen funktio, jolla on navat sinin nollakohdissa, eli pisteissä $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Kaikki navat ovat ensimmäistä kertalukua, ja L'Hôpitalin säännöstä saadaan

$$\operatorname{Res}(f, \pi k) = \lim_{z \rightarrow \pi k} ((z - \pi k) \cot z) = \lim_{z \rightarrow \pi k} \frac{(z - \pi k) \cos z}{\sin z} = \lim_{z \rightarrow \pi k} \frac{\cos z - (z - \pi k) \sin z}{\cos z} = 1.$$

Koska tämä raja-arvo ei ole ääretön eikä nolla, täytyy funktion f navan todellakin olla ensimmäistä kertalukua. Tästä tiedosta ja residyn arvosta saadaan suoraan funktion f Laurentin sarjan pääosaksi pisteessä πk termi

$$P_k(z) := \frac{1}{z - \pi k}.$$

Valitaan tämän jälkeen yllä oleviksi poluiksi ympyränkehää kiertävän polun $\gamma_n := \gamma_{R_n}^{\circlearrowleft}$, jossa säteet R_n valitaan siten, että niitä vastaavat ympyrät kulkevat mahdollisimman kaukaa funktion navoista: olkoon $R_n := \pi(2n + 1)/2$, $n \in \mathbb{N}$. Tämän käyrän sisään jäävät navat, jotka vastaavat arvoja $|k| \leq n$, joten yllä oleva argumentti antaa napakehitelmän vastaavaksi osasummaksi

$$\sum_{k=-n}^n \frac{1}{z - \pi k} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{z + \pi k} + \frac{1}{z - \pi k} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^n \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}.$$

Tästä osasummien sieventämisestä on se hyöty, että nyt jäljelle jäävän sarjan termit käyttäytyvät kuten $O(k^{-2})$, kun $k \rightarrow \infty$, joten sarja on itseisesti summautuva.

Napakehitelmän johdon työläin osa onkin todistaa, että toinen yllä olevista ehdoista toteutuu, eli että $\oint_{\gamma_n} (\cot \zeta) / (\zeta - z) d\zeta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Tämä seuraa esimerkiksi tutkimalla ylä- ja alakehän viivaintegraaleja erikseen, kirjoittamalla integraali auki parametriesityksessään ja sen jälkeen käyttämällä jompaakumpaa alla olevista kotangentin eksponenttiesityksistä,

$$\cot \zeta = i \frac{1 + e^{-i2\zeta}}{1 - e^{-i2\zeta}} = -i \frac{1 + e^{i2\zeta}}{1 - e^{i2\zeta}},$$

osoittamaan, että saatu integrandi on rajoitettu tasaisesti indeksin n suhteen. Näin ollen on mahdollista soveltaa Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta (https://en.wikipedia.org/wiki/Dominated_convergence_theorem), ja siirtää raja-arvo integraalin sisälle. Tästä saadaan lopulta tulokseksi nolla, sillä $(\zeta - z)^{-1} \rightarrow 0$ kun $|\zeta| \rightarrow \infty$.

Vastaus: Lopputulokseksi saadaan, että jos $\sin z \neq 0$ eli $z \notin \pi\mathbb{Z}$, pätee

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}.$$

4.4 (Lisä) Kokonaisen funktion tulokehitelmä

Algebran peruslauseen mukaan jokaisen polynomi voidaan esittää nollakohtiensa avulla tulomuodossa. Tästä esityksestä oli hyötyä erityisesti polynomilla jaettaessa. Kaikkialla derivoituvat eli kokonaiset funktiot muistuttavat monella tapaa polynomeja ja itse asiassa niillekin voidaan aina johtaa algebran peruslauseita muistuttava esitys nollakohtiensa avulla.

Vaikka kokonaisen funktion nollakohdat ovat eristettyjä, niitä voi olla ääretön määrä. Ääretön tulo määritellään samalla tavalla kuin ääretön summa, käyttäen osatulonjonon konvergenssia. Eli, jos (w_n) on kompleksilukujono, niin

$$\prod_{n=1}^{\infty} w_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N w_n,$$

ja tulo *suppenee*, jos raja-arvo on olemassa, ja muuten sanotaan, että ääretön tulo hajaantuu. Kuten summille, olisi toivottavaa, ettei tulon arvo riippuisi järjestyksestä, missä termit kerrotaan keskenään. Tämän takaa esimerkiksi seuraava tulos.

Lause 4.8 Kompleksilukujonon (w_n) muodostama tulo suppenee nolasta poikkeavaa rajaa kohti, jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln w_n| < \infty.$$

Tällöin tulon arvo ei riipu kertomisjärjestyksestä ja pätee

$$\prod_{n=1}^{\infty} w_n = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln w_n \right).$$

Suurin ongelma kokonaisten funktioiden tuloesityksen rakentamisessa tulee vaatimuksesta, että siinä esiintyvä tulo suppenee. Alla on tuloesityksestä kaksi eri versiota, joista ensimmäinen muistuttaa algebran peruslausetta, mutta vaatii lisäoletuksen kokonaisten funktioiden nollakohtien käytöksestä ääretöntä lähestyttäessä, ja toinen antaa yleisen hieman monimutkaisemman esityksen.

Lause 4.9 (Weierstrassin tulokehitelmä, helpompi erikoistapaus) Oletetaan, että f on kokonainen funktio, jolla on kertaluvun $m \geq 0$ nollakohta origossa ($m = 0$, jos $f(0) \neq 0$). Kerätään funktion f nollakohdat jonoksi (z_1, z_2, \dots) siten, että jokainen nollakohta toistuu jonossa kertalukunsa verran. Jos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-1} < \infty, \quad (4.3)$$

löytyy kokonainen funktio g , jolla

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n} \right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.4)$$

Lause 4.10 (Weierstrassin tulokehitelmä, yleinen muoto) Olkoon f kokonainen funktio, jolla on kertaluvun $m \geq 0$ nollakohta origossa ($m = 0$, jos $f(0) \neq 0$). Kerätään funktion f nollakohdat jonoksi (z_1, z_2, \dots) siten, että jokainen nollakohta toistuu jonossa kertalukunsa verran. Tällöin löytyy kokonainen funktio g ja jono kokonaislukuja $p_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, joilla

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right), \quad (4.5)$$

missä $E_p(z)$ määritellään kaavalla

$$E_p(z) = (1 - z) \times \begin{cases} 1, & \text{kun } p = 0, \\ \exp \left(\sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k} \right), & \text{kun } p > 0. \end{cases}$$

Jonon (p_n) täytyy tässä toteuttaa ehto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{1+p_n} < \infty, \quad \text{kaikilla } r > 0. \quad (4.6)$$

Lisätietoa ja esimerkkejä siitä, miten lausetta voi soveltaa käytännössä löytyy Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_factorization_theorem). Lauseen todistus ja tarkempia matemaattisia yksityiskohtia löytyy lähteestä [3, Luku 15 ja Lause 15.10].

Huomautus 4.11 Lauseessa 4.10 esiintyvä jono (p_n) ja funktio g eivät ole yksikäsitteisiä: esimerkiksi sinille pätee myös alla olevan esimerkin lisäksi myös tulokehitelmä, jossa $p_n = 1$,

$$\sin z = z \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{\frac{z}{\pi n}} \left(1 - \frac{z}{\pi n} \right).$$

Tavoitteena on yleensä pyrkiä kehitelmään, jossa jonon p_n arvot valitaan mahdollisimman lähelle nollaa. Niitä ei kuitenkaan aina voi valita kaikkia nollassi, sillä ehto (4.3) ei välttämättä toteudu kun $p_n = 0$.

Esimerkki 4.12 Johda jokin tulokehitelmä sinille.

Ratkaisu: Koska sinillä on ensimmäisen kertaluvun nollakohta origossa, tutkitaan sen sijaan funktiota $\operatorname{sinc}(z) = \sin z/z$, joka on analyyttinen koko kompleksitasossa ja $\operatorname{sinc}(0) = 1$, niin kuin Esimerkissä 3.8 nähtiin. Funktio $1/\operatorname{sinc}$ on analyyttinen lukuun ottamatta ensimmäisen kertaluvun napoja pisteissä $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Näin ollen sekä f ja $1/f$ ovat analyyttisiä yhdesti yhtenäisessä alueessa $U := \mathbb{C} \setminus (]-\infty, -\pi] \cup [\pi, \infty[)$, joten² myös funktio $g(z) := \ln \operatorname{sinc}(z)$ on analyyttinen U :ssa ja sille pätee $g(0) = \ln 1 = 0$. Ketjusäännön ja käänteisfunktion derivointisäännön mukaan pätee

$$g'(z) = \frac{d}{dz} \ln \operatorname{sinc}(z) = \frac{1}{\operatorname{sinc}(z)} \frac{d}{dz} \operatorname{sinc}(z) = \frac{z}{\sin z} \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} = \cot z - \frac{1}{z}. \quad (4.7)$$

Käyttämällä esimerkissä 4.7 johdettua kotangenttin napakehitelmää saadaan sarjaesitys

$$g'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dz} \ln \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right).$$

Integroimalla tätä suoraa $\gamma_{0 \rightarrow z}$ pitkin saadaan

$$g(z) = g(z) - g(0) = \int_{\gamma_{0 \rightarrow z}} g'(w) dw = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma_{0 \rightarrow z}} \frac{d}{dw} \ln \left(1 - \frac{w^2}{k^2\pi^2} \right) dw = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right),$$

missä toisessa yhtäsuuruudessa on tehty integroinnin ja summauksen järjestyksen vaihto. Saadaan

$$\begin{aligned} \operatorname{sinc}(z) = e^{g(z)} &= \exp \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \ln \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(\sum_{k=1}^N \ln \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2} \right). \end{aligned}$$

Lopuksi täytyy vielä kertoa yhtälö z :lla ja käyttää tietoa, että oikean puolen ääretön tulo määrittelee analyyttisen funktion myös U :n ulkopuolelle jäävissä pisteissä (ks. [3, Lause 15.6]). Lauseen 3.3 mukaan on tämä jatkettu kokonainen funktio sama kuin sinc .

Vastaus: Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2} \right).$$

²(MAT) Tarkemmin (ks. [3, Lause 13.11]), löytyy $g \in H(\Omega)$, jolla $\operatorname{sinc}(z) = e^{g(z)}$ kaikilla $z \in U$. Tässä ei välttämättä voi käyttää logaritmin päähaaraa, vaan täytyy rakentaa funktio g integroimalla kaavan (4.7) derivaattaa, niin kuin Esimerkissä 2.46 tehtiin. Tästä saadaan integraalifunktio koko alueeseen U , sillä se on yhdesti yhtenäinen (ks. Lause 1.37, kohta 2).

Luku 5

Eulerin funktiot ja asymptoottiset sarjat

5.1 Analyyttinen jatkaminen

Luvussa 3.1 nähtiin, että jos kaksi analyyttistä funktiota ovat samoja jossain sopivassa joukossa, esimerkiksi jollain kompleksitason janalla, täytyy näiden kahden funktion olla samoja kaikkialla määrittelyalueessaan. Tätä ideaa käytetään muodostamaan **analyyttisiä jatkeita** funktioille, jotka on määritelty vain jossain kompleksitason epätyhjässä osajoukossa U , esimerkiksi jossain avoimessa kiekossa. Nähdään nimittäin, että *analyttiset jatkeet annettuun alueeseen ovat yksikäsitteisiä*: Olkoon Ω on jokin alue, $U \subset \Omega$ ja oletetaan, että $F, G \in H(\Omega)$ ovat funktion $f \in H(U)$ jatkeita. Tällöin oletusten mukaan $F(z) = f(z) = G(z)$ kaikilla $z \in U$. Koska joukko U on avoin ja epätyhjä, sisältää se jonkin avoimen kiekon, ja toisaalta $U \subset \Omega$, joka on yhtenäinen, joten täytyy olla $F = G$ koko joukossa Ω .

Fysiikassa yhtälöitä ratkaistaan usein sarjakehitelmien avulla, esimerkiksi potenssisarjoina. Nämä sarjat eivät kuitenkaan tyypillisesti suppene kaikkialla kompleksitasossa tai reaaliakselilla. Mitä tehdä, jos pitäisi kuitenkin tietää ratkaisufunktion arvo tuon sarjan suppenemisalueen ulkopuolella? Usein vastaus löytyy juuri analyttisen jatkeen avulla, jonka voi periaatteessa aina tehdä Taylorin sarjojen kautta, niin kuin alla olevassa esimerkissä selitetään.

Esimerkki 5.1 Oletetaan, että f_0 on määritelty potenssisarjana $f_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, jonka suppenemissäde on $R_0 > 0$, eli avoimessa kiekossa $D_0 := B_{R_0}(z_0)$ eli arvoille $|z-z_0| < R_0$. Jos $z_1 \in D_0$, on funktio f_0 siis analyttinen tämän pisteen ympäristössä, joten sille löytyy Taylorin sarja; merkitään tämän Taylorin sarjan suppenemissädettä $R_1 > 0$ ja sarjan avoimessa kiekossa $D_1 := B_{R_1}(z_1)$ määrittelemää funktiota f_1 . Lauseen 2.40 mukaan täytyy olla $f_1(z) = f_0(z)$ kaikilla $z \in B_\varepsilon(z_1)$, kunhan $\varepsilon > 0$ on niin pieni, että $B_\varepsilon(z_1) \subset D_0 \cap D_1$ (esimerkiksi $\varepsilon := R_0 - |z_1 - z_0| > 0$ käy tähän, minkä näkee kolmioepäyhtälön avulla). Voidaan siis määritellä funktion f_1 laajennus F yhdisteeseen $D_0 \cup D_1$ asettamalla $F(z) = f_0(z)$, kun $z \in D_0$, ja $F(z) = f_1(z)$, kun $z \in D_1 \setminus D_0$ ja tämä funktio on analyttinen, sillä sekä f_0 että f_1 ovat analyttisiä. Jos $R_1 > R_0 - |z_1 - z_0|$ on uusi joukko suurempi kuin alkuperäinen, jolloin saadaan aito analyttinen jatke funktiolle f_0 .

Esimerkki 5.2 Konkreettinen versio edellisestä esimerkistä: Määritellään

$$f_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad \text{kun } |z| < 2.$$

Tämä on geometrinen sarja, joka suppenee kaikilla $|z/2| < 1$ eli kun $|z| < 2$. Näissä pisteissä sarjan arvoksi saadaan

$$f_0(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{2}{2 - z}.$$

Määrittelyalue sisältää pisteen $z_1 = -1$ ja, kun merkitään $w = z - z_1 = z + 1$, saadaan laskettua pisteen z_1 ympärillä kehitetty Taylorin sarja taas geometrisen sarjan avulla:

$$f_0(z) = \frac{2}{2-z} = \frac{2}{3-w} = \frac{2}{3} \frac{1}{1-\frac{w}{3}} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} (z+1)^n.$$

Määritellään f_1 saadun sarjan avulla koko sen suppenemissäteen sisällä eli, kun $|w| < 3$,

$$f_1(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} (z+1)^n, \quad \text{kun } |z+1| < 3.$$

Tässä erikoistapauksessa käykin niin, että f_1 antaa suoraan funktion f_0 analyttisen jatkeen, sillä kolmioepäyhtälön perusteella, jos $|z| < 2$, on myös $|z+1| \leq |z| + 1 < 3$. (Valitsemalla kehityspisteeksi $z_2 = i$ olisi saatu Taylorin sarja, joka suppenee kun $|z-i| < \sqrt{5}$, eikä kumpikaan suppenemisalue ole tällöin toisen osajoukko.)

Yllä olevaa tulosta iteroimalla saadaan aikaan *kiekkoketjua pitkin tapahtuva analyttinen jatke*: Olkoon f_0 analyttinen funktio avoimessa kiekossa $D_0 = B_{R_0}(z_0)$ ja (D_0, D_1, \dots, D_n) muodostaa äärellisen jonon avoimia kiekkoja, joista kaksi peräkkäistä aina leikkaavat toisiaan (eli $D_{i-1} \cap D_i \neq \emptyset$ kun $i = 1, 2, \dots, n$). Jos tällöin voidaan aina jatkaa analyttinen $f_i \in H(D_i)$ analyttisesti funktioksi määrittelemällä $f_{i+1} \in H(D_{i+1})$ funktion f_i kiekon D_{i+1} keskipisteessä kehitetyn Taylorin sarjan avulla, sanotaan, että jono $(f_i)_{i=1}^n$ on kiekkoketjua (D_0, D_1, \dots, D_n) pitkin tehty funktion f_0 analyttinen jatke. Erityisesti tällöin sanotaan, että *funktiolle f_0 löytyy kiekkoketjua (D_0, D_1, \dots, D_n) pitkin tehty analyttinen jatke*.

Jos $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ on jokin polku kompleksitasossa, joka alkaa kiekon keskipisteestä z_0 , voidaan vastaavalla tavalla tehdä f_0 :n **analyttinen jatke polkua γ pitkin**. Oletetaan tätä varten, että löytyy parametrivälin äärellinen jako $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, jossa $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = \beta$, ja tähän jakoon liittyvä ketju avoimia kiekkoja $(D_0, D_1, D_2, \dots, D_n)$, joilla polun pätkä parametreilla $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ sisältyy aina kiekkoon D_i (eli $\gamma(t) \in D_i$ aina kun $\alpha_{i-1} \leq t \leq \alpha_i$ ja $1 \leq i \leq n$). Jos löytyy jokin tällainen jako ja ketju (D_0, D_1, \dots, D_n) siihen liittyviä kiekkoja, joita pitkin funktiolla f_0 on analyttinen jatke, sanotaan että *funktio f_0 voidaan jatkaa analyttisesti polkua γ pitkin*. Mikä tahansa näin saatu funktio f_n , joka on siis analyttinen päätepisteen $\gamma(\beta)$ sisältävässä kiekossa D_n , on *funktion f_0 analyttinen jatke polun alkupisteen ympäristöstä sen päätepisteen ympäristöön*.

Polkua pitkin tehdyllä analyttisellä jatkeella on seuraavat ominaisuudet:

1. Jos polulle γ löytyy jokin alkupisteestä päätepisteeseen tehty analyttinen jatke, on tämä jatke yksikäsitteinen päätepisteen ympäristössä [3, Lause 16.11].
2. Vaikka polku γ olisi suljettu, *ei* saadun jatkeen f_n tarvitse olla sama kuin lähtöfunktio f_0 (erityisesti siis voi olla $f_n(z_0) \neq f_0(z_0)$); näin käy esimerkiksi, kun logaritmistä tehdään analyttinen jatke suljettua polkua pitkin, kun polun kiertoluku origon ympäri ei ole nolla).
3. Jos $D_0 \subset \Omega$ ja Ω on sellainen *yhdesti yhtenäinen alue*, että funktiolla $f_0 \in H(D_0)$ on analyttinen jatke jokaista alueessa Ω kulkevaa kiekon D_0 keskipisteestä lähtevää polkua pitkin, löytyy funktiolle f_0 yksikäsitteinen analyttinen jatke koko joukkoon Ω , eli löytyy $g \in H(\Omega)$, jolla $g(z) = f_0(z)$ kaikilla $z \in D_0$ [3, Lause 16.15].

Huomautus 5.3

- Yllä annettua suoraa Taylorin sarjoihin perustuvaa jatkamista on kuitenkin vaikea tehdä käytännössä, sillä sitä varten pitäisi olla käytössä helppo algoritmi rakentaa nopeasti uusia Taylorin sarjoja ja laskea niiden suppenemissäteitä. Yleensä jatke löydetäänkin jostain toista kautta, esimerkiksi esittämällä sarja parametrin yli otetun integraalin avulla: tästä esimerkeistä tulevaisuudessa.

- Sopivia polkuja valitsemalla saa niitä pitkin tehdyistä analyttisistä jatkeista aikaiseksi jonkin alkuperäisen funktion *maksimaalisen analyttisen jatkeen*, eli analyttiseen funktion, jonka määrittelyaluetta ei voi enää laajentaa menettämättä analyttisyyttä. Esimerkin 5.2 kaltaisessa tapauksessa on helppoa löytää funktiolle f_0 maksimaalinen analyttinen jatke, sillä sen muodostaa rationaalifunktio $f(z) := 2/(2-z)$, joka on määritelty koko kompleksitasossa pistettä $z = 2$ lukuun ottamatta. Maksimaalinen analyttinen jatke voi löytyä joskus kuitenkin paljon pienemmästä joukosta: esimerkiksi [3, Lause 16.6] antaa esimerkkejä Taylorin sarjoista, joita ei voi lainkaan jatkaa äärellisen suppenemissäteensä ulkopuolelle.

5.1.1 (Lisä) Analyttisyyden säilyminen parametrin yli integroitaessa

Lähdetään liikkeelle tilanteesta, jossa on annettu perhe $f(t, z)$ muuttujan z suhteen analyttisiä funktioita, jotka riippuvat parametreista t . Tehdään näistä uusi muuttujan z funktio $F(z)$ integroimalla parametrien yli, eli määritellään

$$F(z) := \int f(t, z) dt. \quad (5.1)$$

Milloin funktio F on myös analyttinen? Osoittautuu, että **analyttisyys periytyy parametrin yli integroitaessa aina, jos funktiolle löytyy integroitava majorantti**, samaan tapaan kuin Weierstrassin M-testissä luvussa 2.2.1.

Tarkemmat oletukset löytyvät seuraavasta lauseesta.

Lause 5.4 *Olkoon Ω kompleksitason avoin joukko, E jokin parametrien joukko (esimerkiksi avoin väli) ja $f(t, z)$, $t \in E$, $z \in \Omega$, funktioita, jotka ovat derivoituvia jokaisessa pisteessä z , kun parametri t pidetään kiinnitettynä.¹*

Oletetaan, että jokaista suljettua kiekkoa $D \subset \Omega$ kohti löytyy jokin dominoiva funktio $M(t)$, jolle pätee

$$|f(t, z)| \leq M(t), \text{ kun } z \in D, \text{ ja } \int_E M(t) dt < \infty.$$

Tällöin kaavan (5.1) integraali suppenee itseisesti kaikissa pisteissä $z \in \Omega$ ja määrittelee koko joukossa Ω analyttisen funktion F . Lisäksi funktion m :n kertaluvun derivaatalle pätee

$$F^{(m)}(z) = \int_E \partial_z^m f(t, z) dt, \quad z \in \Omega. \quad (5.2)$$

TODISTUS (Lähes identtinen Lauseen 2.33 kanssa.) Oletetaan, että $z_0 \in \Omega$. Koska Ω on avoin, löytyy jokin $\varepsilon > 0$, jolla avoin kiekko $B_{3\varepsilon}(z_0) \subset \Omega$ ja tällöin myös $D := \overline{B_{2\varepsilon}(z_0)} \subset \Omega$ ja $U := B_\varepsilon(z_0) \subset D \subset \Omega$. Oletusten mukaan löytyy siis kiekossa D määritelty funktio $M(t)$, jolle $|f(t, z)| \leq M(t)$ ja $\int M(t) dt < \infty$. Näin ollen $|F(z)| \leq \int |f(t, z)| dt \leq \int M(t) dt < \infty$, kun $z \in D$, ja F on hyvin määritelty koko kiekossa D . Se on lisäksi myös jatkuva koko joukossa U , sillä funktiota M voidaan käyttää majoranttina Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseessa, joka sallii raja-arvon ja integroinnin järjestyksen vaihdon: kun $z \in U$, pätee siis

$$\lim_{w \rightarrow z} F(w) = \int_E \lim_{w \rightarrow z} f(t, w) dt = \int_E f(t, z) dt = F(z),$$

sillä oletusten mukaan funktio $w \mapsto f(t, w)$ on analyttinen funktio koko joukossa Ω kiinteällä t , joten se on erityisesti jatkuva joukossa $U \subset \Omega$.

Olkoon γ mielivaltainen alueeseen U sisältyvän kolmion reunaa kiertävä polku, niin kuin Moreran lausetta (Lause 1.53) varten vaaditaan. Koska polun pituus on

¹(MAT) Tässä riittää olettaa, että E on jokin mitallinen joukko ja funktiot $f : E \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ovat mitallisia tuloavaruudessa $E \times \Omega$. Lebesguen mitan ”dt” määritelmässä (5.1) voi myös korvata millä tahansa σ -äärellisellä positiivisella mitalla, jonka jälkeen yleistä Fubinin lausetta [3, Lause 8.8] voi käyttää todistuksessa.

äärellinen ja f :llä on integroituva majorantti, pätee $\int_{\gamma} (\int |f(t, z)| dt) |dz| < \infty$. Tässä voidaan siis käyttää Fubinin lausetta ja vaihtaa integrointijärjestystä. Cauchyn lausetta soveltamalla saadaan

$$\oint_{\gamma} F(z) dz = \int_E \left(\oint_{\gamma} f(t, z) dz \right) dt = 0,$$

sillä $z \mapsto f(t, z)$ on analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa U , jossa polku γ kulkee. Voidaan siis soveltaa Moreran lausetta ja päätellä, että F on analyyttinen kiekossa U .

Erityisesti F on siis derivoituva pisteessä z_0 . Sovelletaan Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille polulla $\gamma_0(t) := z_0 + \frac{\varepsilon}{2} e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, joka kiertää kerran pisteen z_0 ympäri kiekossa U . Saadaan kaikille $m \geq 1$

$$F^{(m)}(z_0) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{F(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz = \int_E \left(\frac{m!}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{f(t, z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz \right) dt,$$

sillä integrandissa $\left| \frac{f(t, z)}{(z - z_0)^{m+1}} \right| \leq M(t)(2/\varepsilon)^{m+1}$, joten voidaan jälleen vaihtaa integrointijärjestystä Fubinin lauseen perusteella. Tähän voidaan soveltaa Cauchyn integraalikaavaa derivaatoille ja lopputuloksena on yhtälö (2.14). Huomaa, että koska z_0 oli tässä mielivaltainen ja erityisesti osoitettiin ($m = 1$), että $F'(z_0)$ on olemassa, seuraa tästä myös, että $F \in H(\Omega)$. \square

Esimerkki 5.5 Besselin funktiot J_n (niiden käytöstä löytyy tietoa Wikipediasta https://en.wikipedia.org/wiki/Bessel_function) voidaan määrittellä integraalina

$$J_n(z) := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - z \sin \varphi) d\varphi, \quad (5.3)$$

jossa $z \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Osoitetaan Lauseen 5.4 avulla, että näin saadut funktiot ovat *kokonaisia*. Olkoon D jokin suljettu kiekko, jonka keskipiste on z_0 ja säde $r > 0$. Tällöin se sisältyy suljettuun origokeskiseen kiekkoon $D_1 := \overline{B}_R(0)$, jossa $R := r + |z_0|$, ja riittääkin etsiä majorantti tässä suuremmassa kiekossa. Olkoon siis $|z| \leq R$ ja merkitään $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, jolloin $|x|, |y| \leq R$. Kun $\varphi \in [0, \pi]$, saadaan kosinin eksponenttitesityksestä ja kolmioepäyhtälöstä arvio

$$\begin{aligned} |\cos(n\varphi - z \sin \varphi)| &= \frac{1}{2} \left| e^{i(n\varphi - z \sin \varphi)} + e^{-i(n\varphi - z \sin \varphi)} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\left| e^{i(n\varphi - (x+iy) \sin \varphi)} \right| + \left| e^{-i(n\varphi - (x+iy) \sin \varphi)} \right| \right) = \frac{1}{2} (e^{y \sin \varphi} + e^{-y \sin \varphi}) \leq e^{|y|} \leq e^R, \end{aligned}$$

sillä $|\pm y \sin \varphi| \leq |y|$ ja eksponenttifunktio on kasvava reaaliarvoilla. Koska $\int_0^{\pi} e^R d\varphi = \pi e^R < \infty$, on vakiofunktio e^R integrandin integroituva majorantti suljetussa kiekossa D . Kun $\varphi \in [0, \pi]$, on funktio $g(z) := \cos(n\varphi - z \sin \varphi)$ kahden kokonaisen funktion yhdisteenä myös kokonainen. Lauseen 5.4 mukaan on siis funktion $J_n(z)$ määrittävä integraali itseisesti suppeneva ja näin saatu funktio analyyttinen koko kompleksitasossa. Ketjusäännön avulla saada myös esimerkiksi Besselin funktion derivaatalle esitys $J'_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \varphi \sin(n\varphi - z \sin \varphi) d\varphi$.

5.2 Eulerin Γ -funktio

Sovelluksissa tulee usein vastaan integraaleja, joita ei voi laskea suoraan tähän mennessä käsiteltävien alkeisfunktioiden avulla. Tällöin pyritään muokkaamaan integraalia esimerkiksi sopivasti valituilla muuttujanvaihdoin muotoon, jossa sen voi sanoa jonkin tunnetun *erikoisfunktion* avulla. Näiden erikoisfunktioiden ominaisuuksia on taulukoitu paljon, ja niiden arvojen laskemista löytyy sekä tehokkaista approksimaatioita että valmiita numeerisia kirjastoja.

Yksi tavallisimmista vastaan tulevista erikoisfunktioita on **Eulerin Γ -funktio**. Se määritellään oikeassa puolitasossa integraalina

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{kun } \operatorname{Re} z > 0. \quad (5.4)$$

Tässä t^w , $t > 0$ ja $w \in \mathbb{C}$, tarkoittaa aiemmin määriteltyä potenssifunktion päähaaraa $t^w := e^{w \ln t}$, jossa $\ln t \in \mathbb{R}$, joten tällöin saadaan sen moduliksi

$$|t^w| = |e^{w \ln t}| = |e^{\operatorname{Re} w \ln t} e^{i \operatorname{Im} w \ln t}| = e^{\operatorname{Re} w \ln t} = t^{\operatorname{Re} w}.$$

Tästä nähdään, että yhtälön (5.4) integraali on itseisesti suppeneva kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joilla $x := \operatorname{Re} z > 0$. Jaetaan integrointiväli kahteen osaan pisteen $t = 1$ kohdalta. Vasemmalle puolelle jäävät arvot $0 < t \leq 1$, joilla $\ln t \leq 0$. Jos $\varepsilon > 0$ ja $x \geq \varepsilon$, pätee $\operatorname{Re}(z-1) = x-1 \geq \varepsilon-1 > -1$ ja näin ollen myös $\operatorname{Re}(z-1) \ln t \leq (\varepsilon-1) \ln t$ aina kun $0 < t \leq 1$. Siten integraalia välin $[0, 1]$ yli voi arvioida

$$\int_0^1 |t^{z-1} e^{-t}| dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{\varepsilon-1} dt = \int_0^1 \frac{1}{\varepsilon} t^{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} < \infty.$$

Integraali suppenee siis itseisesti, mutta tästä arviosta nähdään suoraan myös, että integraalin määräämä funktio $g_0(z) := \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt$, $\operatorname{Re} z > 0$, on analyyttinen. Nimittäin, jos D on suljettu kiekko oikeassa puolitasossa, sen etäisyys imaginaariakselista ei voi nolla eli löytyy $\varepsilon > 0$, jolla $\operatorname{Re} z \geq \varepsilon$ aina kun $z \in D$. Yllä olevan laskun mukaan on tällöin $|t^{z-1} e^{-t}| \leq M_0(t) := t^{\varepsilon-1}$, kaikilla $z \in D$ ja $0 < t \leq 1$. Koska lisäksi $\int_0^1 M_0(t) dt = \frac{1}{\varepsilon} < \infty$, voidaan soveltaa Lausetta 5.4 ja päätellä, että funktio $g_0(z)$ on analyyttinen koko oikeassa puolitasossa.

Tarkastellaan sitten integraalia jäljellä olevan parametrijoukon $[1, \infty[$ yli. Kun $t \rightarrow \infty$, on $\ln t/t \rightarrow 0$ (L'Hôpitalin sääntö), joten aina kun $R > 0$, löytyy jokin $t_0(R) \geq 1$, jolla $R \frac{\ln t}{t} \leq \frac{1}{2}$, kun $t \geq t_0$. Näin ollen kun $\operatorname{Re} z =: x \leq R$ ja $t \geq t_0$ pätee myös $x \frac{\ln t}{t} \leq \frac{1}{2}$, joten saadaan arvio

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} |t^{z-1} e^{-t}| dt &= \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_1^{t_0} t^{x-1} dt + \int_{t_0}^{\infty} \exp(-t(1-x \ln t/t)) dt \\ &\leq \int_1^{t_0} t^{R-1} dt + \int_{t_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) dt \leq \frac{1}{R} t_0^R + 2e^{-\frac{t_0}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

Tästä laskusta seuraa, että integraali $\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt$ suppenee *kaikilla* $z \in \mathbb{C}$, sillä $\operatorname{Re} z \leq R$ ainakin valinnalla $R := |z| + 1 > 0$. Saatiin siis tulos, että funktio

$$g_1(z) := \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (5.5)$$

on itseisesti suppenevan integraalin määrittelemä koko kompleksitasossa. Jos D on jokin kompleksitason suljettu kiekko, on se erityisesti rajoitettu, eli löytyy $R > 0$, jolla $|z| \leq R$ aina kun $z \in D$. Siis $\operatorname{Re} z \leq R$ kaikilla $z \in D$, joten kun valitaan $t_0(R) \geq 1$ kuten yllä ja määritellään

$$M_1(t) := \begin{cases} t^{R-1}, & \text{kun } 1 \leq t \leq t_0(R), \\ \exp(-\frac{1}{2}t), & \text{kun } t > t_0(R), \end{cases} \quad (5.6)$$

pätee $|t^{z-1} e^{-t}| \leq M_1(t)$, kaikilla $z \in D$ ja $t \geq 1$. Tällöin

$$\int_1^{\infty} M_1(t) dt \leq \frac{1}{R} t_0^R + 2e^{-\frac{t_0}{2}} < \infty,$$

joten Lauseen 5.4 oletukset toteutuvat koko kompleksitasossa ja nähdään, että *funktio g_1 on kokonainen*.

Kaavan (5.4) integraalille pätee $\Gamma(z) = g_0(z) + g_1(z)$, joten yhdistämällä aiemmat tulokset nähdään heti, että integraali suppenee itseisesti aina kun $\operatorname{Re} z > 0$. Toisaalta molemmat funktioista g_0 ja g_1 ovat analyyttisiä oikeassa puolitasossa, joten voidaan myös päätellä, että **Eulerin Γ -funktio on analyyttinen koko oikeassa puolitasossa eli arvoilla $\operatorname{Re} z > 0$** . Tämän jälkeen **määritellään $\Gamma(z)$ arvoille $\operatorname{Re} z \leq 0$ analyyttisen jatkeen avulla**. Näille arvoille kaavan (5.4) integraali ei enää suppene, joten sitä ei voi käyttää tähän suoraan. Sen sijaan parametrien $t \geq 1$ yli integroimalla saatu funktion g_1 on kokonainen, joten se on rajoittumansa yksikäsitteinen analyyttinen jatke koko kompleksitasoon. Riittääkin etsiä analyyttinen jatke funktiolle g_0 .

Oletetaan ensin, että $\operatorname{Re} z > 0$, ja palataan määritelmään

$$g_0(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Tässä oleva eksponenttifunktio voidaan kehittää Taylorin sarjaksi, jonka suppenemissäde on ääretön:

$$t^{z-1} e^{-t} = t^{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n t^{n+z-1},$$

sillä $t^{z-1} t^n = \exp((z-1) \ln t) \exp(n \ln t) = \exp((n+z-1) \ln t)$. Ensimmäinen ($n=0$) termi on siis t^{z-1} . Lopuille termeille ($n \geq 1$) pätee kaikilla $0 < t < 1$ yläraja $|(-1)^n t^{n+z-1}/n!| = t^{n+\operatorname{Re} z-1}/n! \leq 1/n!$, sillä tällöin $n + \operatorname{Re} z - 1 > 0$. Koska integrointiväli on äärellinen ja Weierstrassin M-testi 2.32 siis toteutuu, voi Taylorin sarjaa integroida termeittäin. Tästä saadaan

$$g_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} t^{n+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}.$$

Voidaan siis määritellä funktiolla g_0 analyyttinen jatke h_0 käyttäen oikean puolen sarjaesitystä kaikissa pisteissä, joissa se suppenee

$$h_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}.$$

Tällöin h_0 on funktiosarja, joka on muodostettu jonosta $u_n(z) := \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$. Tässä funktio u_n on rationaalifunktio, jolla on ensimmäisen kertaluvun napa pisteessä $z = -n$. Näin ollen kaikki jonon funktiot ovat analyyttisiä alueessa $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -n \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}_0\} = \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$. Jos D on jokin suljettu kiekko joukossa Ω , ei sen etäisyys napojen joukosta $(-\mathbb{N}_0)$ voi olla nolla ja löytyy jokin $\varepsilon > 0$, jolla $|z+n| \geq \varepsilon$ kaikilla $z \in D$ ja $n \in \mathbb{N}_0$. Näin ollen $|u_n(z)| \leq \frac{1}{n! \varepsilon}$, kun $z \in D$, ja nähdään, että Weierstrassin M-testi toteutuu kiekossa D . Lauseen 2.33 mukaan on siis funktion h_0 määrittelevä sarja itseisesti suppeneva koko alueessa Ω ja $h_0 \in H(\Omega)$. Kun $m \in \mathbb{N}_0$ ja $|z+m| \leq \frac{1}{2}$ on $|u_n(z)| \leq \frac{2}{n!}$, kun $n \neq m$, joten näiden termien yli otettu summa pysyy äärellisenä kun $z \rightarrow -m$. Toisaalta tällöin $|u_m(z)| \rightarrow \infty$, joten pätee myös $|h_0(z)| \rightarrow \infty$ kun $z \rightarrow -m$. Näin ollen jokainen pisteistä $z = -m$ on funktion h_0 eristetty erikoispiste. Lisäksi nähdään näiden ylärajojen avulla, että

$$\lim_{z \rightarrow -m} [(z+m)h_0(z)] = \lim_{z \rightarrow -m} [(z+m)u_m(z)] = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Tästä seuraa, että piste $z = -m$ on funktion h_0 ensimmäisen kertaluvun napa, ja yllä olevasta raja-arvosta saadaan vastaavaksi residyksi $\operatorname{Res}(h_0, -m) = \frac{(-1)^m}{m!}$.

Koska Γ -funktio määriteltiin oikeassa puolitasossa lisäämällä funktioon g_0 kokonainen funktio g_1 , seuraa yllä olevista laskuista, että kaavalla $\Gamma(z) = h_0(z) + g_1(z)$, $z \in \Omega$, saadaan määriteltyä maksimaalinen analyyttinen jatke integraalin (5.4) avulla määritellylle funktiolle. **Määritellään siis Eulerin Γ -funktio kaavalla**

$$\Gamma(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{kun } z \neq -m, \text{ kaikilla } m \in \mathbb{N}_0. \quad (5.7)$$

Tämä funktion on analyyttinen lukuun ottamatta ensimmäisen kertaluvun napoja negatiivisen reaaliakselin pisteissä $z = -m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, joissa sen residyt ovat $\text{Res}(\Gamma, -m) = \frac{(-1)^m}{m!}$.

Seuraavaa tulosta varten tarvitaan **analyyttisten funktioiden osittaisintegrointikaavaa**:

Lause 5.6 *Olkoon γ jokin polku, joka kulkee pisteestä z_0 pisteeseen z_1 alueessa Ω . Jos funktiot f ja g ovat analyyttisiä alueessa Ω , niin pätee*

$$\int_{\gamma} f'(z)g(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)g(z) - \int_{\gamma} f(z)g'(z)dz. \quad (5.8)$$

TODISTUS Oletusten mukaan myös tulofunktio $F(z) = f(z)g(z)$ on analyyttinen alueessa Ω . Sen derivaatta on $F'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$, joten Lauseesta 1.32 seuraa, että

$$F(z_1) - F(z_0) = \int_{\gamma} F'(z)dz = \int_{\gamma} f'(z)g(z)dz + \int_{\gamma} f(z)g'(z)dz.$$

Tästä seuraa suoraan kaava (5.8). □

Tätä tulosta voidaan soveltaa erityisesti funktioihin $f(t) = -e^{-t}$ ja $g(t) = t^z$ oikeassa puolitasossa, jolloin $f'(t) = e^{-t}$ ja $g'(t) = \partial_t \exp(z \ln t) = z \frac{1}{t} \exp(z \ln t) = z t^{z-1}$. Näin ollen määritelmästä (5.4) saadaan osittaisintegroimalla tulos

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (-t^z e^{-t}) - \int_0^{\infty} z t^{z-1} (-e^{-t}) dt = z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

jossa tarvitaan $\text{Re } z > 0$, jotta sijoitustermit varmasti häviäisivät. Tällöin oikean puolen integraali saa arvon $z\Gamma(z)$, joten ollaan päädytty tulokseen

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (5.9)$$

joka pätee ainakin kun $\text{Re } z > 0$. Toisaalta Γ -funktion yleisen määritelmän mukaan yhtälön vasen puoli on analyyttinen funktio, kunhan $z+1 \neq -m$, $m \in \mathbb{N}_0$, eli $z \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$, ja sen oikea puoli on analyyttinen funktio, kun $z \neq -m$, $m \in \mathbb{N}_0$. Luvun 5.1 alun perusteella, täytyy kaavan (5.9) siis päteä kaikilla $z \neq -m$, $m \in \mathbb{N}_0$ ja itse asiassa myös raja-arvomielessä kun $z \rightarrow 0$.

Tulosta (5.9) n kertaa iteroimalla saadaan yleisempi tulos

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2) \cdots z\Gamma(z), \quad \text{kun } n \in \mathbb{N} \text{ ja } z \notin (-\mathbb{N}_0). \quad (5.10)$$

Arvolla $z = 1$ tästä seuraa

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = n! \cdot \Gamma(1).$$

Koska $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (-e^{-t}) = 1$, nähdään, että **Γ -funktio yleistää kertomafunktion kompleksitasoon**, sillä

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}. \quad (5.11)$$

Johdetaan vielä lopuksi seuraava Γ -funktioiden kertolaskuominaisuus ja kerrataan samalla useita integraalinlaskentatemppuja:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \text{kun } z \notin \mathbb{Z}. \quad (5.12)$$

Aloitetaan olettamalla, että $z \in]0, 1[$, jolloin sekä $\text{Re } z = z > 0$ että $\text{Re}(1-z) = 1-z > 0$, joten voidaan käyttää molempiin termeihin kaavan (5.4) integraaliesitystä. Tehdään ensimmäiseen

termiin muuttujanvaihto $u = \sqrt{t}$, jolle $t = u^2$ ja siten $\frac{dt}{du} = 2u > 0$, joten muuttujanvaihdossa integrointiväli $]0, \infty[$ säilyy ennallaan. Saadaan

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty u^{2z-2} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^\infty u^{2z-1} e^{-u^2} du. \quad (5.13)$$

Näin ollen myös

$$\Gamma(1-z) = 2 \int_0^\infty v^{2(1-z)-1} e^{-v^2} dv = 2 \int_0^\infty v^{1-2z} e^{-v^2} dv,$$

joten

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{u}{v}\right)^{2z-1} e^{-u^2-v^2} dudv.$$

Tässä voidaan² ymmärtää iteroitu integraali kaksiulotteisena integraalina, joka otetaan joukon $(\mathbb{R}_+)^2 := \{(u, v) \mid u, v > 0\}$ yli. Siirrytään kaksiulotteisessa integraalissa napakoordinaatteihin $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ ja $\varphi = \text{Arg}(u, v)$, jolloin $u = r \cos \varphi$ ja $v = r \sin \varphi$, jossa $r > 0$ ja $\varphi \in [0, \pi/2]$. Muistaen siirtoon liittyvän Jacobin determinantin, pätee $dudv = r dr d\varphi$ ja saadaan siis tulos

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty dr r \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}\right)^{2z-1} e^{-r^2} = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\cot \varphi)^{2z-1} \times \int_0^\infty dr r e^{-r^2}.$$

Tässä r -integraali voidaan laskea suoraan muuttujanvaihdolla $t = r^2$, josta saadaan $\int_0^\infty dr 2r e^{-r^2} = \int_0^\infty dt e^{-t} = \int_0^\infty (-e^{-t}) = 1$. Näin ollen

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\cot \varphi)^{2z-1}.$$

Jäljellä olevan integraalin laskeminen onkin vähän hankalampaa. Tehdään siinä ensin muuttujanvaihto $x = (\cot \varphi)^2$, jolle pätee $\frac{dx}{d\varphi} = 2 \cot \varphi \frac{d \cot \varphi}{d\varphi} = 2 \cot \varphi \frac{-\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = -2 \cot \varphi (1 + \cot^2 \varphi)$. Kun $0 < \varphi < \pi/2$ ovat sen sini ja kosini molemmat positiivisia, joten myös $\cot \varphi > 0$. Nähdään, että $\frac{dx}{d\varphi} < 0$ koko integrointivälillä, joten muuttujanvaihto on aidosti vähenevä koko integrointivälillä ja kuvaa sen (bijektiivisesti) joukoksi $]0, \infty[$. Saadaan siis

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi (\cot \varphi)^{2z-1} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi 2 \cot \varphi (1 + \cot^2 \varphi) \frac{1}{1 + \cot^2 \varphi} (\cot \varphi)^{2z-2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \frac{x^{z-1}}{1+x}.$$

Tämä viimeinen integraali voidaan laskea residylausetta soveltamalla. Lasku on tehty Esimerkissä 3.29, jonka mukaan

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{z-1}}{1+x} = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Keräämällä kaikki yllä johdetut tulokset yhteen, päädytään tulokseen

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \text{kun } 0 < z < 1.$$

Vasen puoli on kahden analyyttisen funktion tulo alueessa, jossa kompleksitasosta on poistettu napapisteet $z = 0, -1, \dots$ ja $1 - z = 0, -1, -2, \dots$, eli pisteet $z \in \mathbb{Z}$. Toisaalta $\sin \pi z = 0$, jos ja vain jos $z \in \mathbb{Z}$, joten myös oikea puoli on analyyttinen funktio tässä samassa alueessa. Koska nämä kaksi analyyttistä funktiota saavat samat arvot janalla $]0, 1[$ täytyy niiden olla samoja koko alueessa. Saatiin siis johdettua haluttu kaava (5.12).

²(MAT) Tuloksessa käytetään Fubinin lausetta esittämään iteroitu integraali tuloavaruuden yli otettuna integraalina. Lausetta saa käyttää, sillä integrandi on positiivinen mitallinen funktio tuloavaruudessa.

Taulukko 5.1: Yhteenveto Eulerin Γ -funktion ominaisuuksista.

Γ -funktio on analyttinen, lukuun ottamatta ensimmäisen kertaluvun napoja pisteissä $z = 0, -1, -2, \dots$,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{kun } \operatorname{Re} z > 0$$

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{kun } z \neq 0, -1, -2, \dots$$

Seuraavat ominaisuudet pätevät kaikkialla kompleksitasossa napapisteitä lukuun ottamatta:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n!, & \text{kun } n \in \mathbb{N} \\ \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z), & \text{kun } z \neq 0, -1, -2, \dots \\ \frac{\Gamma(n+p)}{\Gamma(p)} &= (p+n-1)(p+n-2) \cdots p, & \text{kun } n \in \mathbb{N} \text{ ja } p > 0 \\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin \pi z}, & \text{kun } z \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Kaavoja (5.12) ja (5.10) käyttämällä voi laskea tarkkoja Γ -funktion arvoja puoliluvuille $z = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$. Kaavasta (5.12) saadaan arvolla $z = \frac{1}{2}$ tulos $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$ ja toisaalta integraaliesityksestä (5.4) nähdään suoraan, että $\Gamma(z) > 0$, kun $z > 0$, joten täytyy olla

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Tämän jälkeen kaavasta (5.10) saadaan arvolla $z = \frac{1}{2}$ tulos

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \prod_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}, \quad \text{kun } n \in \mathbb{N},$$

ja vastaavasti arvolla $z = -n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, tulos

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}}{\prod_{k=1}^n \left(k - \frac{1}{2}\right)}, \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}.$$

Yhteenveto Eulerin Γ -funktion tärkeimmistä ominaisuuksista löytyy Taulukosta 5.1 ja lisää tietoa, kuten esimerkiksi kuvaajia funktion arvoista kompleksitasossa, löytyy esimerkiksi Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function).

Esimerkki 5.7 Kun $p > 1$, esitä seuraavan integraalin arvo Eulerin Γ -funktion ja Riemannin ζ -funktion avulla

$$I(p) := \int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^{p-1}}{x(x+1)} dx. \quad (5.14)$$

Ratkaisu: Hankkiudutaan ensin eroon logaritmista integraalissa ottamalla se uudeksi integrointi-muuttujaksi: tehdään muuttujanvaihto $t = \ln x$, jolle $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} > 0$, ja se siis kuvaa integrointivälin $[1, \infty[$ väliseksi $[0, \infty[$. Tällöin $x = e^t$ ja saadaankin

$$I(p) = \int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^{p-1}}{x(x+1)} dx = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{1+e^t} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1} e^{-t}}{1+e^{-t}} dt,$$

joka alkaakin jo muistuttaa Γ -funktion määritelmää. Integraalissa $t > 0$, joten $0 < e^{-t} < 1$, ja voidaan siis kehittää nimittäjän sisältävä termi geometriseksi sarjaksi,

$$\frac{1}{1+e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-nt}.$$

Tämän voi sijoittaa yllä olevaan integraaliin ja vaihtaa integroinnin ja summauksen järjestystä,³ josta saadaan

$$I(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} e^{-nt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-(n+1)t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-(n+1)t} dt.$$

Tekemällä muuttujanvaihto $u = (n+1)t$, saadaan lopulta

$$\begin{aligned} I(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{n+1}\right)^{p-1} e^{-u} \frac{1}{n+1} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p} \int_0^{\infty} u^{p-1} e^{-u} du \\ &= \Gamma(p) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^p}, \end{aligned}$$

missä viimeisessä vaiheessa on tehty summausmuuttujan vaihto $m = n+1$. Merkitään jäljellä olevaa sarjaa $S(p) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m^p}$. Vielä pitäisi esittää sarjan arvo ζ -funktiota käyttäen. Huomataan, että itseisarvojen muodostama sarja on itse asiassa Dirichlet'n sarja $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-p} < \infty$, sillä $p > 1$ ja sarja suppenee niin kuin Esimerkissä 2.21 näytettiin. Näin ollen voidaan sen positiiviset termit (parittomat m) ja negatiiviset termit (parilliset m) summata erikseen, ja pätee

$$\begin{aligned} S(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^p} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^p} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^p} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - 2^{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = (1 - 2^{1-p})\zeta(p). \end{aligned}$$

Vastaus: $I(p) = (1 - 2^{1-p})\Gamma(p)\zeta(p)$, kun $p > 1$.

5.3 Eulerin B-funktio

Eulerin betafunktion määritelmä lähtee liikkeelle integraalista

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad \text{kun } \operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0.$$

Koska integrandin itseisarvolle pätee $|t^{p-1}(1-t)^{q-1}| = t^{\operatorname{Re} p-1} (1-t)^{\operatorname{Re} q-1}$ suppenee se itseisesti yllä merkityillä arvoilla $\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0$ (integraalin voi tehdä kahdessa osassa, ensin yli arvojen $0 < t < \frac{1}{2}$, jolloin $1-t \geq \frac{1}{2}$ ja siten $(1-t)^{\operatorname{Re} q-1} \leq 2$, ja sen jälkeen yli arvojen $\frac{1}{2} \leq t < 1$, jolloin $t^{\operatorname{Re} p-1} \leq 2$). Tästä nähdään myös, että integraalin määräämä funktio on analyyttinen sekä muuttajassa p , kun q on kiinnitetty, että muuttajassa q , kun p on kiinnitetty (esimerkiksi, jos D on suljettu kuula oikeassa puolitasossa ja $\operatorname{Re} q > 0$, löytyy $\varepsilon > 0$, jolla $\operatorname{Re} p \geq \varepsilon$ ja siten $|t^{p-1}(1-t)^{q-1}| \leq t^{\varepsilon-1} (1-t)^{\operatorname{Re} q-1}$ kaikilla $p \in D$). Tämän jälkeen B-funktiolle tehdään analyyttinen

³(MAT) Järjestyksen vaihdon voi perustella käyttäen luvun 2.2.1 tulosta "(2)". Nimittäin itseisarvojen yli summatussa saadaan geometrinen sarja $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} = 1/(1-e^{-t}) \leq 1+t^{-1}$. (Tässä esiintyvän epäyhtälön voi todistaa tutkimalla funktiota $g(t) := e^{-t}(1+t)$, $t \geq 0$: koska $g(0) = 1$ ja $g'(t) = -(1+t)e^{-t} + e^{-t} = -te^{-t} \leq 0$, on funktio g siis vähenevä ja pätee $g(t) \leq 1$ kaikilla $t \geq 0$. Tästä seuraa ensin epäyhtälö $e^{-t} \leq \frac{1}{1+t}$, josta edelleen $1 - e^{-t} \geq \frac{t}{1+t}$.) Näin ollen $\int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} dt \leq \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} (1+t^{-1}) dt = \Gamma(p) + \Gamma(p-1) < \infty$, sillä oletettiin, että $p > 1$.

jatke muualle kompleksitasoon samaan tapaan kuin Γ -funktiolle tehtiin edellisessä luvussa. Jatke on helpointa tehdä johtamalla samalla esitys B-funktiolle Γ -funktion avulla.

Oletetaan siis ensin, että $p, q > 0$, jolloin voidaan käyttää kaavassa (5.13) johdettua integraaliesitystä arvoille $\Gamma(p)$ ja $\Gamma(q)$. Tästä saadaan

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2 \int_0^\infty u^{2p-1} e^{-u^2} du \times 2 \int_0^\infty v^{2q-1} e^{-v^2} dv = 4 \int_0^\infty du \int_0^\infty dv u^{2p-1} v^{2q-1} e^{-u^2-v^2}.$$

Kuten edellisessä luvussa, tehdään tässä kaksiulotteisessa integraalissa muuttujanvaihto napakoordinaatteihin: $u = r \cos \varphi$ ja $v = r \sin \varphi$, jossa $r > 0$ ja $\varphi \in [0, \pi/2]$. Saadaan tulos

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty dr r r^{2p-1} r^{2q-1} (\cos \varphi)^{2p-1} (\sin \varphi)^{2q-1} e^{-r^2} \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\cos \varphi)^{2p-1} (\sin \varphi)^{2q-1} \times \int_0^\infty dr 2r r^{2(p+q-1)} e^{-r^2}. \end{aligned}$$

Tässä jälkimmäisestä integraalista muuttujanvaihdolla $t = r^2$ saadaan $\int_0^\infty dr 2r r^{2(p+q-1)} e^{-r^2} = \int_0^\infty dt t^{p+q-1} e^{-t} = \Gamma(p+q)$, sillä $p+q > 0$. Tehdään kulmaintegraaliin muuttujanvaihto $x = (\cos \varphi)^2$, jolloin $\frac{dx}{d\varphi} = -2 \cos \varphi \sin \varphi < 0$ kun $0 < \varphi < \pi/2$. Muuttujanvaihto on siis aidosti vähenevä koko integrointivälillä ja kuvaa sen (bijektiivisesti) joukoksi $]0, 1[$. Saadaan

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi (\cos \varphi)^{2p-1} (\sin \varphi)^{2q-1} &= \int_0^{\pi/2} d\varphi 2 \cos \varphi \sin \varphi (\cos \varphi)^{2(p-1)} (\sin \varphi)^{2(q-1)} \\ &= \int_0^1 dx x^{p-1} (1-x)^{q-1} = B(p, q), \end{aligned}$$

sillä $(\sin \varphi)^2 = 1 - (\cos \varphi)^2$.

Ollaan siis johdettu tulos $\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p, q)\Gamma(p+q)$ arvoille $p, q > 0$. Kuten aiemmin mainittiin, seuraa integraaliesityksestä (5.4), että $\Gamma(p, q) > 0$ kun $p+q > 0$, joten saadaan yhtälö

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (5.15)$$

joka pätee aina kun $p, q > 0$. Tämän jälkeen, kun $q > 0$, nähdään että yhtälö pätee kaikilla $\operatorname{Re} p > 0$ aiemmin johdettujen analyyttisyysominaisuuksien takia muuttujassa p . Lopulta voidaan valita jokin $\operatorname{Re} p > 0$ ja käyttää hyväksi molempien puolien analyyttisyyttä muuttujassa q ja nähdään, että se pätee kaikilla $\operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0$. Yhtälön oikea puoli tarjoaa tämän jälkeen analyyttisen jatkeen funktiolle $B(p, q)$ kunhan $p, q, p+q \neq 0, -1, -2, \dots$ ja $\Gamma(p+q) \neq 0$.

Yhteenveto Eulerin B-funktion tärkeimmistä ominaisuuksista löytyy Taulukosta 5.2 ja lisää tietoa, kuten esimerkiksi kuvaajia funktion arvoista kompleksitasossa, löytyy esimerkiksi Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_function).

Esimerkki 5.8 Kun $p > \frac{3}{2}$, esitä seuraavan integraalin arvo Eulerin B-funktion avulla

$$I(p) := \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+4)^p} dx. \quad (5.16)$$

Ratkaisu: Tavoitteena olisi päästä muuttujanvaihdolla integraaliin välin $]0, 1[$ yli. Tehdään tämä siten, että integrandissa oleva yleinen potenssi tuottaa termin t^p , joka onnistuu valinnalla

$$t = \frac{x^2}{x^2+4}, \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4t}{1-t}, \quad 0 < t < 1 \quad \Rightarrow \quad 2x \frac{dx}{dt} = \frac{4}{(1-t)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} > 0.$$

Taulukko 5.2: Yhteenveto Eulerin B-funktion ominaisuuksista.

Eulerin betafunktiolle pätee

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \quad \text{kun } \operatorname{Re} p, \operatorname{Re} q > 0$$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q, p)$$

B-funktion on analyyttinen sekä argumentissa p että q , pois lukien Γ -funktioiden navat ja arvot, joilla $\Gamma(p+q) = 0$.

B-funktion avulla voi laskea binomikertoimia:

$$B(n+1, m+1) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \left[(n+m+1) \binom{n+m}{n} \right]^{-1}, \quad \text{kun } n, m \in \mathbb{N}$$

Tästä nähdään, että muuttujanvaihto kuvaa integrointivälin kasvavasti väliksi $]0, 1[$, ja saadaan

$$I(p) = \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{x^2+4} \right)^p (x^2)^{1-p-\frac{1}{2}} x dx = \int_0^1 t^p \left(\frac{4t}{1-t} \right)^{\frac{1}{2}-p} \frac{2}{(1-t)^2} dt$$

$$= \int_0^1 2^{2(\frac{1}{2}-p)+1} t^{p+\frac{1}{2}-p} (1-t)^{p-\frac{1}{2}-2} dt = 2^{2-2p} \int_0^1 t^{\frac{3}{2}-1} (1-t)^{p-\frac{3}{2}-1} dt.$$

Viimeinen integraali antaa Eulerin B-funktion arvon $B\left(\frac{3}{2}, p - \frac{3}{2}\right)$, sillä $p - \frac{3}{2} > 0$.

Vastaus: $I(p) = 2^{2-2p} B\left(\frac{3}{2}, p - \frac{3}{2}\right)$, kun $p > \frac{3}{2}$.

5.4 Asymptoottiset sarjakehitykset

Asymptoottiset sarjakehitykset ovat jonkin annetun funktion $f(x)$ approksimointiin käytettyjä muodollisesti sarjoilta näyttäviä kehityksiä

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (x \rightarrow \infty), \quad (5.17)$$

jossa ei kuitenkaan vaadita, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ suppenisi millään kiinteällä x . Tämän sijaan vaaditaan, että sarjan osasummat $S_N(x) := \sum_{n=1}^N u_n(x)$ muodostavat yhä paremman approksimaation

funktiosta $f(x)$ yllä sulussa merkityllä rajalla, kun $x \rightarrow \infty$. Toisin sanoen, sarjan osasummat antavat mielivaltaisen hyvän kuvan funktion f käytöksestä *asymptoottisesti*, kun $x \rightarrow \infty$.

Tällaisen asymptoottisen approksimaation virhettä on helpointa kuvata käyttäen *suuruusluokkanotaatioita* "O" ja "o" (näiden määritelmät ja perusominaisuuksia on kerrattu Luvussa 5.4.1). Asymptoottisten sarjakehitysten yleinen matemaattinen määritelmä lähtee liikkeelle **skaalafunktiojonon** $w_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, valinnalla, jossa oletetaan, että jokainen funktioista on jatkuva ja häviää aina nopeammin kuin edeltäjänsä: oletetaan, että $w_n(x) = o(w_{n-1}(x))$, kun $x \rightarrow \infty$. Tyypillinen valinta voisi olla $w_n(x) := x^{-n}$. Tämän jälkeen oletetaan, että jokainen yllä olevista funktioista on muotoa $u_n(x) = a_n w_n(x)$, jollakin vakiolla a_n , ja sanotaan, että jono (u_n) muodostaa funktion f asymptoottisen sarjan, kun $x \rightarrow \infty$, jos kaikilla $N \in \mathbb{N}$ pätee

$$f(x) = \sum_{n=1}^N u_n(x) + o(w_N(x)) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Tällöin käytetään kaavan (5.17) lyhennysmerkintää. Esimerkiksi tapauksessa $w_n(x) = x^{-n}$, $n = -1, 0, 1, \dots$, saadaan

$$f(x) \sim \sum_{n=-1}^{\infty} a_n x^{-n} \quad (x \rightarrow \infty) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^N \left| f(x) - \sum_{n=-1}^N a_n x^{-n} \right| = 0, \quad \text{kaikilla } N \in \mathbb{N}.$$

Koska vaadittu ehto sisältää pelkästään jonon (u_n) äärellisiä osasummaa, ei tässä tarvitse vaatia varsinaisen sarjan $\sum_{n=-1}^{\infty} u_n(x)$ suppenemista millään x tai raja-arvon $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ olemassaoloa.

Yllä olevan määritelmän hyvä puoli on, että silloin voidaan samalla skaalafunktionolla kehitettyjä sarjoja usein laskea yhteen, kertoa keskenään ja integroida, ja tuloksena on uusi vastaavanlainen asymptoottinen sarja. Lisää näin määriteltyjen asymptoottisten sarjakehitysten ominaisuuksista löytyy Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Asymptotic_expansion).

Tutustutaan seuraavaksi kolmeen työkaluun, joita voi käyttää numeerisessa laskennassa ja jotka joskus ovat ainoa vaihtoehto ylipäätään laskea mikä annetun funktion asymptoottinen käytös on. Nämä tekniikat tuottavat hyviä approksimaatioita asymptoottisina sarjakehityksinä, jotka usein eivät kuitenkaan supene normaalisti sarjojen mielessä.

1. Funktion approksimointi Taylorin polynomilla, kun sen Taylorin sarja ei supene.
2. Integraalien approksimointi satulapistemenetelmällä.
3. Eulerin–Maclaurinin summakaava.

Näistä kaksi jälkimmäistä käsitellään omilla luvuissaan myöhemmin. Ensimmäiseen liittyvä esimerkki perustuu Taylorin lauseeseen: lause ja siihen liittyvä Taylorin polynomin ja jäännöstermin määritelmä on kerrattu Luvussa 5.4.2.

Esimerkki 5.9 Olkoon $p > 0$. Etsitään seuraavan integraalilla määritellyn funktion asymptoottinen sarjakehitys, kun $x \rightarrow 0$,

$$f(x) := \int_0^{\infty} e^{-u} (1+ux)^{-p} du, \quad \text{kun } x \geq 0. \quad (5.18)$$

Ratkaisu: Koska $u, x, p \geq 0$, on integrandissa $(1+ux)^{-p} \leq 1$, joten se on itseisesti integroitava kaikilla $x \geq 0$. Sen sijaan, jos $x < 0$, syntyy integrointireitille singulariteetti pisteeseen $u = |x|^{-1}$, ja itseisesti integroitavuus ei enää pidä paikkaansa arvoilla $p > 1$. Näin ollen ei tule yllätyksenä, että tällä funktiolla ei ole supenevaa Taylorin sarjaa pisteessä $x = 0$, niin kuin kohta nähdään.

Huomataan ensin, että funktiolle f löytyy kaikkien kertalukujen derivaatat, jotka saadaan siirtämällä derivoinnit integraalin sisälle:⁴

$$f^{(k)}(x) := (-1)^k p(p+1) \cdots (p+k-1) \int_0^{\infty} e^{-u} u^k (1+ux)^{-p-k} du, \quad x > 0, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.19)$$

(Kaava seuraa suoraan derivaatoista $\partial_x (1+ux)^{-p-k} = -(p+k)(1+ux)^{-p-k-1}u$, ja sen voi tarkistaa induktiolla.) Voidaan siis käyttää Taylorin lausetta (Lause 5.13), ja mille tahansa kehityspisteelle x_0 ja asteelle $n \in \mathbb{N}$, saadaan approksimaatio Taylorin polynomin

$$P_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} e^{-u} u^k (1+ux_0)^{-p-k} du,$$

⁴(MAT) Kaavassa (5.19) määriteltyjen funktioiden $f^{(k)}$ jatkuvuus seuraa suoraan dominoidun konvergenssin lauseesta, jolla voi todistaa, että $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0)$. Sen, että niiden derivaatan voi laskea derivoimalla integrandia, voi myös todistaa dominoidun konvergenssin lauseen avulla suoraan erotusosamääriä $[f^{(k)}(x+h) - f^{(k)}(x)]/h$ tarkastelemalla: tätä varten voi käyttää seuraavaa integraaliesitystä arvolla $q = p+k > 0$

$$\frac{1}{h} [(1+ux+uh)^{-q} - (1+ux)^{-q}] = \frac{1}{h} \int_{s=0}^{s=1} (1+ux+uhs)^{-q} = \frac{(-q)uh}{h} \int_0^1 (1+ux+uhs)^{-q-1} ds,$$

jonka itseisarvo on rajoitettu h :sta riippumattomalla arvolla qu , kunhan $x+h \geq 0$.

avulla, jossa $a_0 = 1$ ja

$$a_k := (-1)^k p(p+1) \cdots (p+k-1) = (-1)^k \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Otetaan tässä $x_0 \rightarrow 0$, josta saadaan approksimaatio

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-u} u^k du = \sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{\Gamma(k+1)}{k!} = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad x > 0.$$

Ollaan siis päädytty Taylorin sarjan osasummilta näyttävään potenssisarjaan. Sen suppenemissäde on kuitenkin nolla, sillä kun $x \neq 0$, pätee

$$\frac{|a_n x^n|}{|a_{n-1} x^{n-1}|} = |x| \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+n-1)} = |x|(p+n-1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

joten d'Alembertin testin (Lause 2.17) mukaan potenssisarja ei suppene itseisesti millään $x \neq 0$.

Vaikka sarja $\sum_{k=0}^n a_k x^k$ hajaantuukin, on se asympotoottisesti aina parempi approksimaatio funktion f käytökselle, kun $x \rightarrow 0$. Tämä nähdään palaamalla Taylorin lauseeseen, jonka mukaan asteen n **jäännöstermi** $R_n(x; x_0) := f(x) - P_n(x; x_0)$ voidaan laskea kaavalla

$$R_n(x; x_0) := \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt,$$

josta seuraa, että etsitty virhe on

$$R_n(x) := f(x) - P_n(x) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} (f(x) - P_n(x; x_0)) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n dt.$$

Koska

$$\begin{aligned} |f^{(n+1)}(t)| &= |a_{n+1}| \left| \int_0^\infty e^{-u} u^{n+1} (1+ut)^{-p-n-1} du \right| \\ &\leq |a_{n+1}| \int_0^\infty e^{-u} u^{n+1} du = |a_{n+1}| \Gamma(n+2) = |a_{n+1}| (n+1)!, \end{aligned}$$

nähdään, että

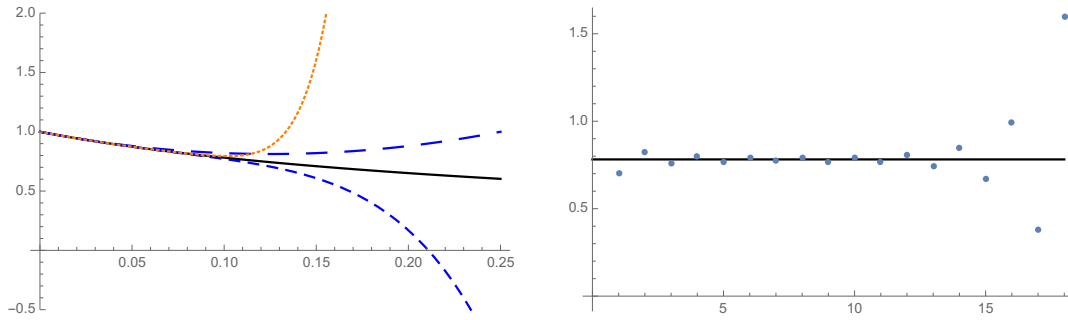
$$|R_n(x)| \leq \frac{|a_{n+1}| (n+1)!}{n!} \lim_{x_0 \rightarrow 0} \int_{x_0}^x (x-t)^n dt = \frac{|a_{n+1}| (n+1)!}{n!} \int_0^x \frac{-1}{n+1} (x-t)^{n+1} dt = |a_{n+1}| x^{n+1}.$$

Tästä seuraa, että $\frac{1}{x^n} |f(x) - P_n(x)| = O(x) \rightarrow 0$, kun $x \rightarrow 0$. Voidaan siis päätellä, että $P_n(x)$ on asympotoottinen sarja funktiolle $f(x)$, kun $x \rightarrow 0$.

Vastaus:

$$\int_0^\infty e^{-u} (1+ux)^{-p} du \sim \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)} x^k \quad (x \rightarrow 0^+). \quad (5.20)$$

Kuvassa 5.1 on näytetty miten yllä oleva approksimaatio käyttäytyy, kun sen astetta n kasvataan. Vaikka sarja ei voikaan tuottaa mielivaltaisen hyvää approksimaatiota niissä pisteissä, joissa se ei suppene, voi sillä saavuttaa erittäin hyvän tarkkuuden kiinteällä x :n arvolla, valitsemalla n :n arvo sopivasti niin, että jäännöstermi minimoituu. Esimerkiksi yllä $|R_n(x)| \leq |a_{n+1}| x^{n+1} \leq [(p+n)x]^{n+1}$, joten valitsemalla n kokonaislukuosaksi reaaliluvusta $\frac{1}{2x} - p$, on virhe eksponentiaalisen pieni, $|R_n(x)| \leq 2^{-n-1}$. Tällä valinnalla siis $|R_n(x)| \leq 2^{p-1/(2x)}$, kun $0 < x \leq \frac{1}{2p}$.



Kuva 5.1: Asymptoottisen sarjakehitelmän (5.20) käyttäytyminen, kun $p = 3$. (Vasen kuva) Alkuperäisen funktion $f(x)$, $x \in [0, 0.25]$, kuvaaja on piirretty mustalla ja sen polynomiaprosimaatiot $P_2(x)$, $P_5(x)$ ja $P_{10}(x)$ piirretty katkoviivoilla, joissa viivan tiheys kasvaa asteen n mukana (P_{10} :n kuvaaja vastaa oranssia katkoviivaa). Huomataan, että vaikka approksimaation tarkkuus koko ajan kasvaa origon ympäristössä, sen käyttöalue pienenee samalla. (Oikea kuva) Approksimaation käytös n :n kasvaessa: musta viiva vastaa arvoa $f(0.1)$ ja pisteet polynomiaprosimaatioita $P_n(0.1)$, kun $n = 1, 2, \dots, 18$. Huomataan, että tarkkuus paranee kunnes $n \approx 7$ ja alkaa sen jälkeen huonontua.

Esimerkki 5.10 Ratkaise epätäydellisen Γ -funktion

$$\Gamma(z, r) := \int_r^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad r > 0, \quad (5.21)$$

asymptoottinen käytös, kun $z < 1$ ja $r \rightarrow \infty$. (Tällöin $\Gamma(z, 0) = \Gamma(z)$, kun $\operatorname{Re} z > 0$.)

Ratkaisu: Tehdään muuttujanvaihto $u = t - r$, josta saadaan

$$\Gamma(z, r) := \int_r^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty (r+u)^{z-1} e^{-r-u} du = e^{-r} r^{z-1} \int_0^\infty (1+u/r)^{-(1-z)} e^{-u} du.$$

Näin ollen tämä arvo onkin $e^{-r} r^{z-1} f(1/r)$, jossa f on edellisen esimerkin kaavassa (5.18) määritelty funktio arvolla $p = 1 - z > 0$. Kun $r \rightarrow \infty$, on $1/r \rightarrow 0^+$, joten voidaan käyttää suoraan edellisen esimerkin tulosta ja päätellä, että

$$\Gamma(z, r) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(k+1-z)}{\Gamma(1-z)} e^{-r} r^{z-1-k} \quad (r \rightarrow \infty),$$

jossa virheelle pätee approksimaatio

$$\left| \Gamma(z, r) - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(k+1-z)}{\Gamma(1-z)} e^{-r} r^{z-1-k} \right| = e^{-r} r^{z-1} |R_n(1/r)| \leq (n+1-z)^{n+1} e^{-r} r^{z-2-n}.$$

Tässä saadaan siis asymptoottinen sarja skaalafunktiojonolla $w_n(r) := e^{-r} r^{z-1-n}$. Jos z ei ole negatiivinen kokonaisluku, voidaan yllä olevat kertoimet myös ilmaista toisin

$$(-1)^k \frac{\Gamma(k+1-z)}{\Gamma(1-z)} = (-1)^k (1-z)(2-z) \cdots (k-z) = (z-1)(z-2) \cdots (z-k) = \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-k)}.$$

(Tämä versio asymptoottisesta kehitelmästä löytyy myös Wikipediasta https://en.wikipedia.org/wiki/Incomplete_gamma_function).

5.4.1 Liite: Suuruusluokkanotaatiot ”O” ja ”o”

Alla on annettu käytetyimmät merkinnät ja määritelmät suuruusluokka-arvioille, sekä esimerkkejä niiden käytöstä.

” O ”, ” \mathcal{O} ” (engl. *big O notation*) Kun $f(x)$ ja $M(x)$ ovat kaksi reaalifunktiota, joilla f on funktion M ”asymptoottisesti rajoittama”, kun $x \rightarrow \infty$, merkitään tätä

$$f(x) = O(M(x)), \quad \text{kun } x \rightarrow \infty.$$

Tarkempi matemaattinen määritelmä merkinnälle kuuluu seuraavasti: tällöin oletetaan, että löytyy sellaiset x_0 ja vakio $C > 0$, että

$$|f(x)| \leq C|M(x)|, \quad \text{kaikilla } x \geq x_0. \quad (5.22)$$

Muita mahdollisia merkintöjä tälle ovat esimerkiksi

$$\begin{aligned} f(x) &\in O(M(x)), & \text{kun } x \rightarrow \infty, \\ f(x) &= \mathcal{O}(M(x)), & \text{kun } x \rightarrow \infty, \\ f(x) &= O(M(x)) & (x \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Merkintää käytetään myös kompleksifunktiolle ja tapauksissa, jossa asymptotiikkaa tutkitaan jonkin muun raja-arvon kuin $x \rightarrow \infty$ suhteen. Esimerkiksi kompleksifunktiolle f

$$f(z) = O(z^3), \quad \text{kun } z \rightarrow 0,$$

tarkoittaa, että löytyy vakio $C > 0$ ja $\varepsilon > 0$, joilla

$$|f(z)| \leq C|z^3| = C|z|^3, \quad \text{kun } 0 < |z| \leq \varepsilon.$$

” o ” (engl. *small O notation*) Kun $f(x)$ ja $M(x)$ ovat kaksi reaalifunktiota, joilla f on asymptoottisesti ”selvästi pienempi” kuin M , kun $x \rightarrow \infty$, merkitään tätä

$$f(x) = o(M(x)), \quad \text{kun } x \rightarrow \infty.$$

Tarkempi matemaattinen määritelmä merkinnälle kuuluu seuraavasti: tällöin oletetaan, että *jokaista* $\varepsilon > 0$ löytyy reaaliluku x_0 , että

$$|f(x)| \leq \varepsilon|M(x)|, \quad \text{kaikilla } x \geq x_0. \quad (5.23)$$

Tärkeä erikoistapaus on tilanne, jossa $M(x) \neq 0$ jostain arvosta x_1 alkaen, eli kaikilla $x \geq x_1$. Tällöin voidaan määritelmässä (5.23) jakaa epäyhtälö arvolla $|M(x)|$ ja huomataan, että se on ekvivalentti seuraavan raja-arvoehdon kanssa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{M(x)} = 0.$$

Aivan kuten edellisessäkin tapauksessa, merkintää käytetään myös kompleksifunktiolle ja tapauksissa, jossa asymptotiikkaa tutkitaan jonkin muun raja-arvon kuin $x \rightarrow \infty$ suhteen.

Huomautus 5.11

- Jos $f(x) = o(M(x))$ pätee selvästi myös $f(x) = O(M(x))$, mutta toisin päin eivät ominaisuudet välttämättä periydykään (esimerkiksi $2x = O(x)$, mutta $2x \neq o(x)$).
- Merkintää käytetään usein kertomaan lyhyesti, millainen virhe jää jäljelle, jos funktiota f approksimoidaan funktiolla h : merkintä $f(x) = h(x) + O(M(x))$ tarkoittaa, että $f(x) - h(x) = O(M(x))$. Esimerkiksi eksponenttifunktion Taylorin sarjasta saadaan

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3), \quad \text{kun } x \rightarrow 0.$$

- Lisää tietoa ja muita mahdollisia tapoja merkitä ja määritellä suuruusluokan käsitettä löytyy esim. Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation).

Esimerkki 5.12

- Seuraavat esimerkit näkee helposti todeksi huomaamalla, että raja-arvo $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)/M(x)|$ on äärellinen, esimerkiksi nolla. Kun reaalityttö $x \rightarrow \infty$, pätee siis

$$\frac{x}{x^2 - x + 1} = O(x^{-1}), \quad e^{ix} \ln(x^2) = O(\ln x), \quad e^{-x} = o(x^{-N}), \quad \text{kaikilla } N \in \mathbb{N}.$$

- Oletetaan, että z_0 on analyyttisen funktion f kertaluvun m napa. Tällöin on raja-arvo $\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)]$ äärellinen, pätee siis

$$f(z) = O\left(\frac{1}{(z - z_0)^m}\right), \quad \text{kun } z \rightarrow z_0.$$

- Seuraavassa esimerkissä raja-arvoa ei suoraan löydy. Sen sijaan käytetään ensin epäyhtälöä $|\sin y| \leq 1$, jonka jälkeen raja-arvon otto on helppoa L'Hôpitalin säännön avulla:

$$\frac{1}{e^x - 1} \sin(x^{-1}) = O(x^{-1}), \quad \text{kun reaalityttö } x \rightarrow 0.$$

Jos yllä sallitaan, että $x \in \mathbb{C}$, joudutaan arviota muuttamaan, sillä esim. $\sin((-it)^{-1}) = \sin(i/t) = i \sinh(1/t)$, joka on eksponentiaalisesti kasvava, kun $t \rightarrow 0$. Käyttäen sinin eksponenttesitystä ja kolmioepäyhtälöä, saadaan kompleksiarvoillekin pätevä yläraja $|\sin w| \leq e^{|w|}$, joten pätee

$$\frac{1}{e^z - 1} \sin(z^{-1}) = O\left(z^{-1} e^{1/|z|}\right), \quad \text{kun kompleksiluku } z \rightarrow 0.$$

5.4.2 Liite: Taylorin polynomi reaalfunktion approksimaationa

Aiemmin nähtiin kuinka analyyttiset kompleksifunktiot voi aina esittää suppenevan Taylorin sarjan avulla. Palautetaan tässä mieleen, kuinka vähemmän oletuksin voidaan reaalfunktiolle rakentaa approksimaatioita **Taylorin polynomien** avulla. Lauseen todistus löytyy esimerkiksi Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor%27s_theorem).

Lause 5.13 (Taylorin lause) Oletetaan, että löytyy reaalitytöt a, b , joille $a < b$ ja funktio $f(x)$ on jatkuvasti $n + 1$ kertaa derivoituva arvoilla $a < x < b$. Jos x_0 kuuluu tälle avoimelle välille, $x_0 \in]a, b[$, pätee approksimaatio

$$f(x) = P_n(x; x_0) + R_n(x; x_0), \quad \text{kun } a < x < b, \quad (5.24)$$

jossa P_n on funktion f **asteen n Taylorin polynomi** pisteessä x_0 ,

$$P_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad (5.25)$$

ja R_n on vastaava **asteen n jäännöstermi**⁵

$$R_n(x; x_0) := \int_{x_0}^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n dt. \quad (5.26)$$

Jäännöstermille pätee aina $R_n(x; x_0) = O((x - x_0)^{n+1})$, kun $x \rightarrow x_0$, sillä jokaista $x \in]a, b[$ kohti löytyy aina jokin $r \in [0, 1]$, jolla

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + r(x - x_0))}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (5.27)$$

⁵ R_n -n määrittelevä integraali luetaan suunnattuna viivaintegraalina eli, jos $x < x_0$, saa se arvon $-\int_x^{x_0} \dots dt$.

5.5 Satulapisteaprossimaatio

Satulapisteaprossimaatiota (engl. *saddle point approximation* tai *method of steepest descent*) käytetään tutkimaan, miten integraalin avulla määritellyt funktiot

$$F(T) := \int_{\gamma} f(z)e^{Tg(z)} dz, \quad T \in \mathbb{R}, \quad (5.28)$$

käyttäytyvät kun $T \rightarrow \infty$. Tässä oletetaan yleensä, että f ja g ovat analyyttisiä funktioita integrointireitin ympäristössä ja usein lähdetään liikkeelle integrointireitistä γ , joka kulkee reaaliakselia pitkin. Menetelmän idea on muokata integrointireittiä γ Cauchyn lausetta käyttäen (Lause 1.41) siten, että integrointireitillä $\operatorname{Re} g(z)$ on mahdollisimman pieni: tällöin nimittäin myös integrandin moduli tyypillisesti minimoituu, kun $T \gg 1$, sillä onhan

$$\left| f(z)e^{Tg(z)} \right| = |f(z)|e^{T\operatorname{Re} g(z)}.$$

Muotoa (5.28) olevia integraaleja tulee vastaan lähes aina, kun differentiaaliyhtälöitä ratkaistaan pian esiteltävän Fourier'n muunnoksen avulla. Esimerkiksi vapaan hiukkasen Schrödingerin yhtälön ratkaisu $\psi_t(x)$ alkutilalla, jonka Fourier'n muunnos on $\hat{\psi}_0(p)$, $p \in \mathbb{R}$, saadaan integraalista

$$\psi_t(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{i(px - t\frac{1}{2m}p^2)} \hat{\psi}_0(p). \quad (5.29)$$

Näin ollen sekä rajat $|t| \rightarrow \infty$ että $|x| \rightarrow \infty$ johtavat muotoa (5.28) olevan funktion asymptotiikan ratkaisemiseen.

5.5.1 Reaaliset satulapisteintegraalit

Yhden satulapisteen reaalinen tapaus

Aloitetaan erikoistapauksesta, jossa polku γ kulkee reaaliakselia pitkin pisteestä a pisteeseen b , ja eksponentissa oleva reaalfunktio g toteuttaa seuraavat ehdot: $g''(x) < 0$ kaikilla $x \in (a, b)$ ja löytyy *kriittinen piste* $x_0 \in (a, b)$, jossa $g'(x_0) = 0$. Koska $g'' < 0$, on derivaatta g' aidosti vähenevä koko välillä, ja pätee siis $g'(x) > 0 > g'(y)$ aina, kun $x < x_0 < y$. Nähdään, että näillä oletuksilla välillä on vain yksi kriittinen piste x_0 ja tämä piste on funktion $g(x)$ globaali maksimi.

Näistä oletuksista seuraa seuraava tulos, jonka yleinen muoto tunnetaan *Morsen lemmalla* (https://en.wikipedia.org/wiki/Morse_theory):

Lause 5.14 *Olkoon g on kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio välillä (a, b) , jolle $g''(x) < 0$ kaikilla x , ja löytyy $x_0 \in (a, b)$, jossa $g'(x_0) = 0$. Tällöin löytyy samalla välillä määritelty jatkuvasti derivoituva reaalfunktio h , jolla $h(x_0) = 0$, $h'(x_0) = 1$, $h'(x) > 0$ kaikilla x , ja*

$$g(x) = g(x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)h(x)^2, \quad a < x < b. \quad (5.30)$$

TODISTUS Merkitään yksikertaisuuden vuoksi kaavan (5.30) vakioita $g_0 := g(x_0)$ ja $b_0 := g''(x_0) < 0$. Sovelletaan Taylorin lausetta asteella $n = 1$ pisteessä $x = x_0$. Koska $g'(x_0) = 0$, häviää ensimmäisen asteen termi, ja saadaan siis

$$g(x) = P_1(x; x_0) + R_1(x; x_0) = g_0 + \int_{x_0}^x g''(t)(x-t) dt.$$

Jälkimmäisen integraalin polku voidaan parametrisoida uudelleen $t = r(x - x_0) + x_0$, $r \in [0, 1]$, josta saadaan

$$g(x) = g_0 + \frac{b_0}{2}(x - x_0)^2 \int_0^1 \frac{2}{b_0} g''(r(x - x_0) + x_0)(1 - r) dr.$$

Koska tässä olevassa integraalissa on aina $b_0^{-1}g'' > 0$, on myös

$$I(x) := \int_0^1 \frac{2}{b_0} g''(r(x-x_0) + x_0)(1-r) dr > 0,$$

joten voidaan määritellä reaalinen funktio

$$h(x) := (x-x_0)\sqrt{I(x)},$$

jolle kaava (5.30) pätee. Selvästi $h(x_0) = 0$ ja I on jatkuva funktio, jolle $I(x_0) = 1$. Näin ollen

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \sqrt{I(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \sqrt{I(x_0)} = 1,$$

joten h on derivoituva pisteessä x_0 ja sille pätee $h'(x_0) = 1$. Kun $x \neq x_0$, on $h(x)/(x-x_0) = \sqrt{I(x)} > 0$, joten $h(x) > 0$, kun $x > x_0$, ja $h(x) < 0$, kun $x < x_0$. Näin ollen voidaan kaavasta (5.30) ratkaista

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{2(g(x) - g_0)/b_0}, & \text{kun } x > x_0, \\ -\sqrt{2(g(x) - g_0)/b_0}, & \text{kun } x < x_0. \end{cases}$$

Tästä seuraa ketjusäännön perusteella, että h on jatkuvasti derivoituva sekä kun $x < x_0$ että kun $x > x_0$. Molemmissa alueissa saadaan yhtälöä (5.30) derivoimalla

$$g'(x) = b_0 h(x) h'(x) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{g'(x)}{b_0 h(x)} = \frac{g'(x)}{b_0(x-x_0)} \frac{1}{\sqrt{I(x)}}.$$

Tässä

$$g'(x) = g'(x) - g'(x_0) = \int_0^1 g''(r(x-x_0) + x_0) (x-x_0) dr,$$

joten $g'(x)/(x-x_0) < 0$ oletusten mukaan, ja nähdään siis myös, että $h'(x) > 0$. Ottamalla raja $x \rightarrow x_0$ saadaan $h'(x) \rightarrow g''(x_0)/(b_0\sqrt{I(x_0)}) = 1 = h'(x_0)$, joten h on jatkuvasti derivoituva funktio, jolle $h'(x) > 0$ kaikilla $x \in (a, b)$. \square

Morsen lemmän tuottamasta funktiosta $h(x)$ on hyötyä, sillä nyt voidaan tehdä muuttujanvaihto $t = h(x)$ alkuperäiseen integraaliin

$$F(T) := \int_a^b f(x) e^{Tg(x)} dx, \quad T > 0,$$

koska $h'(x) > 0$ koko integrointivälillä. Koska h on tällöin aidosti kasvava, pätee tällöin $h(a) < h(x_0) = 0 < h(b)$, sillä $a < x_0 < b$. Uudeksi integrointiväliksi saadaan siis $[-\alpha, \beta]$, määrittelemällä $\alpha := -h(a)$, $\beta := h(b)$, jotka ovat molemmat positiivisia. Lisäksi h :lla on olemassa käänteisfunktio h^{-1} , jolle pätee $h^{-1}(0) = x_0$ ja funktion $x(t) = h^{-1}(t)$ derivaatta on $1/h'(h^{-1}(t))$. Merkitään nyt kaavan (5.30) vakioita $g_0 := g(x_0)$ ja $c_0 := -g''(x_0) > 0$, jolloin pätee siis $g(x) = g_0 - \frac{c_0}{2} h(x)^2 = g_0 - \frac{c_0}{2} t^2$. Näin ollen muuttujanvaihto tuottaa integraalin

$$F(T) = \int_{-\alpha}^{\beta} f(h^{-1}(t)) e^{Tg_0 - \frac{1}{2}c_0 T t^2} \frac{1}{h'(h^{-1}(t))} dt.$$

Rajalla $T \rightarrow \infty$ eksponenttitermi pyrkii pitämään t :n arvot mahdollisimman lähellä nollaa, joten tehdään vielä uusi muuttujanvaihto $u = t\sqrt{c_0 T}$, josta saadaan

$$F(T) = \int_{-\alpha\sqrt{c_0 T}}^{\beta\sqrt{c_0 T}} G(u(c_0 T)^{-\frac{1}{2}}) e^{Tg_0 - \frac{1}{2}u^2} \frac{1}{\sqrt{c_0 T}} du, \quad G(t) := \frac{f(h^{-1}(t))}{h'(h^{-1}(t))}.$$

Tämän jälkeen voidaan melko vähäisin oletuksin⁶ funktiosta $f(x)/h'(x)$ ottaa tässä raja-arvo $T \rightarrow \infty$ integrandissa seuraavasti

$$e^{-g_0 T} (c_0 T)^{\frac{1}{2}} F(T) = \int_{-\alpha\sqrt{c_0 T}}^{\beta\sqrt{c_0 T}} G(u(c_0 T)^{-\frac{1}{2}}) e^{-\frac{1}{2}u^2} du \xrightarrow{T \rightarrow \infty} G(0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

Jäljelle jäävä integraali voidaan laskea Γ -funktion avulla, sillä sen integrandi on parillinen ja muuttujanvaihdolla $v = \frac{1}{2}u^2$ siitä saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 2 \int_0^{\infty} e^{-v} \frac{1}{\sqrt{2v}} dv = \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}.$$

(Parillisten ja parittomien funktioiden yli integrointia on kerrattu Luvussa 5.5.2.) Toisaalta $G(0) = f(h^{-1}(0))/h'(h^{-1}(0)) = f(x_0)/h'(x_0) = f(x_0)$, joten funktion F johtavaksi asymptoottiseksi käytökseksi saadaan

$$F(T) \approx f(x_0) e^{g(x_0)T} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(x_0)T}} \quad (T \rightarrow \infty).$$

Tätä kutsutaan **satulapisteaprosimaation johtavaksi termiksi**.

Huomataan, että johtavan asymptoottisen käytöksen laskemiseksi ei tarvitse edes ratkaista kuvausta h . Tämä onkin yksi syy, miksi yleensä lopetetaankin approksimaation laskeminen tähän. Jos funktiot f ja h ovat mielivaltaisen monta kertaa derivoituvia, niin voidaan satulapisteaprosimaatiota tarkentaa täydeksi (asymptoottiseksi) sarjakehitelmäksi käyttäen funktion $G(t) = f(h^{-1}(t))/h'(h^{-1}(t))$ Taylorin polynomiaprosimaatioita. Tällöin voidaan nimittäin integrandiin sijoittaa kaava

$$G(t) = \sum_{k=0}^n \frac{G^{(k)}(0)}{k!} t^k + R_n(t; 0),$$

josta saadaan toistamalla yllä olevat laskut kullakin n lopputulokseksi

$$F(T) \sim \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ parillinen}}}^{\infty} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} 2^{\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) e^{g(x_0)T} (c_0 T)^{-\frac{k+1}{2}} \quad (T \rightarrow \infty),$$

sillä kaikille parittomille k on $\int_{-\infty}^{\infty} u^k e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 0$, koska integrandi on tällöin pariton funktio muuttujassa u , ja parillisille k pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^k e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 2 \int_0^{\infty} u^k e^{-\frac{1}{2}u^2} du = 2 \int_0^{\infty} (2v)^{\frac{k}{2}} e^{-v} \frac{1}{\sqrt{2v}} dv = 2^{\frac{k+1}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right).$$

Käyttämällä Γ -funktion tunnettuja arvoja puoliluvuilla, saadaan tästä vielä hieman siistimpi esitys kaksoiskertomaa $((2n)!! = (2n)(2n-2)\cdots 2)$ käyttäen

$$F(T) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(2n)}(0)}{(2n)!!} (-g''(x_0)T)^{-n} e^{g(x_0)T} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(x_0)T}} \quad (T \rightarrow \infty).$$

Esimerkki 5.15 (Stirlingin kaava) Laske asymptoottinen approksimaatio kertomalle $n!$, kun $n \rightarrow \infty$.

⁶(MAT) Esimerkiksi riittää, että löytyy vakio $C > 0$, jolla $|f(x)/h'(x)| \leq C$ kaikilla $x \in (a, b)$. Tällöin voidaan raja-arvo ottaa suoraan integrandista soveltaen dominoidun konvergenssin lausetta funktioon $\mathbb{1}_{\{-\alpha\sqrt{c_0 T} < u < \beta\sqrt{c_0 T}\}} G(u(c_0 T)^{-\frac{1}{2}}) e^{-\frac{1}{2}u^2}$, käyttäen majoranttia $C e^{-\frac{1}{2}u^2}$.

Ratkaisu: Koska $n! = \Gamma(n+1)$, voidaan tämä johtaa tutkimalla funktion arvoja, kun $z \rightarrow \infty$ reaaliakselia pitkin. Voidaan käyttää integraalimääritelmää, jonka mukaan

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t+n \ln t} dt.$$

Muutetaan tämä ensin satulapistemuotoon tekemällä muuttujanvaihto $t = nx$, jolloin $\ln t = \ln n + \ln x$, ja saadaan siis

$$\Gamma(n+1) = n e^{n \ln n} \int_0^{\infty} e^{n(-x+\ln x)} dx.$$

Jäljellä oleva integraali on tässä luvussa tarkasteltua muotoa, kun määritellään $f(x) = 1$ ja $g(x) = \ln x - x$. Tällöin

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 \quad \text{ja} \quad g''(x) = -\frac{1}{x^2},$$

joten $g''(x) < 0$ kaikilla $x > 0$, ja $g'(x) = 0$ täsmälleen silloin, kun $x = 1$. Näin ollen voidaan suoraan soveltaa yllä johdettuja kaavoja, ja sijoittamalla $x_0 = 1$, $g(1) = -1$, $g''(1) = -1$, saadaan johtavaksi approksimaatioksi

$$n! \approx n e^{n \ln n} e^{-n} n^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}. \quad (5.31)$$

Tätä tulosta kutsutaan **Stirlingin kaavaksi**. Asymptoottisen kehitelmän seuraavasta termistä saadaan arvio virheellekin:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + O(n^{-1})).$$

Useamman satulapisteen reaalinen tapaus

Tarkastellaan vielä lisää tapausta, jossa polku γ kulkee reaaliakselia pitkin pisteestä a pisteeseen b , ja eksponentissa oleva g on reaalinen ja kahdesti jatkuvasti derivoituva. Tähän tapaukseen voidaan soveltaa edellistä satulapisteapproksimaatiota sopivasti valittuihin integrointiväleihin.

1. Etsitään funktion g *aidot lokaalit maksimit* eli pisteet x_i , joissa $g'(x_i) = 0$ ja $g''(x_i) < 0$.
2. Koska g'' on jatkuva, löytyy jokaista pistettä x_i kohti jokin väli (a_i, b_i) , jossa $g'' < 0$.
3. Tällöin voidaan siis soveltaa satulapisteapproksimaatiota jokaiselle välille erikseen ja saadaan

$$F(T) \approx \sum_i f(x_i) e^{g(x_i)T} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(x_i)T}} \quad (T \rightarrow \infty).$$

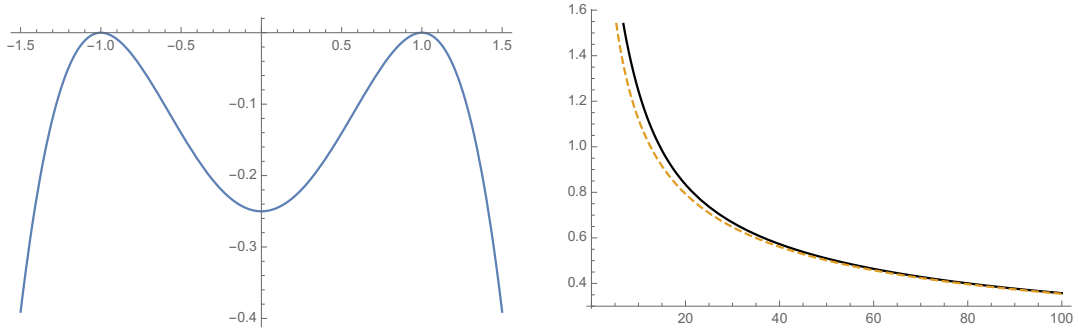
Näin tehdyssä approksimaatiossa olisi hyvä lisäksi saada jokin estimaatti myös välien (a_i, b_i) ulkopuolelle jäävälle integraalin osalle. Koska näillä väleillä ei ole aitoja lokaaleja maksimeita, tuottavat ne tyypillisesti eksponentiaalisesti pienemmän kontribuution integraaliin verrattuna globaalin maksimin tuottamaan osuuteen, mutta asia olisi aina hyvä tarkistaa erikseen.

Esimerkki 5.16 Satulapisteapproksimaatio ”kaksoishuippupotentiaalille” eli funktiolle

$$F(T) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{Tg(x)} dx, \quad T > 0, \quad \text{kun } g(x) := -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}.$$

Ratkaisu: Nyt $g'(x) = -x^3 + x$ ja $g''(x) = -3x^2 + 1$. Näin ollen g :llä on kaksi lokaalia maksimia pisteissä $x_{\pm} := \pm 1$ ja lokaali minimi pisteessä $x = 0$, ks. Kuva 5.2. Koska $g(\pm 1) = 0$ ja $g''(\pm 1) = -2$, saadaan satulapisteapproksimaatio

$$F(T) \approx \sum_{\sigma=\pm 1} e^{g(\sigma)T} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(\sigma)T}} = 2\sqrt{\frac{2\pi}{2T}} = \sqrt{\frac{4\pi}{T}}.$$



Kuva 5.2: (Vasen kuva) Esimerkin 5.16 eksponentin $g(x)$ kuvaaja. (Oikea kuva) Esimerkin 5.16 integraalin $F(T)$ ja sen satulapisteapproksimaation (katkoviiva) kuvaajat.

Sen ulkopuolelle jää integraali yli arvojen, joille $g''(x) \geq 0$, eli arvojen $|x| \leq 1/\sqrt{3}$. Tällä välillä saa g maksiminsa välin laidoilla, eli $g(x) \leq g(1/\sqrt{3}) = -\frac{1}{9}$, joten tästä tuleva kontribuutio on suuruudeltaan

$$\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} e^{Tg(x)} dx \leq \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-T\frac{1}{9}}.$$

Koska tämä termi on $o(T^{-n})$ kaikilla n , on tämä termi pienempi kuin mikään satulapisteiden ympäristöjen asymptoottisen kehitelmän termi. Kuvassa 5.2 on piirretty funktion $F(T)$ ja sen satulapisteapproksimaation $\sqrt{4\pi/T}$ kuvaajat.

(Lisä) Yleistetty reaalinen tapaus

Joskus törmää tilanteeseen, jossa satulapisteet ovat degeneroituja, eli $g''(x_0) = 0$. Tällöin on mahdollista kuitenkin yleistää yllä olevaa muuttujanvaihdon ideaa, jos eksponentissa oleva reaali-funktio g saadaan muotoon $g(x) = g_0 - |h(x)|^{2p}$, joillakin $p > 0$, $g_0 \in \mathbb{R}$ ja funktiolla h , jolle $h'(x) > 0$, kun $a < x < b$, ja $h(a) < 0 < h(b)$. (Näin käy esimerkiksi polynomille $g(x) = g_0 - x^4$, jolloin $x^4 = |x|^4$ ja voidaan valita $h(x) = x$ ja $p = 2$.) Tällöin voidaan integraaliin

$$F(T) := \int_a^b f(x) e^{Tg(x)} dx, \quad T > 0,$$

tehdä muuttujanvaihto $u = h(x)T^q$, $q := \frac{1}{2p} > 0$, jossa $x = h^{-1}(T^{-q}u)$. Kun merkitään $\alpha := -h(a) > 0$, $\beta := h(b) > 0$, saadaan siis

$$F(T) = \int_{-\alpha T^q}^{\beta T^q} G(T^{-q}u) e^{Tg_0 - |u|^{2p}} du, \quad G(t) := \frac{f(h^{-1}(t))}{h'(h^{-1}(t))}.$$

Koska h on aidosti kasvava ja jatkuva funktio, joka alkaa negatiivisesta arvosta ja päättyy positiiviseen arvoon, löytyy sille tasan yksi nollakohta $x_0 \in (a, b)$, ja siten $h^{-1}(0) = x_0$. Kun $T \rightarrow \infty$, on $T^{-q}t \rightarrow 0$ ja siten myös $h^{-1}(T^{-q}t) \rightarrow x_0$ kaikilla t . Tämän jälkeen voidaan tyypillisesti ottaa tässä raja-arvo $T \rightarrow \infty$ suoraan integrandissa seuraavasti

$$e^{-g_0 T} T^q F(T) = \int_{-\alpha T^q}^{\beta T^q} G(T^{-q}u) e^{-|u|^{2p}} du \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{f(x_0)}{h'(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|^{2p}} dt.$$

Tässä oleva integraali voidaan laskea Γ -funktion avulla, sillä sen integrandi on parillinen ja muuttujanvaihdolla $u = t^{2p}$ siitä saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|^{2p}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^{2p}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{u^{-1+1/(2p)}}{2p} du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)}{p}.$$

Tästä saadaan funktion F johtavaksi asymptoottiseksi käytökseksi

$$F(T) \approx \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)}{p} \frac{f(x_0)}{h'(x_0)} e^{g_0 T} T^{-\frac{1}{2p}} \quad (T \rightarrow \infty).$$

Tulosta voi myös tarvittaessa tarkentaa täydeksi (asymptoottiseksi) sarjakehitelmäksi käyttäen funktion G Taylorin polynomiapproksimaatiota. Tällöin voidaan nimittäin integrandiin sijoittaa

$$G(t) = \sum_{k=0}^n \frac{G^{(k)}(0)}{k!} t^k + R_n(t; 0),$$

josta saadaan toistamalla yllä olevat laskut kullakin k lopputulokseksi

$$F(T) \sim \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ parillinen}}}^{\infty} \frac{G^{(k)}(0)}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2p}\right)}{p} e^{g_0 T} T^{-\frac{k+1}{2p}} \quad (T \rightarrow \infty),$$

sillä tässäkin parittomille k on $\int_{-\infty}^{\infty} u^k e^{-|u|^{2p}} du = 0$.

Lisää yleistyksiä löytyy esimerkiksi lähteestä [7, Luku 7.7].

5.5.2 Liite: Parillisten ja parittomien funktioiden yli integrointi

Määritelmä 5.17 *Funktio $f(x)$ on **parillinen**, jos $f(-x) = f(x)$, ja **pariton**, jos $f(-x) = -f(x)$.*

Aina, kun $R > 0$, pätee

- Jos f on *parillinen*,

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2 \int_0^R f(x) dx, \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

- Jos f on *pariton*,

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 0, \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0.$$

Nämä kaikki tulokset seuraavat suoraan alla olevasta muuttujanvaihdosta, joka pätee ilman mitään oletuksia funktion f parillisuudesta:

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-R}^0 f(x) dx + \int_0^R f(x) dx = \int_0^R f(-y) dy + \int_0^R f(x) dx = \int_0^R (f(x) + f(-x)) dx. \quad (5.32)$$

5.5.3 Analyttiset kompleksiarvoiset satulapistintegraalit

Esimerkki 5.18 (Vapaan hiukkasen asymptoottinen käytös) Aloitetaan kirjoittamalla Schrödingerin yhtälön ratkaisu (5.29) satulapistemuotoon, eli funktion

$$F(T) := \int_{\gamma} f(z) e^{Tg(z)} dz \quad T \geq 0,$$

avulla sopivasti f ja g valitsemalla. Yksinkertaistetaan ensin tehtävää muuttujanvaihtoja hyväksi käyttäen. Oletetaan, että $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ ja määritellään kuten yhtälössä (5.29)

$$\psi_t(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{i(px - t \frac{1}{2m} p^2)} \hat{\psi}_0(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{i \frac{t}{m} (p \frac{mx}{t} - \frac{1}{2} p^2)} \hat{\psi}_0(p).$$

Jos $x < 0$, voidaan jäljelle jäävään integraaliin tehdä muuttujanvaihto $q = -p$, josta saadaan

$$\psi_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{i\frac{t}{m}(-\frac{mx}{t}q - \frac{1}{2}q^2)} \widehat{\psi}_0(-q).$$

Näin ollen on kaikissa tapauksissa

$$\psi_t(x) = F(T) := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{-R \rightarrow R}} f(z) e^{Tg(z)} dz,$$

jossa $T := t/m > 0$ ja määritellään vakion $\alpha := \left| \frac{mx}{t} \right| \geq 0$ avulla

$$g(z) := i \left(\alpha z - \frac{1}{2} z^2 \right), \quad f(p) := \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \widehat{\psi}_0(p), & \text{kun } x > 0, \\ \widehat{\psi}_0(-p), & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Oletetaan, että $\widehat{\psi}_0(p)$ on reaaliakselilla määritelty funktio, jolla on analyyttinen jatke koko kompleksitasoon. Tällöin myös $f(z) = \widehat{\psi}_0(\pm z)/(2\pi)$ on kokonainen funktio. Jäljelle jää satulapistointegraalin $F(T)$ asymptotiikan ratkaiseminen, kun $T \rightarrow \infty$ ja $\alpha \geq 0$ on kiinnitetty vakio. Tästä saadaan funktion $\psi_t(x)$ asymptoottinen käytös arvolla $x = m^{-1}\alpha t = O(t)$, kun $t \rightarrow \infty$.

Satulapisteapproksimaatiota varten huomataan, että

$$g'(z) = i(\alpha - z) \quad \text{ja} \quad g''(z) = -i.$$

Näin ollen g :llä on tasan yksi satulapiste, $z_0 = \alpha$, joka sijaitsee reaaliakselilla ja tässä pisteessä $g''(z_0) = -i = -e^{i\varphi_0}$, kun $\varphi_0 := \text{Arg}(-g''(z_0)) = \frac{\pi}{2}$. Koska g on toisen asteen polynomi, on sen toisen asteen Taylorin polynomiapproksimaatio eksakti, eli pätee

$$g(z) = g(z_0) + \frac{1}{2}g''(z_0)(z - z_0)^2 = i\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}e^{i\varphi_0}(z - \alpha)^2,$$

minkä näkee toki suoralla laskullakin. Näin ollen,

$$e^{Tg(z)} = e^{Tg(z_0)} e^{-\frac{T}{2}e^{i\varphi_0}(z - z_0)^2}, \quad (5.33)$$

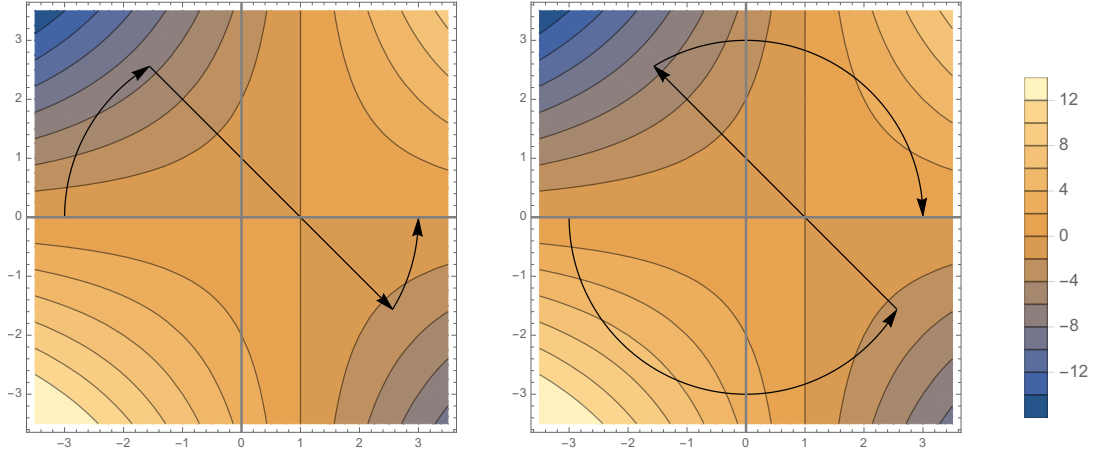
jossa $T > 0$.

Jatkoa varten tarkastellaan hetken ajan kaavan (5.33) funktiota yleisellä argumentilla $\varphi_0 := \text{Arg}(-g''(z_0))$. Huomataan, että vastaava integraali muuttuu reaalisena satulapistemuotoon, jossa $e^{-\frac{T}{2}e^{i\varphi_0}(z - z_0)^2} = e^{-\frac{T}{2}y^2}$, jos siinä valitaan integrointikäyräksi suora $z = \gamma_0(y) = z_0 + e^{i\varphi_0}y$, $y \in [-R, R]$, ja kulma φ toteuttaa

$$1 = e^{i\varphi_0} (e^{i\varphi})^2 = e^{i(\varphi_0 + 2\varphi)} \Leftrightarrow \varphi = -\frac{\varphi_0}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Näistä ratkaisuista saadaan sijoituksella polkuun γ_0 aikaiseksi tasan kaksi eri polkua γ_1 ja γ_2 , jotka vastaavat valintoja $\varphi = \varphi_1 := -\frac{\varphi_0}{2}$ ja $\varphi = \varphi_2 := \pi + \varphi_1$ (muut ratkaisut ovat joko muotoa $\varphi = \varphi_1 + 2\pi n$ tai $\varphi = \varphi_2 + 2\pi n$, jollakin $n \in \mathbb{Z}$, joista ensimmäiselle pätee $e^{i\varphi} = e^{i\varphi_1}$ ja toiselle $e^{i\varphi} = e^{i\varphi_2}$). Lisäksi $e^{i\varphi_2} = e^{i\pi} e^{i\varphi_1} = -e^{i\varphi_1}$, joten nähdään, että polku γ_2 on itse asiassa polun γ_1 käänteispolku, sillä $\gamma_2(y) = z_0 - e^{i\varphi_0}y = \gamma_1(-y)$. Poluista γ_1 ja γ_2 sanotaan, että ne kulkevat satulapisteen läpi **nopeimman vähenemisen suuntaan** eli ”**satulapistereittiä pitkin**”. Koska yllä on valittu φ_0 argumentin päähaarasta, pätee sille $\varphi_0 \in]-\pi, \pi]$, joten $\varphi_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Erikoistapauksessa $\varphi_0 = \pi$ saadaan $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$, joten $e^{i\varphi_1} = -i$ ja polku $\gamma_1(y) = z_0 - iy$, $y \in [-R, R]$, kulkee satulapisteen läpi imaginääriakselin suuntaisesti ylhäältä alaspäin. Muuten on $|\varphi_1| < \frac{\pi}{2}$, jolloin $\cos \varphi_1 > 0$ ja polun γ_1 x -koordinaatti kompleksitasossa toteuttaa $\text{Re } \gamma_1(y) = \alpha + y \cos(\varphi_1)$. Tässä tapauksessa siis γ_1 kulkee kompleksitasossa satulapisteen läpi vasemmalta oikealle, kun y saa arvot $-R \rightarrow R$.

Sijoittamalla tähän $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ saadaan $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$ ja sitä vastaava polku γ_1 , joka kulkee satulapisteen läpi 45° kulmassa vasemmalta oikealle, sekä sen käänteispolku γ_2 . Koska sekä f että g ovat kokonaisia funktioita, voi Cauchyn lausetta ja sen seurausta Lauseessa 1.41 soveltaa koko



Kuva 5.3: Esimerkin 5.18 satulapisteproksimaatioon liittyvien polkujen kuvaajia ($\alpha = 1$, $R = 3$). Molempien kuvaajien taustana on satulapistefunktion reaalisosan $\operatorname{Re} g(x+iy)$ korkeuskäyräkuvaaja: eri värejä vastaavat arvot löytyvät kuvien oikealta puolelta. (Vasen kuva) Kuvaaja satulapistereitin γ_1 sisältävälle integrointipolulle $\tilde{\gamma}_1$, joka kulkee pääasiassa funktion $\operatorname{Re} g$ negatiivisten arvojen kautta. (Oikea kuva) Kuvaaja satulapistereitin γ_2 sisältävälle integrointipolulle $\tilde{\gamma}_2$, joka kulkee myös funktion $\operatorname{Re} g$ positiivisten arvojen kautta.

kompleksitasossa. Alkuperäinen integrointipolku $\gamma_{-R \rightarrow R}$ kulkee satulapisteen $z_0 = \alpha$ läpi reaaliakselia pitkin ja se kannattaa nyt muuntaa kulkemaan satulapisteen läpi jompaakumpaa satulapistereittiä pitkin. Molemmat vaihtoehdot voi tehdä täydentämällä joko polku γ_1 tai polku γ_2 sopivasti R -säteistä ympyränkaarta pitkin kulkevilla poluilla, jotka yhdistävät polkujen päätepisteet alkuperäisen polun $\gamma_{-R \rightarrow R}$ päätepisteisiin. Näin saadaan kaksi polkua $\tilde{\gamma}_1$ ja $\tilde{\gamma}_2$, Kuvan 5.3 osoittamilla tavoilla.

Tavoitteena on, että lisätyt ympyränkaarta pitkin kulkevat integraalit häviäisivät rajalla $R \rightarrow \infty$. Kuten kuvasta 5.3 nähdään, kulkee polku $\tilde{\gamma}_2$ sellaisen alueen läpi, jossa $\operatorname{Re} g$ on positiivinen, ja osoittautuukin, että yllä vaadittu häviämisehto ei toteudu polulle $\tilde{\gamma}_2$. Toisaalta, koska pisteissä $z = Re^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$, on

$$g(z) = i \left(\alpha R e^{is} - \frac{1}{2} R^2 e^{i2s} \right) \Rightarrow \operatorname{Re} g(z) = R^2 \sin s \left(\cos s - \frac{\alpha}{R} \right).$$

Tämän avulla voi todistaa, että polkuun γ_1 lisätyt ympyränkaaren pätkät eivät tuota mitään raja-arvoon $R \rightarrow \infty$, kunhan f säilyy riittävän rajoitettuna integraalien sisällä (vrt. Jordanin lemma). Tällöin saadaan siis

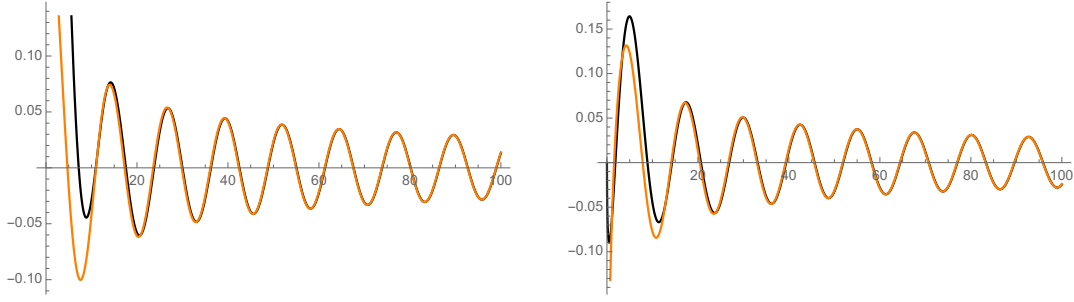
$$F(T) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} f(z) e^{Tg(z)} dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z_0 + e^{i\varphi_1} y) e^{Tg(z_0)} e^{-\frac{1}{2} T y^2} e^{i\varphi_1} dy,$$

jossa neliöjuuren päähaaraa käyttäen voidaan kirjoittaa

$$e^{i\varphi_1} = e^{-i\frac{\varphi_0}{2}} = \frac{1}{e^{i\frac{\varphi_0}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{-g''(z_0)}}.$$

sillä $|-g''(z_0)| = 1$. Jäljelle jäävään integraaliin (tai sen reaali- ja imaginääriosaan erikseen) voidaan soveltaa reaalista satulapisteproksimaatiota, joka antaa kun $T \rightarrow \infty$,

$$F(T) \approx f(z_0) \frac{1}{\sqrt{-g''(z_0)}} e^{Tg(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{T}} = f(z_0) e^{Tg(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(z_0)T}}. \quad (5.34)$$



Kuva 5.4: Satulapisteapproksimaation (5.34) (oranssi käyrä) ja vastaavan numeerisesti lasketun integraalin arvot (musta käyrä), kun $f(z) = 1/(1 + 8(z - 2)^2)$ ja $\alpha = 1$. (Vasen kuva) Reaaliosa, kun $T \in [0, 100]$. (Oikea kuva) Imaginääriosia, kun $T \in [0, 100]$.

Kuvassa 5.4 on verrattu satulapisteapproksimaation tarkkuutta erälle integroituvalla funktiolla f . Tämä voidaan vielä täydentää asymptoottiseksi sarjaksi käyttäen funktion f Taylorin sarjaa ja aiempia tuloksia

$$F(T) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(z_0)}{(2n)!!} (-g''(x_0)T)^{-n} e^{Tg(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(x_0)T}} \quad (T \rightarrow \infty)$$

Tästä saadaan Schrödingerin yhtälön ratkaisulle asymptoottinen approksimaatio sijoittamalla $T = t/m$, $z_0 = \alpha = m|x|/t$ ja $f(z) = (2\pi)^{-1} \hat{\psi}_0(\sigma z)$, jossa σ on paikan x merkki. Tuloksena on, kun $t \rightarrow \infty$, ja vaihtaan rajalla kiinteänä pidettäväksi suureksi $v_0 := \sigma\alpha/m = x/t$, joka vastaa vakionopeutta,

$$\psi_t(x)|_{x=v_0 t} \approx \hat{\psi}_0(mv_0) e^{it \frac{1}{2} m v_0^2} \frac{1}{\sqrt{i 2\pi t/m}} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Tästä nähdään, että alkutilaan liittyvän funktion $\hat{\psi}_0(p)$ voi ajatella kuvaavan hiukkasen alkutilan liikemäärän jakaumaa. Nimittäin, jos funktio on esimerkiksi keskittynyt arvon $p_0 \in \mathbb{R}$ kohdalle, saadaan yllä olevasta approksimaatiosta jotain merkittävää vain, jos $mv_0 \approx p_0$, eli $x \approx p_0 t/m$. Tämä on analoginen origosta lähtevän liikemäärän p_0 omaavan vapaan klassisen hiukkasen kanssa, jonka rata on $x(t) = p_0 t/m$. Huomataan myös, että aaltofunktion oskillaatiot, termi $e^{it \frac{1}{2} m v_0^2}$, liittyy suoraan vastaavan klassisen hiukkasen energiaan, joka on $E_0 := \frac{1}{2m} p_0^2 \approx \frac{1}{2} m v_0^2$.

Yleinen kompleksinen satulapisteapproksimaatio saadaankin aina laskettua yllä olevia ideoita seuraten. Sen voi tiivistää seuraavaksi algoritmiksi: lähdetään liikkeelle funktiosta

$$F(T) := \int_{\gamma} f(z) e^{Tg(z)} dz \quad T \geq 0,$$

jossa f ja g on analyyttisiä, polku γ kulkee niiden analyyttisyysalueessa ja ollaan kiinnostuneita rajasta $T \rightarrow \infty$. Tällöin saadaan aikaiseksi hyvä approksimaatio etenemällä seuraavasti:

1. Etsitään kaikki funktion g **kriittiset pisteet** eli z_0 , joilla $g'(z_0) = 0$.
2. Valitaan näistä vain ne, jotka ovat **ei-degeneroituneita** eli poistetaan joukosta kaikki ne pisteet, joissa $g''(z_0) = 0$.
3. Muokataan Cauchyn lauseen avulla integrointipolku γ poluksi $\tilde{\gamma}$ tavoitteena, että
 - polkua $\tilde{\gamma}$ pitkin $\operatorname{Re} g(z)$ on mahdollisimman pieni;
 - polku $\tilde{\gamma}$ kulkee vähintään yhden ei-degeneroituneen kriittisen pisteen läpi.

Tämän jälkeen voidaan polkua $\tilde{\gamma}$ edelleen muokata siten, että se kulkee jokaisen satulapisteen z_0 läpi ”satulapistereittä pitkin”. Tarkemmin voidaan vaatia, että arvoilla $z = \tilde{\gamma}(t_0 + y)$, kun $|y|$ on riittävän pieni ja t_0 on valittu siten, että $\tilde{\gamma}(t_0) = z_0$, pätee

$$e^{Tg(z)} = e^{Tg(z_0)} e^{-\frac{\alpha T}{2} y^2},$$

jossa $\alpha = |-g''(z_0)| > 0$. Osoittautuu, että tämä satulapistereitti on joko muotoa γ_1 tai γ_2 edellisessä esimerkissä, ja pisteen yli kulkevan viivaintegraalin arvolla on tässäkin tapauksessa approksimaatio

$$(\pm 1)f(z_0)e^{Tg(z_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{-g''(z_0)T}},$$

jossa valitaan merkki ”+”, jos satulapiste z_0 ylitetään ”normaalisuuntaan” (*vasemmalta oikealle tai pystysuoraan ylhäältä alas*), ja muuten siihen valitaan ”-” (ensimmäinen tapaus liittyy polkuun γ_1 ja toinen tapaus sen käänteispolkuun γ_2). Näin ollen voidaan johtava termi satulapisteapproksimaatiossa kirjoittaa suoraan jopa ilman tarkkaa polun $\tilde{\gamma}$ tuntemista,

$$F(T) = \int_{\gamma} f(z)e^{Tg(z)} dz \approx \sum_{z_0} (\pm 1)f(z_0)e^{Tg(z_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{-g''(z_0)T}} \quad (T \rightarrow \infty),$$

jossa oleva summa lasketaan kaikkien polulla $\tilde{\gamma}$ sijaitsevien satulapisteiden z_0 yli ja tätä vastaavaksi merkiksi valitaan ”+”, jos satulapiste ylitetään ”normaalisuuntaan” ja muuten se on ”-”. Lisäksi on hyvä muistaa, että **tässä olevassa neliöjuuressa valitaan aina päähaaran arvo**.

Tulosta voi tarkentaa täydeksi asymptoottiseksi sarjaksi, mutta tällöin olisi myös kompleksisessä tapauksessa hyvä tarkistaa, että satulapisteiden ulkopuolelle jäävä integrointikäyrän osa ei tuota mitään suurempaa kontribuutiota kuin asymptoottisen sarjan termit. Korjaustermien laskeminen on kuitenkin usein hyvin hankalaa, sillä ne tulevat riippumaan yllä olevasta satulapiste-polusta $\tilde{\gamma}$. Tarkempia yksityiskohtia löytyy seuraavasta valinnaisesta luvusta.

5.5.4 (Lisä) Satulapistealgoritmin tarkempi perustelu

Lähdetään liikkeelle tilanteesta, jossa polku γ on jo muokattu kulkemaan jonkin ei-degeneroituneen satulapisteen z_0 kautta ja näytetään, että se voidaan muokata tämän pisteen ympäristössä muotoon, josta satulapisteapproksimaatio saadaan suoraan laskettua. Muokkaaminen tullaan tekemään Kuvan 5.3 tavalla jossain äärellisäteisessä kiekossa. Näin ollen sen kiekon reunoja kiertävä osa ei välttämättä suoraan olekaan eksponentiaalisen pieni vaikka se tyypillisesti onkin pienempi kuin satulapisteapproksimaation johtava termi. *Jos kompleksisesta satulapisteapproksimaatiosta on tarkeisuus käyttää myös korjaustermiä*, olisi tärkeää pystyä suoraan valitsemaan käyrä γ siten, että se kulkee alla rakennettavaa satulapistereittä kiekon sisällä. Tätä varten annetaan lopussa myös yhtälöitä, joista reitin voi periaatteessa ratkaista.

Tutkitaan siis viivaintegraalia

$$F(T) := \int_{\gamma} f(z)e^{Tg(z)} dz \quad T \geq 0,$$

ja oletetaan, että polku γ kulkee pisteen z_0 kautta, jossa pätee $g'(z_0) = 0$ ja $g''(z_0) \neq 0$. Tarkemmin vaaditaan, että käyrän parametriväli (a, b) sisältää pisteen $t_0 \in (a, b)$, jossa $\gamma(t_0) = z_0$. Oletetaan lisäksi, että f ja g ovat analyyttisiä alueessa Ω , joka sisältää pisteen z_0 . Satulapistereitin etsiminen tehdään käyttäen kompleksiarvoista versiota Luvussa 5.5.1 mainitusta Morsen lemmasta, jonka todistuskin on hyvin samanlainen.

Lause 5.19 (Morsen lemma) *Olkoon $g \in H(\Omega)$ ja $z_0 \in \Omega$ sen ei-degeneroitunut kriittinen piste: $g'(z_0) = 0$ ja $g''(z_0) \neq 0$. Tällöin löytyy jokin pisteen z_0 ympäristö $U \subset \Omega$, ja sinä määritelty kääntävä analyyttinen kuvaus $h : U \rightarrow B_{\varepsilon}(0)$ johonkin avoimeen kiekkoon $B_{\varepsilon}(0)$ siten, että $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) = 1$ ja*

$$g(z) = g(z_0) + \frac{1}{2}g''(z_0)h(z)^2, \quad z \in U. \quad (5.35)$$

TODISTUS (MAT) Merkitään $b = g''(z_0) \neq 0$. Kuten reaalissa tapauksessa, myös kompleksifunktioille pätee osittaisintegroinnilla johdettavissa oleva identiteetti

$$g(z) = g(z_0) + \frac{b_0}{2}(z - z_0)^2 I(z),$$

kun määritellään

$$I(z) := \int_0^1 \frac{2}{b_0} g''(r(z - z_0) + z_0)(1 - r) dr.$$

Koska $I(z_0) = 1$ ja I on jatkuva, löytyy pisteen z_0 ympäristöstä alue $V \subset \Omega$, jossa $\operatorname{Re} I(z) > 0$. Lisäksi I on analyyttinen alueessa V , joten myös yhdistetty funktio $\sqrt{I(z)}$ on analyyttinen siinä, ja voidaan määritellä analyyttinen funktio

$$h(z) := (z - z_0)\sqrt{I(z)}, \quad z \in V,$$

jolle kaava (5.35) pätee. Lisäksi $h(z_0) = 0$ ja ketjusäännön perusteella $h'(z_0) = \sqrt{I(z_0)} = 1$. Tämän jälkeen analyyttisten funktioiden käänteiskuvauslauseesta [3, Lause 10.30] seuraa, että löytyy pisteen z_0 ympäristö $W \subset V$, jossa h on injektio ja sen kuvajoukko on kompleksitason avoin joukko. Koska $h(z_0) = 0$, kuuluu origo tähän kuvajoukkoon, joten löytyy $\varepsilon > 0$, jolla myös kiekko $B_\varepsilon(0)$ sisältyy kuvajoukkoon. Määritellään $U := h^{-1}(B_\varepsilon(0))$ ja rajoitetaan funktio h tähän avoimeen joukkoon U , jolloin saadaan aikaiseksi kaikki lauseen ehdot toteuttava funktio. \square

Kuten edellisen luvun esimerkissä, määritellään nyt $\alpha := |-g''(z_0)|$, $\varphi_0 := \operatorname{Arg}(-g''(z_0))$ ja olkoon φ joko $\varphi_1 = -\frac{\varphi_0}{2}$ tai $\varphi_2 = \pi + \varphi_1$, jolloin pätee $e^{i\varphi_0} (e^{i\varphi})^2 = 1$. Tämän jälkeen voidaan määritellä

$$\tilde{\gamma}(t_0 + y) := h^{-1}(e^{i\varphi} y),$$

aina kun $|y| < \varepsilon$, ja kaikissa näissä pisteissä on yhtälön (5.35) mukaan

$$g(\tilde{\gamma}(t_0 + y)) = g(z_0) + \frac{1}{2}g''(z_0)h(\tilde{\gamma}(t_0 + y))^2 = g(z_0) - \frac{1}{2}\alpha e^{i\varphi_0} (e^{i\varphi} y)^2 = g(z_0) - \frac{1}{2}\alpha y^2.$$

Tämä on siis toivottua satulapistemuotoa. Jos R toteuttaa ehdon $0 < R \leq \varepsilon$, saadaan välin $]-R, R[$ yli otetusta viivaintegraalista

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)e^{Tg(z)} dz = \int_{-R}^R f(\tilde{\gamma}(t_0 + y))e^{Tg(z_0)} e^{-T\frac{1}{2}\alpha y^2} \tilde{\gamma}'(t_0 + y) dy = e^{Tg(z_0)} \int_{-R}^R G(y)e^{-\frac{1}{2}\alpha T y^2} dy,$$

jossa

$$G(y) := \tilde{\gamma}'(t_0 + y)f(\tilde{\gamma}(t_0 + y)).$$

Luvun 5.5.1 tekniikoin saadaan tästä siis johtava satulapisteapproksimaatio

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)e^{Tg(z)} dz \approx e^{Tg(z_0)} G(0) \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha T}},$$

ja vastaava täysi asymptoottinen sarja

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)e^{Tg(z)} dz \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G^{(2n)}(0)}{(2n)!!} (\alpha T)^{-n} e^{Tg(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha T}} \quad (T \rightarrow \infty).$$

Johtavassa termissä esiintyy $G(0) = \tilde{\gamma}'(0)f(\tilde{\gamma}(0))$, jossa $\tilde{\gamma}(0) = h^{-1}(0) = z_0$ ja polun derivaatta voidaan laskea käyttäen analyyttisen funktion käänteisfunktion derivaatan kaavaa

$$\tilde{\gamma}'(0) = \frac{1}{h'(h^{-1}(0))} e^{i\varphi} = \frac{1}{h'(z_0)} e^{i\varphi} = e^{i\varphi}.$$

Tässä $e^{i\varphi} = \pm e^{i\varphi_1}$, jossa miinusmerkki valitaan käyrää γ_2 vastaavassa tapauksessa $\varphi = \varphi_2 = \pi + \varphi_1$. Näin ollen

$$\tilde{\gamma}'(0) = \pm e^{-i\frac{\varphi_0}{2}} = \pm \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-g''(z_0)}},$$

kuten edellisessäkin Luvussa kävi. Johtava satulapisteapproksimaatio voidaan siis kirjoittaa neliöjuuren päähaaraa käyttäen muodossa

$$\int_{\tilde{\gamma}} f(z)e^{Tg(z)} dz \approx \pm f(z_0)e^{Tg(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-g''(z_0)T}},$$

Annettu satulapisteen kautta kulkeva käyrä γ voidaan nyt muuntaa kulkemaan joko polkua γ_1 (vastaa polkua $\tilde{\gamma}$, kun $\varphi = \varphi_1$ yllä) tai polkua γ_2 (vastaa polkua $\tilde{\gamma}$, kun $\varphi = \varphi_2$ yllä) pitkin, jossa ensimmäisessä tapauksessa saadaan johtavaan approksimaatioon plusmerkki ja toisessa miinusmerkki.⁷ Kumpi näistä käyristä täytyy tähän valita, riippuu alkuperäisen polun tulosuunnasta. Kuten yleisessä reaaliosassa, ei satulapisteapproksimaatio sano mitään siitä kuinka suuri satulapisteen ympäristön ulkopuolelle jäävän integraalin arvo on, vaan se täytyy arvioida tarvittaessa erikseen.

Palataan vielä lopuksi optimaalisen satulapistepolun $\tilde{\gamma}$ etsimiseen. Se toteuttaa jossain nollan ympäristössä ehdon $g(\tilde{\gamma}(t_0 + y)) = g(z_0) - \frac{1}{2}\alpha y^2$. Ottamalla tästä imaginääriosaa, nähdään että täytyy päteä

$$\operatorname{Im} g(\tilde{\gamma}(t_0 + y)) = \operatorname{Im} g(z_0),$$

eli **optimaalista käyrää pitkin satulapisteen läpi kuljettaessa säilyy funktion g imaginääriosaa vakiona**. Yllä olevaa yhtälöä voikin käyttää ratkaisemaan optimaalinen satulapistekäyrä. Kannattaa kuitenkin huomata, että yhtälöllä $\operatorname{Im} g(\gamma(t)) = \operatorname{Im} g(z_0)$ on aina kaksi ratkaisua, joista toinen syntyy suurimman kasvun reitistä, jolle $g(\gamma(t_0 + y)) = g(z_0) + \frac{1}{2}\alpha y^2$ (vastaa valintaa $\varphi = \frac{\pi - \varphi_0}{2}$). Reaaliosan avulla voi vastaavasti etsiä optimaalista käyrää ratkaisemalla differentiaaliyhtälö

$$\frac{d^2}{dy^2} \operatorname{Re} g(\tilde{\gamma}(t_0 + y)) = -\alpha = -|g''(z_0)|$$

alkuarvoilla $\tilde{\gamma}(t_0) = z_0$ ja $\tilde{\gamma}'(t_0) = e^{i\varphi}$.

5.6 (Lisä) Eulerin–Maclaurinin summakaava

Integraaleja voidaan aina approksimoida summilla käyttäen Riemannin summia (https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_sum): valitaan esimerkiksi tasavälien pisteitä, jotka jakavat integrointivälin osiin, ja korvataan funktion f arvot kullakin välillä vakiolla, joka voi olla esimerkiksi f :n päätepisteessä saama arvo. Esimerkiksi käyttämällä integrointivälin $[a, b]$ jakoa tasaväleihin, joita on n kappaletta, saadaan näin approksimaatio

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{j=1}^n f(a + (j-1)h), \quad h := \frac{b-a}{n} > 0. \quad (5.36)$$

Tätä kaavaa voi käyttää myös toiseen suuntaan, eli approksimoida suuria summia integraaleilla, niin kuin integraalitestissä Lauseessa 2.20 tehtiin.

Yllä olevan suoraviivaista menetelmää voi parantaa monilla tavoin olettamalla jotain lisää integrandista f . Yksi yllättävänkin tehokas tapa, **Eulerin–Maclaurinin summakaava**, löytyy silloin, kun f on useita kertoja jatkuvasti derivoituva, esimerkiksi analyyttinen tai sileä funktio. Tätä kaavaa käytetään molempiin yllä mainittuihin suuntiin: sekä parantamaan tarkkuutta

⁷(MAT) Muuntamista varten voidaan rajoittaa tarpeeksi pieneen arvon t_0 ympäristöön ja sen jälkeen ”kääntää” sen suunta joko käyrän γ_1 tai käyrän γ_2 suuntaiseksi, kuten Kuvassa 5.3 tehdään. Ainoa poikkeus tähän olisi, että polku saapuu satulapisteseen ja kääntyy siinä välittömästi takaisin. Tällöin emme kuitenkaan sano, että polku kulkee satulapisteen ”läpi”.

annetun integraalin arvon numeerisessa laskennassa ja approksimoimaan suuren summan, esimerkiksi jonkin sarjan osasumman, arvoa integraalien ja derivaattojen avulla. Summakaavan johtava termi saadaan jakamalla (5.36) välin pituudella h , ja korjaustermit sisältävät funktion f ja sen derivaattojen arvoja välin päätepisteissä:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n f(a + (j-1)h) &= \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} [f(b) - f(a)] + \frac{1}{12} h [f'(b) - f'(a)] \\ &+ A_4 h^3 [f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)] + \dots + A_{2m} h^{2m-1} [f^{(2m-1)}(b) - f^{(2m-1)}(a)] + R_{2m+1}, \end{aligned} \quad (5.37)$$

jossa $m \in \mathbb{N}$ on summakaavan aste ja sitä vastaava **jäännöstermi** toteuttaa seuraavat arviot

$$|R_{2m+1}| \leq \frac{2h^{2m}}{(2\pi)^{2m+1}} \int_a^b |f^{(2m+1)}(x)| dx. \quad (5.38)$$

Näissä kaavoissa esiintyvät vakiot ovat muotoa

$$A_{2k} := \frac{B_{2k}}{(2k)!}, \quad (5.39)$$

jossa B_n ovat **Bernoullin lukuja** (https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_number), joista lukua B_1 lukuun ottamatta parittomat ovat nollia ja parillisten merkki vuorottelee:

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad \dots$$

Eulerin–Maclaurinin summakaava annetaan usein muodossa (tässä $B_1 := -\frac{1}{2}$ ja $h := \frac{b-a}{n}$)

$$\sum_{j=1}^n f(a + (j-1)h) = \frac{1}{h} \int_a^b f(x) dx + \sum_{k=1}^{2m} \frac{B_k}{k!} h^{k-1} [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] + R_{2m}.$$

Kuten muissakin tämän luvun esimerkeissä, ei tässä kaavassa yleensä kannata ottaa $m \rightarrow \infty$ vaan optimoida asteen m valintaa jäännöstermiä minimoimalla. Tyypillisesti kaava tuottaakin approksimaatioita asympotoottisina sarjoina.

Kaavan voi löytää lähtemällä liikkeelle sopivista funktioiden f ja $h^k f^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, n$, liittyvistä Taylorin polynomiapproksimaatioista ja summaamalla näitä sopivasti vakioita A_k käyttäen. Tämän luvun lopussa on liite, jossa on tästä vähän enemmän yksityiskohtia. Jäännöstermin arvion (5.38) johtaminen on huomattavasti hankalampaa, mutta siitä löytyy lisätietoja esim. Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%E2%80%93Maclaurin_formula) ja sen lähdeviitteistä.

Esimerkki 5.20 Lasketaan 12 desimaalin tarkkuudella summan $\sum_{k=100}^{999} \frac{1}{k}$ numeerinen arvo.

Ratkaisu: Summa saadaan suoraan Eulerin–Maclaurinin kaavan muotoon valitsemalla $n = 900$, $a = 100$, $b = 1000$ ja $f(x) = 1/x$. Tällöin $h = 1$ ja funktion f viisi ensimmäistä derivaattaa ovat

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}, \quad f^{(5)}(x) = -\frac{120}{x^6}.$$

Valitsemalla $m = 2$ eli käyttämällä neljää ensimmäistä termiä Eulerin–Maclaurinin kehittelmästä saadaan tehdyille virheelle estimaatin (5.38) avulla arvioksi

$$|R_{2m}| \leq \frac{2}{(2\pi)^5} \int_a^b \frac{120}{x^6} dx = \frac{15}{2\pi^5} \int_{100}^{1000} \frac{1}{x^5} dx \leq \frac{3}{2 \cdot 3^5} 10^{-10} = \frac{1}{162} 10^{-10} < 0.7 \cdot 10^{-12}.$$

Saadaan siis tulokseksi

$$\begin{aligned} \sum_{k=100}^{999} \frac{1}{k} &\approx \int_{100}^{1000} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1000} - \frac{1}{100} \right] - \frac{1}{12} \left[\frac{1}{10^6} - \frac{1}{10^4} \right] + \frac{6}{720} \left[\frac{1}{10^{12}} - \frac{1}{10^8} \right] \\ &= \ln \frac{1000}{100} + \frac{9}{2 \cdot 10^3} + \frac{99}{12 \cdot 10^6} - \frac{9999}{120 \cdot 10^{12}} \approx 2.307\,093\,342\,910\,721(700). \end{aligned}$$

Numeerinen summaus antaa arvoksi 15 desimaalin tarkkuudella

$$\sum_{k=100}^{999} \frac{1}{k} \approx 2.307\,093\,342\,910\,725.$$

Havaintaan, että virhearviokin osui kohtuullisen hyvin kohdalleen.

Liite: Eulerin–Maclaurinin summakaavan johto

Helppotetaan tehtävää käyttämällä apufunktiota $F(y) := f(a + yh)$, jolloin tavoitteena on arvioida summaa $\sum_{j=0}^{n-1} F(j)$. Oletetaan, että F on m kertaa jatkuvasti derivoitua ja määritellään

$$g_0(y) := \int_0^y F(x) dx, \quad g_k(y) := F^{(k-1)}(y), \quad 1 \leq k \leq m+1.$$

Havaitaan, että derivointi kasvattaa tässä funktion ”astetta” k yhdellä, eli $g'_0(y) = g_1(y) = F(y)$, $g'_1(y) = g_2(y)$, ... Yleisestikin pätee siis $g_k^{(\ell)}(y) = g_{k+\ell}(y)$, kunhan $k + \ell \leq m$. Kehitetään kukin funktioista g_k Taylorin polynomiksi asteeseen $\ell = m - k$ saakka pisteessä $y = j$: Taylorin lauseen mukaan on

$$g_k(y) = g_k(j) + \sum_{\ell=1}^{m-k} \frac{g_k^{(\ell)}(j)}{\ell!} (y-j)^\ell + R_{k,m-k}(y; j),$$

jossa jäännöstermi toteuttaa

$$R_{k,m-k}(y; j) := \int_j^y \frac{g_k^{(m-k+1)}(t)}{(m-k)!} (y-t)^{m-k} dt.$$

Sijoittamalla arvoksi $y = j+1$ ja käyttämällä yllä mainittuja derivaattojen laskusääntöjä saadaan siis

$$g_k(j+1) - g_k(j) = \sum_{\ell=1}^{m-k} \frac{g_{k+\ell}(j)}{\ell!} + \int_j^{j+1} \frac{g_{m+1}(t)}{(m-k)!} (j+1-t)^{m-k} dt.$$

Valitaan kullekin yhtälölle tässä vaiheessa mielivaltainen kerroin A_k , $k = 0, 1, 2, \dots, m$, ja lasketaan ne kertomisen jälkeen yhteen. Tästä saadaan

$$\sum_{k=0}^m A_k [g_k(j+1) - g_k(j)] = \sum_{k=0}^m A_k \sum_{i=k+1}^m \frac{g_i(j)}{(i-k)!} + \int_j^{j+1} \sum_{k=0}^m A_k \frac{g_{m+1}(t)}{(m-k)!} (j+1-t)^{m-k} dt.$$

Vaihtamalla summausjärjestystä nähdään, että

$$\sum_{k=0}^m A_k \sum_{i=k+1}^m \frac{g_i(j)}{(i-k)!} = \sum_{i=1}^m g_i(j) \sum_{k=0}^{i-1} A_k \frac{1}{(i-k)!}.$$

Määritelläänkin nyt $A_0 := 1$ ja lasketaan loput kertoimet, $\ell = 1, 2, \dots$, rekursiivisesti kaavalla

$$A_\ell = - \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{A_k}{(\ell+1-k)!}.$$

Tällöin

$$\sum_{i=1}^m g_i(j) \sum_{k=0}^{i-1} A_k \frac{1}{(i-k)!} = g_1(j) = F(j),$$

joten ottaen huomioon, että $g_0(j+1) - g_0(j) = \int_j^{j+1} F(x) dx$, tällä valinnalla pätee

$$F(j) = \int_j^{j+1} F(x) dx + \sum_{k=1}^m A_k [F^{(k-1)}(j+1) - F^{(k-1)}(j)] + (-1)^{m+1} \int_j^{j+1} F^{(m)}(t) \frac{B_m(t-j)}{m!} dt,$$

johon ilmestyviä funktioita $B_m(x)$ kutsutaan Bernoullin polynomeiksi

$$B_m(x) := \sum_{k=0}^m A_k \frac{m!}{(m-k)!} (-1)^m (1-x)^{m-k}.$$

Näin ollen,

$$\sum_{j=0}^{n-1} F(j) = \int_0^n F(x) dx + \sum_{k=1}^m A_k \left[F^{(k-1)}(n) - F^{(k-1)}(0) \right] + R_m,$$

jossa jäännöstermi voidaan kirjoittaa helposti integraalina käyttäen polynomien B_m periodista jatketta $P_m(x) := B_m(x - [x])$, kun $[x]$ tarkoittaa reaaliluvun x kokonaislukuosaa,

$$R_m := (-1)^{m+1} \int_0^n F^{(m)}(x) \frac{P_m(x)}{m!} dx.$$

Jäännöstermiin estimointiin tarvitaan ylärajaa Bernoullin polynomeille välillä $[0, 1]$. Tähän löytyy viitteitä Wikipediasta. Lopuksi päästään tästä luvun alussa annettuihin kaavoihin, kun huomataan, että $F^{(k)}(y) = h^k f^{(k)}(a + yh)$, joten $F^{(k)}(0) = h^k f^{(k)}(a)$ ja $F^{(k)}(n) = h^k f^{(k)}(b)$.

Luku 6

Fourier'n sarja

6.1 Johdantoa: Diskreetti Fourier'n muunnos

Diskreetti Fourier'n muunnos (https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform) kuvaa N -ulotteisen kompleksilukuvektorin $\psi = (\psi_k)_{k=0}^{N-1}$ vastaavanlaiseksi N -ulotteiseksi kompleksilukuvektoriksi $\hat{\psi}$ kaavaa

$$\hat{\psi}_n := \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik2\pi \frac{n}{N}} \psi_k, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6.1)$$

käyttäen. Diskreetti Fourier'n muunnos on taustalla esimerkiksi numeerisissa algoritmeissa, joilla lasketaan varsinaisia Fourier'n muunnoksia; ks. *fast Fourier transform* (FFT) -algoritmit Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform).

Sen avulla voidaan ratkaista myös *kaikki* differentiaaliyhtälöt, jotka ovat muotoa

$$\partial_t \psi_k(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} K_m \psi_{k-m}(t), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (6.2)$$

jos $K_m = 0$, kun $|m| \geq N/2$, ja $\psi_k(0)$ on N -**periodinen** eli $\psi_{k+N}(0) = \psi_k(0)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. (Tällaisia yhtälöitä kutsutaan konvoluutioyhtälöiksi äärellisen konvoluutioyhtymän K suhteen.) Esimerkiksi *diskreetti diffuusioyhtälö*,

$$\partial_t \psi_k(t) = D(2\psi_k(t) - \psi_{k-1}(t) - \psi_{k+1}(t)),$$

jossa $D > 0$ on jokin annettu parametri, on tätä muotoa: voidaan valita

$$K_m = D(2\mathbb{1}_{\{m=0\}} - \mathbb{1}_{\{m=1\}} - \mathbb{1}_{\{m=-1\}}),$$

jolle $K_m = 0$ aina, kun $|m| \geq 2$.

Ratkaisun löytämiseksi oletetaan aluksi, että se on N -periodinen kaikilla t . Otetaan tämän jälkeen yhtälön (6.2) molemmista puolesta diskreetti Fourier'n muunnos, jolloin pienen laskun jälkeen saadaan

$$\partial_t \hat{\psi}_n(t) = \hat{K}_n \hat{\psi}_n(t), \quad \hat{K}_n := \sum_{m \in \mathbb{Z}} K_m e^{im2\pi \frac{n}{N}}.$$

(Yleisestikin Fourier'n muunnos kuvaa konvoluutiot tuloksi, niin kuin myöhemmin nähdään.) Yhtälön ratkaisu on yksikertainen, kun alkutila $\psi(0)$ on annettu:

$$\hat{\psi}_n(t) = e^{t\hat{K}_n} \hat{\psi}_n(0).$$

Tämän jälkeen ei tarvitse kuin löytää **käänteismuunnos** $A : \hat{\psi} \mapsto \psi$, ja yhtälön ratkaisulle saadaan kaava

$$\psi_k(t) = (A[e^{t\hat{K}} \hat{\psi}(0)])_k, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Lopputulos jatketaan N -periodiseksi määrittelemällä $\psi_{mN+k}(t) = \psi_k(t)$ kaikilla $m \in \mathbb{Z}$. Tästä saadaan algoritmi, jolla N -periodinen alkutila $\psi(0)$ määrittelee N -periodiset funktiot $\psi(t)$. Lopuksi voikin vielä varmistaa laskulla, että tämä algoritmi tosiaan tuottaa yhtälön (6.2) ratkaisuja.

Kuten myöhemmin nähdään, voi samankaltaisella algoritmilla johtaa myös vapaan hiukkasen Schrödingerin yhtälölle,

$$\partial_t \psi(x, t) = i \frac{1}{2m} \nabla_x^2 \psi(x, t), \quad (6.3)$$

yhtälössä (5.29) annetun ratkaisukaavan.

Itse asiassa käänteismuunnos A löytyy helposti: kuten harjoitustehtävässä Ib.2.1, voidaan äärellisen geometrisen summan kaavaa (2.1) käyttäen johtaa seuraava tulos, olettaen $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{ik2\pi \frac{n}{N}} = \delta_N(k) := \begin{cases} 0, & \text{jos } k \neq mN \text{ kaikilla } m \in \mathbb{Z}, \\ N, & \text{jos } k = mN \text{ jollakin } m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Näin ollen, jos $k = 0, 1, \dots, N-1$, saadaan ”vääränmerkkisestä” Fourier’n muunnoksesta tulos

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-ik2\pi \frac{n}{N}} \widehat{\psi}_n = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k'=0}^{N-1} e^{-ik2\pi \frac{n}{N}} e^{ik'2\pi \frac{n}{N}} \psi_{k'} = \sum_{k'=0}^{N-1} \psi_{k'} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(k'-k)2\pi \frac{n}{N}} = \sum_{k'=0}^{N-1} \psi_{k'} \delta_N(k' - k).$$

Viimeisessä summassa on tasan yksi termi, joka poikkeaa nolasta, ja se saadaan, kun $k' = k$. Näin ollen summan arvo on aina $N\psi_k$, ja saadaankin kaava

$$\psi_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ik2\pi \frac{n}{N}} \widehat{\psi}_n.$$

Koska vektori ψ on tässä laskussa mielivaltainen, nähdään, että käänteismuunnos A on olemassa ja sen määrittelee kaava

$$A[\Psi]_k := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ik2\pi \frac{n}{N}} \Psi_n, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (6.4)$$

Tutkitaan sitten, mitä tapahtuu, jos näissä kaavoissa otetaan $N \rightarrow \infty$ sopiville lähtövektoreille. Aloitetaan käänteismuunnoksesta olettaen, että vektori Ψ_n rakennetaan valitsemalla arvoja jat-kuvasta funktiosta f kaavalla

$$\Psi_n := f\left(2\pi \frac{n}{N}\right).$$

Tällöin

$$A[\Psi]_k = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(2\pi \frac{n}{N}\right) e^{-ik2\pi \frac{n}{N}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

sillä summa muodostaa Riemannin summa -approksimaation oikean puolen integraalista käyttäen tasavälijakoa, jossa välin pituus on $h = \frac{2\pi}{N}$. Raja-arvona saatujen integraalien arvoja kutsutaan funktion f **Fourier'n kertoimiksi**,

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6.5)$$

Tarkastellaan sitten itse diskreettiä muunnosta ja jatketaan siinä vektori ψ_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, kaavalla $\psi_{mN+k} = \psi_k$, $m \in \mathbb{Z}$, N -periodiseksi. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi myös, että N on

parillinen ja kirjoitetaan muunnoksen määritelmä uudestaan käyttäen ominaisuutta $\psi_k = \psi_{k-N}$

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_n &= \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik2\pi\frac{n}{N}} \psi_k = \sum_{k=0}^{N/2} e^{ik2\pi\frac{n}{N}} \psi_k + \sum_{k=N/2+1}^{N-1} e^{ik2\pi\frac{n}{N}} \psi_{k-N} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2} e^{ik2\pi\frac{n}{N}} \psi_k + \sum_{k'=-N/2+1}^{-1} e^{i(k'+N)2\pi\frac{n}{N}} \psi_{k'} = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} e^{ik2\pi\frac{n}{N}} \psi_k,\end{aligned}$$

sillä $e^{i2\pi n} = 1$, kun $n \in \mathbb{Z}$. Oletetaan nyt, että suurilla $|k|$:n arvoilla ψ_k :n arvot poimitaan jonosta $(\psi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ottamalla indeksejä $-\frac{N}{2} + 1 \leq k \leq \frac{N}{2}$ vastaavat arvot, ja että alkuperäinen jono on itseisesti summautuva, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_k| < \infty$. Tällöin

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\widehat{\psi}_n - f\left(2\pi\frac{n}{N}\right) \right) = 0,$$

funktiolle

$$f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k e^{ikx},$$

joka on hyvin määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$ itseisesti summautuvan sarjan avulla. Tätä funktiota kutsutaan **annetuista kertoimista** ψ_k , $k \in \mathbb{Z}$, **tehdyn Fourier'n sarjan** määrittelemäksi.

Tässä luvussa tutkitaan yllä määriteltyjen Fourier'n kertoimien käyttäytymistä ja niistä tehtyjä Fourier'n sarjoja. Tarkoituksena on nähdä mitkä diskreetin Fourier'n muunnoksen ominaisuuksista periytyvät myös sarjoille: milloin funktion kertoimien Fourier'n sarja suppenee, milloin muunnokset ovat edelleen toistensa käänteismuunnoksia ja missä mielessä?

6.2 Fourier'n sarja välillä $[0, 2\pi]$

Aloitetaan lisäämällä oletukset, jotka varmistavat, että edellisen johdantoluvun määritelmät varmasti toimivat.

Määritelmä 6.1 (Fourier'n sarja) Kompleksilukujonon $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ muodostama Fourier'n sarja määritellään pääarvomielessä, kaavalla

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}, \quad (6.6)$$

kaikissa niissä pisteissä $x \in \mathbb{R}$, joissa raja-arvo on olemassa. Jos raja-arvo löytyy, sanotaan, että **Fourier'n sarja suppenee pisteessä** x .

Määritelmästä seuraa suoraan, että jos $S(x)$ on määritelty, on myös $S(x + 2\pi m)$, $m \in \mathbb{Z}$, määritelty ja sille pätee $S(x + 2\pi m) = S(x)$. Näin ollen kaavan (6.6) Fourier'n sarjan määrittelemä funktio S on aina **2π -periodinen**. Alla on myös annettu erikoistapaus, jossa Fourier'n sarja suppenee kaikkialla ja määrittelee jatkuvan funktion. *Jatkuvat periodiset funktiot ovat aina myös rajoitettuja*, sillä ne saavuttavat maksiminsa ja miniminsä jossain periodisuuvälän pisteessä (https://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_value_theorem).

Lause 6.2 Olkoon $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ **itseisesti suppeneva** kompleksilukujono,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Tällöin Fourier'n sarja (6.6) suppenee itseisesti kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja määrittelee **jatkuvan** funktion $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

TODISTUS Koska $|e^{ikx}| = 1$, kun $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$, oletuksista seuraa suoraan, että kaavan (6.6) sarja suppenee itseisesti ja toteuttaa Weierstrassin M-testin koko reaaliakselilla, majoranttina jono $(|c_k|)$. Erityisesti arvojen $k < 0$ ja $k > 0$ muodostamat sarjatkin suppenevat erikseen, joten myös kaavan (6.6) raja-arvo suppenee kohti sarjan antamaa kompleksilukua. $S(x)$ on siis hyvin määritelty kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Toisaalta, koska jokainen funktioista $x \mapsto c_k e^{ikx}$ on jatkuva kiinteällä indeksillä k ja jono toteuttaa M-testin, periytyy jatkuvuus myös sarjan summalle, eli funktiolle $S(x)$ (ks. Luku 2.2.1). \square

Määritelmä 6.3 (2π -periodisen funktion Fourier'n kertoimet) Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on 2π -periodinen funktio, eli $f(x + 2\pi) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja se on itseisesti integroituva välillä $[0, 2\pi]$, eli

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx < \infty.$$

Tällaisen funktion Fourier'n kertoimet muodostavat kompleksilukujonon $(\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, jonka alkiot määritellään itseisesti suppenevina integraaleina,

$$\hat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6.7)$$

Näiden kertoimien muodostaman jonon (\hat{f}_k) Fourier'n sarjaa kutsutaan funktion f **Fourier'n sarjaesitykseksi**.

Huomautus 6.4

- Kertoimien määritelmässä (6.7) voidaan integrointiväliä siirtää vapaasti, eli integroida minkä tahansa välin $[y, y + 2\pi]$, $y \in \mathbb{R}$, yli, sillä oletuksista seuraa, että *integrandi on 2π -periodinen* (jätetään asian todistaminen harjoitustehtäväksi). Esimerkiksi tällöin pätee

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6.8)$$

Sopivasti tulkittuna ovat nämä muunnokset itse asiassa edelleen toistensa käänteismuunnoksia. Aloitetaan erikoistapauksesta, jossa käänteismuunnos toimii jokaisessa pisteessä.

Lause 6.5 Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on **jatkuva** 2π -periodinen funktio ja oletetaan, että sen Fourier'n kertoimien muodostama sarja suppenee itseisesti, eli

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k| < \infty.$$

Tällöin funktion f Fourier'n sarjaesitys suppenee **jokaisessa pisteessä** kohti funktiota f :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

TODISTUS Lauseen 6.2 perusteella jonon (\hat{f}_k) Fourier'n sarja suppenee siis itseisesti kaikkialla ja määrittelee jatkuvan periodisen funktion $S(x)$. Lasketaan tämän funktion Fourier'n kertoimet,

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(x) e^{-ikx} dx = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{k'} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k'-k)x} dx,$$

jossa summausjärjestyksen ja integroinnin vaihdon voi perustella itseisellä summautuvuudella Luvun 2.2.1 tuloksen (2) tapaan. Jos tässä $k' - k \neq 0$, saadaan

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k'-k)x} dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{i(k'-k)} e^{i(k'-k)x} = \frac{1}{i(k'-k)} (e^{i(k'-k)2\pi} - 1).$$

Näin ollen, kun $k, k' \in \mathbb{Z}$, on myös $k' - k$ kokonaisluku, ja saadaan tulos

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k'-k)x} dx = \begin{cases} 0, & \text{jos } k' - k \neq 0, \\ 1, & \text{jos } k' - k = 0, \end{cases} \quad (6.9)$$

eli integraalin arvo on nolla, jos $k' \neq k$, ja se on yksi, jos $k' = k$. Näin ollen $c_k = \widehat{f}_k$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$, eli jatkuvilla funktioilla f ja S on sama Fourier'n sarja. Todistus siitä, että tästä seuraa $f(x) = S(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, jätetään matematiikan Fourier-analyysin kursille. \square

Huomautus 6.6

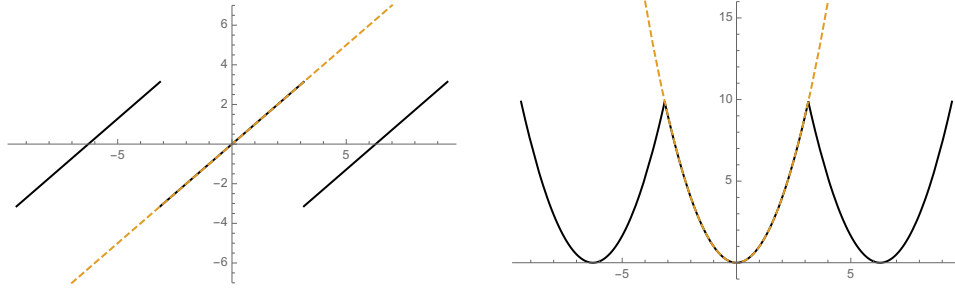
- Yllä olevista tuloksista seuraa itse asiassa myös, että jos funktion $f(x)$ Fourier'n sarja on *itseisesti summautuva* voi sen "korvata" jatkuvalla funktiolla $S(x)$ määrittelemällä sen uudelleen "muutamassa" pisteessä.¹
- Tyypillisesti epäjatkovien funktioiden Fourier'n sarjat eivät olekaan itseisesti summautuvia, vaan ne suppenevat vain kaavan (6.6) pääarvomielessä (ks. seuraava Esimerkki).
- Näissä tuloksissa on tärkeää, että **periodinen funktio f on jatkuva myös päätepisteissä 0 ja 2π** , eli f :n jatkuvuusoletus vaatii myös, että $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(2\pi - \varepsilon) = f(2\pi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(2\pi + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\varepsilon) = f(0)$, eli funktion täytyy olla oikealta jatkuva pisteessä 0 , vasemmalta jatkuva pisteessä 2π , ja lisäksi $f(0) = f(2\pi)$.

Huomautus 6.7 Kun pyydetään laskemaan **reaaliakselilla määritellyn funktion f Fourier'n sarja jollain välillä $[a, b]$** , $b = a + L$ ja $L > 0$, tarkoituksena on etsiä kerroinjono, joiden muodostama L -periodinen Fourier'n sarja approksimoi mahdollisimman hyvin funktiota f välillä $[a, b]$. Tämä saadaan aikaan seuraavasti (tämän luvun funktioille periodisuuvälän pituus $L = 2\pi$):

1. Poistetaan toinen välin päätepisteistä (ei ole väliä kumpi), ja tutkitaan esimerkiksi väliä $I :=]a, b]$.
2. Aloitetaan määrittelemällä funktio g funktion f rajoittumana välille I , eli asetetaan $g(x) := f(x)$, kun $x \in I$.
3. Jatketaan funktio g periodisesti koko reaaliakselille, eli määritellään $g(x + mL) := g(x) = f(x)$, aina kun $x \in I$, $m \in \mathbb{Z}$, jossa $L = b - a > 0$ on välin pituus.
4. Käytetään L -periodisen funktion $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, Fourier'n sarjaa $S(x)$.

Tällöin nimittäin kaikissa pisteissä $x \in I$, joissa $S(x) = g(x)$, pätee automaattisesti myös $S(x) = f(x)$, eli saatu sarja esittää funktiota f juuri välin I pisteissä.

¹(MAT) Tarkemmin: jatkuva funktio S yhtyy tällöin alkuperäiseen funktioon f melkein kaikkialla, lukuun ottamatta Lebesguen mitan suhteen nollamittaista joukkoa.



Kuva 6.1: Kahden funktion $f(x)$ (oranssi katkoviiva) periodiset jatkeet $g(x)$ (musta viiva) kahdessa eri tapauksessa väliltä $]-\pi, \pi]$: (vasen kuva) $f(x) = x$, (oikea kuva) $f(x) = x^2$.

Esimerkki 6.8 Laske funktion $f(x) = x$ Fourier'n sarja välillä $[-\pi, \pi]$.

Ratkaisu: Rakennetaan ensin f :n 2π -periodinen jatke g kuten Huomautuksessa 6.7 käyttäen väliä $I =]-\pi, \pi]$ – Kuvassa 6.1 vasemmalla puolella on annettu funktioiden f ja g kuvaajat. Lasketaan tämän jälkeen g :n Fourier'n kertoimet \hat{g}_k ja merkitään näitä yksinkertaisuuden vuoksi c_k :lla. Koska g on 2π -periodinen, voidaan c_k laskea myös integraaleja (6.8) käyttäen,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} xe^{-ikx} dx.$$

Jos $k \neq 0$, on funktion e^{-ikx} integraalifunktio $\frac{1}{-ik}e^{-ikx}$. Tällöin voidaan yllä oleva integraali laskea osittaisintegroimalla,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} x \frac{1}{-ik} e^{-ikx} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikx} dx \right) = \frac{i}{2\pi k} \left(\pi e^{-ik\pi} - (-\pi) e^{ik\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikx} dx \right) \\ &= \frac{i}{2k} \left((-1)^{-k} + (-1)^k \right) = i \frac{(-1)^k}{k}, \end{aligned}$$

sillä $e^{im\pi} = (-1)^k = (-1)^{-k} = e^{-im\pi}$ aina, kun $m \in \mathbb{Z}$. Lisäksi, kun $k = 0$, saadaan

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} x^2 = 0.$$

Näin ollen funktion g Fourier'n sarja, joka on sama kuin etsitty funktion f Fourier'n sarja välillä $[-\pi, \pi]$, kuuluu

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} i \frac{(-1)^k}{k} e^{ikx}.$$

Huomataan, että tämä sarja *ei* suppene itseisesti, sillä sen itseisarvojen muodostama sarja on $\sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{1}{|k|} = \infty$. Näin ollen täytyy Fourier'n sarja määritellä käyttäen kaavan (6.6) raja-arvoa, eikä ole vielä selvää milloin se suppenee.

Sarjaa voi vielä sieventää muotoon, josta näkyy esimerkiksi se, että sarja tuottaa supetessaan aina reaalisia arvoja: nyt

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=-N \\ k \neq 0}}^N i \frac{(-1)^k}{k} e^{ikx} &= \sum_{k=1}^N i \frac{(-1)^k}{k} e^{ikx} + \sum_{k=-N}^{-1} i \frac{(-1)^k}{k} e^{ikx} = \sum_{k=1}^N i \frac{(-1)^k}{k} e^{ikx} + \sum_{k'=1}^N i \frac{(-1)^{-k'}}{-k'} e^{-ik'x} \\ &= \sum_{k=1}^N i \frac{(-1)^k}{k} (e^{ikx} - e^{-ikx}) = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k+1}}{k} 2 \sin(kx). \end{aligned}$$

Näin ollen, kun otetaan tässä raja $N \rightarrow \infty$, saadaan sarja

$$S(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx),$$

jonka suppenemista voi tarkastella käyttäen sarjojen tavallista suppenemista, kuten Luvussa 2.1 määriteltiin. Itse asiassa kohta esitettävän Dirichlet'n lauseen perusteella nähdään, että sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$, ja se esittää funktiota $f(x) = x$ pisteissä $-\pi < x < \pi$. Päätepisteissä esitys ei enää kuitenkaan päde, vaan saadaan $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$.

Lause 6.9 (Dirichlet'n lause) *Oletetaan, että f on 2π -periodinen reaalfunktio, joka toteuttaa Dirichlet'n ehdot:*

1. *Funktiolla f on korkeintaan äärellisen monta epäjatkuuuspistettä välillä $[0, 2\pi]$, ja jokaisessa epäjatkuuuspisteessä x_0 löytyy funktiolle sekä vasemmalta että oikealta otettu raja-arvo, eli luvut*

$$f(x_0^-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x), \quad (6.10)$$

$$f(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x). \quad (6.11)$$

2. *Funktiolla f on vain äärellinen määrä paikallisia ääriarvopisteitä (eli lokaaleja maksimeja ja minimejä) välillä $[0, 2\pi]$. (Tämä tarkoittaa sitä, että f ei saa heilahdella rajattomasti.)*

Tällöin funktion f Fourier'n sarja

$$S(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx},$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja sillä on samat Fourier'n kertoimet kuin funktiolla f , eli $\hat{S}_k = \hat{f}_k$. Lisäksi

1. *S esittää funktiota f kaikissa sen jatkuuuspisteissä, eli $S(x) = f(x)$, jos x on piste, jossa f on jatkuva.*
2. *Funktion f epäjatkuuuspisteessä x_0 saa S arvon epäjatkuvuuden muodostaman hypyn puolivälistä,*

$$S(x_0) = \frac{1}{2} (f(x_0^-) + f(x_0^+)).$$

TODISTUS Tämän lauseen todistus tehdään matematiikan Fourier-analyysin kurssilla. Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_conditions) löytyy myös lisää yksityiskohtia. \square

Huomautus 6.10

- Huomaa, että lause koskee myös funktion arvoja välin päätepisteissä, eli jos $f(2\pi^-) \neq f(0^+)$, on $S(0) = S(2\pi) = \frac{1}{2} (f(2\pi^-) + f(0^+))$. Tämä tilanne tulee usein vastaan, kun lasketaan jatkuvalla funktiolle Fourier'n sarjaesityksiä jollain suljetulla välillä, ks. Esimerkki 6.8.
- Dirichlet'n lausetta voi soveltaa myös, kun funktio f on *kompleksi-arvoinen*. Tällöin vaaditaan, että sekä $\operatorname{Re} f$ että $\operatorname{Im} f$ toteuttavat molemmat erikseen Dirichlet'n ehdot.

6.3 Trigonometriset sarjat

Jos funktiolla f on Fourier'n sarjaesitys, on sillä aina myös esitys trigonometristen funktioiden $\cos(kx)$ ja $\sin(kx)$ avulla. Nimittäin Eulerin kaavasta seuraa, että

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ikx} &= \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k (\cos(kx) + i \sin(kx)) \\ &= \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^N \widehat{f}_k \cos(kx) + \sum_{k=-N}^{-1} \widehat{f}_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^N i \widehat{f}_k \sin(kx) + \sum_{k=-N}^{-1} i \widehat{f}_k \sin(kx) \\ &= \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^N \widehat{f}_k \cos(kx) + \sum_{k'=1}^N \widehat{f}_{-k'} \cos(-k'x) + \sum_{k=1}^N i \widehat{f}_k \sin(kx) + \sum_{k'=1}^N i \widehat{f}_{-k'} \sin(-k'x) \\ &= \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^N \left[(\widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}) \cos(kx) + i (\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}) \sin(kx) \right], \end{aligned}$$

jossa on käytetty hyväksi kosinin parillisuutta ja sinin parittomuutta. Näin ollen, jos Fourier'n sarja suppenee pisteessä x , suppenee myös vastaava trigonometrinen sarja pisteessä x , ja pätee

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ikx} = \widehat{f}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)],$$

kun määritellään

$$a_k = \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}, \quad b_k = i (\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nämä kertoimet voi myös laskea suoraan integraalien avulla, kuten Fourier'n sarjan kertoimet (6.7). Lähetään liikkeelle funktion f periodisuuteen perustuvasta symmetrisestä integrointiväliltä (6.8), jonka mukaan yllä on kaikilla $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_k = \widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (e^{-ikx} + e^{ikx}) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \\ b_k = i (\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) i (e^{-ikx} - e^{ikx}) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx. \end{aligned}$$

Käytetäänkin tämän jälkeen yllä olevaa integraalia määrittelemään myös a_k , kun $k = 0$, eli asetetaan

$$a_0 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\widehat{f}_0 = \widehat{f}_0 + \widehat{f}_{-0}.$$

Samoin voidaan määritellä myös $b_0 = 0$. Ollaan siis todistettu seuraava tulos

Lause 6.11 Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on 2π -**periodinen funktio**, joka on itseisesti integroitava välillä $[0, 2\pi]$. Kun $k \in \mathbb{N}_0$, määritellään

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx. \quad (6.12)$$

Näitä kertoimia vastaava **trigonometrinen sarja** pisteessä x on

$$S(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)], \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.13)$$

Tämä sarja suppenee, jos ja vain jos vastaava Fourier'n sarja kertoimilla (\hat{f}_k) suppenee, ja tällöin sarjat suppenevat kohti samaa arvoa. Mikäli funktio f toteuttaa Dirichlet'n ehdot, on $S(x) = f(x)$ jokaisessa pisteessä x , jossa f on jatkuva.

Trigonometrinen sarja on kätevä erityisesti, jos f on reaaliarvoinen funktio tai jos se on parillinen tai pariton. Nimittäin, jos $f(x) \in \mathbb{R}$ kaikilla x , on määritelmien (6.12) integrandit reaaliarvoisia, joten pätee $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, ja trigonometrinen sarja (6.13) sisältää vain reaalisia termejä. Sen sijaan funktion f Fourier'n kertoimille saadaan tällöin vain ominaisuus

$$\hat{f}_k^* = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right)^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) e^{-ikx})^* dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{ikx} dx = \hat{f}_{-k}.$$

Tästä ominaisuudesta seuraa myös jo itsessään, että Fourier'n sarja $S(x)$ antaa jokaisessa suppenemispisteessään reaalisen arvon: jos $\hat{f}_k^* = \hat{f}_{-k}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ ja Fourier'n sarja suppenee pisteessä x , pätee

$$S(x)^* = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikx} \right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\hat{f}_k e^{ikx})^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{-k} e^{-ikx} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{k'} e^{ik'x} = S(x),$$

eli tällöin $S(x) \in \mathbb{R}$.

Jos taas f on parillinen tai pariton, on puolet trigonometrisen sarjan kertoimista nollia integrandin parillisuusominaisuuksiin nojaten, ks. Luku 5.5.2. Esimerkiksi, jos f on *parillinen*, on myös funktio $f(x) \cos(kx)$ parillinen, mutta funktio $f(x) \sin(kx)$ on pariton, joten tällöin saadaan

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = 0 \quad \Rightarrow \quad S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx). \quad (6.14)$$

Vastaavasti, kun f on *pariton*, pätee

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \Rightarrow \quad S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx). \quad (6.15)$$

Esimerkin 6.8 periodinen jatkehan on pariton funktio, joten tämä selittää, miksi sen Fourier'n sarja oli kirjoitettavissa pelkästään funktioiden $\sin(kx)$ avulla.

Taulukossa 6.1 on yhteenveto yllä johdetuista trigonometristen ja Fourier'n sarjojen perusominaisuuksista.

Esimerkki 6.12 Laske funktion $f(x) = x^2$ trigonometrinen sarja välillä $[-\pi, \pi]$.

Ratkaisu: Olkoon g funktion f periodinen jatke väliltä $]-\pi, \pi]$. Tällöin $g(x) = f(x) = f(-x) = g(-x)$, kun $-\pi < x < \pi$, joten g on parillinen funktio sen trigonometriset kertoimet määrittelevissä integraaleissa (6.12). Lisäksi g perii f :n jatkuvuuden kaikkiin näihin pisteisiin ja toisaalta päätepisteissä pätee $g((-\pi)^+) = (-\pi)^2 = \pi^2 = g(\pi) = g(-\pi)$, joten g on jatkuva koko reaaliakselilla ja toteuttaa Dirichlet'n ehdot. (Kuvassa 6.1 oikealla puolella on annettu funktioiden f ja g kuvaajat.) g :n parillisuudesta seuraa, että sen trigonometrisille kertoimille on $b_k = 0$, kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$, ja

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx.$$

Näin ollen

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \Big/ \frac{1}{3} x^3 = 2 \frac{\pi^2}{3},$$

Taulukko 6.1: Yhteenveto 2π -periodisen funktion f Fourier'n ja trigonometrinen sarjojen $S(x)$ perusominaisuuksista, kun funktio f on esitettävissä sarjan S avulla, eli toteuttaa esimerkiksi Dirichlet'n ehdot.

- S on reaaliarvoinen, jos ja vain jos $\widehat{f}_k^* = \widehat{f}_{-k}$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.
- S on reaaliarvoinen, jos ja vain jos $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$.
- Jos f on parillinen, on $b_k = 0$ kaikilla k .
- Jos f on pariton, on $a_k = 0$ kaikilla k .

ja, kun $k \in \mathbb{N}$, voidaan integraali laskea kaksi kertaa osittaisintegroimalla,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} a_k &= \int_0^\pi x^2 \cos(kx) dx = \int_0^\pi x^2 \frac{1}{k} \sin(kx) - \int_0^\pi 2x \frac{1}{k} \sin(kx) dx \\ &= 0 - \frac{2}{k} \left(\int_0^\pi x \frac{-1}{k} \cos(kx) - \int_0^\pi \frac{-1}{k} \cos(kx) dx \right) = \frac{2}{k^2} \left(\pi \cos(k\pi) - 0 - \int_0^\pi \frac{1}{k} \sin(kx) \right) \\ &= \frac{2}{k^2} \pi (-1)^k. \end{aligned}$$

Näin ollen $a_k = (-1)^k \frac{4}{k^2}$, joten funktion g trigonometriseksi sarjaksi saadaan

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx).$$

Huomataankin, että päinvastoin kuin Luvun ensimmäisessä esimerkissä, on tämä sarja itseisesti suppeneva, sillä $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, joka on sopuinnassa g jatkuvuuden kanssa. Lausetta 6.5 tai Dirichlet'n lausetta soveltamalla saadaan siis $S(x) = x^2$, kun $-\pi \leq x \leq \pi$, sillä g on jatkuva kaikkialla, mukaan lukien välin päätepisteet. Erityisesti $S(0) = 0$, joten tämän Fourier'n sarjan avulla saadaan ratkaistua erään sarjan eksakti arvo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Toisaalta, kun $x = \pi$, on sarjassa $\cos(k\pi) = (-1)^k$, joten sen avulla ratkeaa myös eräs Riemannin ζ -funktion eksakti arvo:

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

6.4 L -periodisen funktion Fourier'n sarjaesitykset

Yllä tarkasteltiin pelkästään 2π -periodisen funktion esittämistä Fourier'n sarjojen avulla. Entä jos funktio on periodinen $f(x+L) = f(x)$, kaikilla x , mutta sen periodin pituus L ei olekaan 2π ? Vastaavasti, mitä tehdä, jos ei kysytäkään funktion Fourier'n sarjaesitystä 2π :n mittaisella välillä, vaan jollain yleisellä välillä $[a, a+L]$?

Itse asiassa kaikki edellä olevat tulokset voi helposti yleistää myös koskemaan näitä tapauksia: riittää parametrisoida funktion f argumentti uudelleen siten, että periodisuusväli $[a, a+L]$ saadaan

uuden parametrin välistä $[0, 2\pi]$. Käytetään tähän lineaarista kuvausta $M(y) = \alpha + \beta y$, ja etsitään reaalivakiot α, β , joilla $M(0) = a$ ja $M(2\pi) = a + L$. Tästä saadaan ratkaisuksi $\alpha = a$ ja $\beta = \frac{L}{2\pi}$, eli kuvaus $M(y) = a + \frac{L}{2\pi}y$. Määritellään tämän jälkeen $g(y) := f(M(y))$, eli

$$g(y) = f\left(a + \frac{L}{2\pi}y\right), \quad y \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad g(y + 2\pi) = f\left(a + \frac{L}{2\pi}y + L\right) = f\left(a + \frac{L}{2\pi}y\right) = g(y),$$

eli g on tällöin todellakin 2π -periodinen funktio, jos f on L -periodinen funktio.

Huomataan myös, että jos f toteuttaa Dirichlet'n ehdot, kun niissä korvataan väli $[0, 2\pi]$ välillä $[a, a + L]$, toteuttaa myös g Dirichlet'n ehdot standardivälillä. Tässä tapauksessa sen Fourier'n sarja suppenee epäjatkuvuuspeisteitä lukuun ottamatta kohti funktiota g , eli pätee

$$f\left(a + \frac{L}{2\pi}y\right) = g(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}_k e^{iky}$$

jos y on funktion g jatkuvuuspeiste. Näin ollen, jos x on funktion f jatkuvuuspeiste on $y = \frac{2\pi}{L}(x - a)$ funktion g jatkuvuuspeiste, joten pätee myös

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi}{L}(x - a)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}_k e^{ik\frac{2\pi}{L}(x-a)}.$$

Tässä olevat funktion g Fourier'n kertoimet on määritelty integraalilla

$$\hat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(y) e^{-iky} dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + \frac{L}{2\pi}y\right) e^{-iky} dy = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+L} f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{L}(x-a)} \frac{2\pi}{L} dx.$$

Vastaava muuttujanvaihto voidaan tehdä myös funktion g trigonometrinen kertoimien määrittelyä ja esitykseen. Tästä saadaan ensin tulos siitä, miten annettu funktio f voidaan esittää määrittelyväliä $[a, a + L]$ välillä Fourier'n sarjan avulla.

Lause 6.13 Oletetaan, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ on itseisesti integroitava välillä $[a, a + L]$, jossa $a \in \mathbb{R}$ ja $L > 0$. Määritellään

$$\hat{f}_k := \frac{1}{L} \int_a^{a+L} f(x) e^{-ik\frac{2\pi}{L}(x-a)} dx, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (6.16)$$

$$a_k := \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x) \cos\left(k\frac{2\pi}{L}(x-a)\right) dx, \quad b_k := \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x) \sin\left(k\frac{2\pi}{L}(x-a)\right) dx, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Tällöin funktion f Fourier'n sarja välillä $[a, a + L]$ kuuluu

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ik\frac{2\pi}{L}(x-a)} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{L}(x-a)\right) + b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{L}(x-a)\right) \right]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Jos f toteuttaa Dirichlet'n ehdot, on $S(x) = f(x)$ jokaisessa sen L -periodisen jatkeen jatkuvuuspeisteessä $x \in [a, a + L]$.

- Huomaa, että välin pituus L ja ”kehityspeiste” a vaikuttaa sekä kertoimien laskemiseen että sarjaesityksiin. Jos halutaan korostaa sitä, millä välillä Fourier'n kertoimet on laskettu, voidaan käyttää kerrointa \hat{f}_k merkitä esimerkiksi $\hat{f}_{k;L}$ tai $\hat{f}_{k;[a,a+L]}$.

- Yllä on käytetty määritelmässä ”päätepistekantaa”, jossa jokaisella $k \in \mathbb{Z}$ sarjan eksponenttifunktio saa aina arvon yksi välin päätepisteissä $x = a$ ja $x = a + L$. Tämä kanta on kätevin varsinkin, jos funktion tiedetään toteuttavan jotain lisäehtoja päätepisteissä (ks. Luku 6.4.1). Muitakin mahdollisuuksia on: esimerkiksi aiemmin käytettiin sarjassa välillä $[-\pi, \pi]$ funktioita e^{ikx} eikä $e^{ik(x+\pi)}$ kuten tässä. Fourier'n sarjalle kehityspisteen a valinta on lähinnä makuasia, sillä sen siirto vaikuttaa vain kertoimien vaiheeseen, esimerkiksi

$$\frac{1}{L} \int_a^{a+L} f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{L}(x-a)} dx = e^{ik \frac{2\pi}{L}a} \frac{1}{L} \int_a^{a+L} f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{L}x} dx.$$

Trigonometrisille kertoimille tästä seuraa kuitenkin jo hieman monimutkaisempi muunnoskaava, ja erityisesti seuraavan luvun kosini- ja sinisarjoja rakennettaessa on tärkeää käyttää niissä annettua päätepistekantaa.

- Lisätietoa yleisistä Fourier'n sarjoista löytyy Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series).

Esimerkki 6.14 Laske funktion $f(x) = x$ trigonometrinen sarja välillä $[0, 1]$.

Ratkaisu: Sijoitetaan Lauseeseen 6.13 $a = 0$ ja $L = 1$, josta saadaan kertoimiksi

$$a_k = 2 \int_0^1 x \cos(k2\pi x) dx, \quad b_k = 2 \int_0^1 x \sin(k2\pi x) dx.$$

Näin ollen

$$a_0 = 2 \int_0^1 x dx = 2 \left/ \frac{1}{2} x^2 \right|_0^1 = 1,$$

ja, kun $k \neq 0$, voidaan taas osittaisintegroida

$$\begin{aligned} a_k &= 2 \int_0^1 x \cos(k2\pi x) dx = 2 \left/ x \frac{1}{2\pi k} \sin(k2\pi x) - 2 \int_0^1 \frac{1}{2\pi k} \sin(k2\pi x) dx \right|_0^1 = 0, \\ b_k &= 2 \left/ x \frac{-1}{2\pi k} \cos(k2\pi x) - 2 \int_0^1 \frac{-1}{2\pi k} \cos(k2\pi x) dx \right|_0^1 = \frac{-1}{2\pi k} \cos(2\pi k) = -\frac{1}{\pi k}. \end{aligned}$$

Saadaan siis trigonometrinen sarja

$$S(x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \sin(2\pi kx),$$

jolle pätee $S(x) = f(x) = x$, kun $0 < x < 1$, ja $S(0) = S(1) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. Tätä voi verrata Esimerkin 6.8 sarjaan, joka saa samoja arvoja pisteissä $0 < x < 1$.

6.4.1 Funktion esittäminen kosini- ja sinisarjoina

Funktioita voi esittää Fourier'n ja trigonometristen sarjojen lisäksi käyttäen pelkästään sineistä tai kosineista koostuvia sarjoja. Ideana tässä onkin käyttää yllä mainittuja parillisuusomaisuuksia, joiden mukaan esimerkiksi välin $[-\pi, \pi]$ parillisen funktion trigonometrisen sarjan sinitermien kertoimet ovat kaikki nollia. Näin ollen, jos halutaan esittää funktio f välillä $[a, a + L]$ pelkästään kosinien avulla, onnistuu tämä uudelleenparametrisoimalla tämä väli ensin väliksi $[0, \pi]$, kuten edellä tehtiin, ja sen jälkeen jatkamalla saatu funktio parillisesti arvoille $]-\pi, \pi[$ ja sen jälkeen 2π -periodisesti koko reaaliakselille.

Tarkemmin, käytetään nyt kuvausta $M(y) = \alpha + \beta y$, jolla $M(0) = a$ ja $M(\pi) = a + L$. Tästä saadaan ratkaisuksi $\alpha = a$ ja $\beta = \frac{L}{\pi}$, eli kuvaus $M(y) = a + \frac{L}{\pi}y$. Määritellään tämän jälkeen $g(y) := f(M(y)) = f(a + \frac{L}{\pi}y)$ arvoilla $0 < y < \pi$. Tästä saadaan aikaiseksi funktion g

1. *parillinen periodinen jatke* asettamalla $g(0) := f(a)$, $g(\pi) := g(-\pi) := f(a + L)$, ja $g(y) := g(-y)$, kun $-\pi < y < 0$, ja tämän jälkeen määrittelemällä $g(y + m2\pi) := g(y)$, aina kun $y \in]-\pi, \pi]$, $m \in \mathbb{Z}$;
2. *pariton periodinen jatke* määrittelemällä $g(0) := 0 =: g(\pi)$, ja $g(y) := -g(-y)$, kun $-\pi < y < 0$, ja tämän jälkeen määrittelemällä $g(y + m2\pi) := g(y)$, aina kun $y \in]-\pi, \pi]$, $m \in \mathbb{Z}$. (Huomaa, että parittomuusehdosta $g(-0) = -g(0)$ seuraa, että täytyy valita $g(0) = 0$, ja samoin halutun periodisuuden mukaan on oltava $g(\pi) = g(-\pi) = -g(\pi)$, joten myös $g(\pi) = 0$.)

Ensimmäiselle, parilliselle jatkeelle saadaan tällöin siis kaavasta (6.14) tulos $b_k = 0$ ja

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(y) \cos(ky) dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(a + \frac{L}{\pi}y\right) \cos(ky) dy = \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x) \cos\left(k \frac{\pi}{L}(x-a)\right) dx.$$

Tällöin g :n trigonometrinen sarja on

$$S(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(ky).$$

Toiselle, parittomalle jatkeelle saadaan vastaavasti kaavasta (6.15) tulos $a_k = 0$ ja

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(y) \sin(ky) dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(a + \frac{L}{\pi}y\right) \sin(ky) dy = \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x) \sin\left(k \frac{\pi}{L}(x-a)\right) dx.$$

Tällöin taas g :n trigonometrinen sarja on

$$S(y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(ky).$$

Selvästi, jos f toteuttaa Dirichlet'n ehdot välillä $[a, a+L]$, myös g toteuttaa ne. On huomattava kuitenkin, että välin päätepisteihin saattaa tässäkin syntyä odottamattomia epäjatkuvuuskohtia jatkeelle g , joten sen trigonometrisen sarjan arvot näissä päätepisteissä täytyy laskea huolellisesti ja ne voivat riippua siitä käytetäänkö yllä parillista vai paritonta jatketta. Tällöin kuitenkin $f(x) = g(\pi(x-a)/L) = S(\pi(x-a)/L)$ kaikissa funktion f jatkuvuuspisteissä x välin sisällä. Tästä saadaan aikaiseksi kaksi sarjaa, jotka suppenevat kohti funktion f arvoja ainakin jokaisessa pisteessä x , joka on f :n jatkuvuuspiste ja jolle $a < x < a + L$.

Funktion f **kosinisarja** välillä $[a, a+L]$ määritellään

$$S_c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{\pi}{L}(x-a)\right), \quad a_k = \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x) \cos\left(k \frac{\pi}{L}(x-a)\right) dx, \quad (6.18)$$

ja vastaava **sinisarja** määritellään

$$S_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k \frac{\pi}{L}(x-a)\right), \quad b_k = \frac{2}{L} \int_a^{a+L} f(x) \sin\left(k \frac{\pi}{L}(x-a)\right) dx. \quad (6.19)$$

Huomaa kertoimen kaksi ero sinin ja kosinin argumenteissa vastaavaan funktion trigonometriseen sarjaan verrattuna (6.17).

Ollaan siis löydetty jo kolme erilaista tapaa esittää jokin välillä $[a, a+L]$ annettu funktio: Fourier'n/trigonometrinen sarja, kosinisarja ja sinisarja. Se mitä näistä sarjaesityksistä kannattaa käyttää riippuu usein siitä millaisia **reunaehtoja** funktion halutaan toteuttavan välin päätepisteissä. Esimerkin vuoksi oletetaan, että on annettu jokin yllä olevista kolmesta sarjaesityksestä ja että tässä esityksessä *sarja suppenee itseisesti*. Tällöin sarja suppenee kohti jatkuvaa funktiota ja voidaan olettaa, että tämä on sama kuin alkuperäinen funktio f . Päätepisteiden arvot sijoittamalla saadaan tällöin seuraavat tulokset:

1. Fourier'n sarja (ja siis myös trigonometrinen sarja) suppenee parhaiten, jos funktio on jatkuva ja *periodinen* välin päätepisteissä, eli funktioille f , joille pätee $f(a) = f(a+L)$. Päätepisteen arvo voi tässä olla mielivaltainen.
2. Sinisarja suppenee parhaiten, jos funktio f on jatkuva ja toteuttaa ns. **Dirichlet'n reunaehdot** välin päätepisteissä, eli jos se häviää reunalla: $f(a) = 0 = f(a+L)$.
3. Kosinisarja suppenee parhaiten, jos funktio f on jatkuva, periodinen ja toteuttaa ns. **Neumannin reunaehdot** välin päätepisteissä, eli jos sen derivaatta häviää reunalla: $f'(a) = 0 = f'(a+L)$.²

Sopivalla esityksen valinnalla voi joskus myös parantaa saadun sarjan suppenemista, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

Esimerkki 6.15 Laske funktion $f(x) = x$ kosinisarja välillä $[0, 1]$.

Ratkaisu: Kosinisarjan kertoimiksi saadaan siis

$$a_k = 2 \int_0^1 x \cos(k\pi x) dx.$$

Näin ollen kuten Esimerkissä 6.14, $a_0 = 1$ ja, kun $k \neq 0$, voidaan taas osittaisintegroida

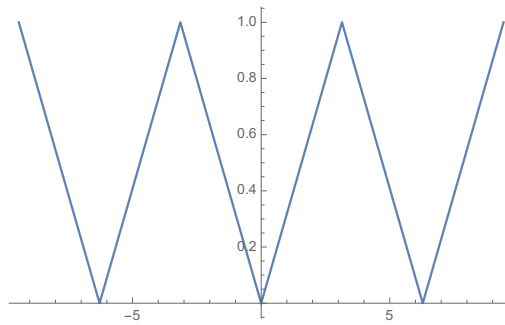
$$\begin{aligned} a_k &= 2 \int_0^1 x \cos(k\pi x) dx = 2 \int_0^1 x \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi x) - 2 \int_0^1 \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi x) dx \\ &= 0 - 2 \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \frac{-1}{k\pi} \cos(k\pi x) = \frac{2}{k^2\pi^2} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{k^2\pi^2}, & \text{kun } k \text{ on pariton,} \\ 0, & \text{kun } k \text{ on parillinen.} \end{cases} \end{aligned}$$

Saadaan siis funktion haluttu kosinisarja

$$S(x) = \frac{1}{2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pariton}}}^{\infty} \frac{4}{k^2\pi^2} \cos(k\pi x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2}.$$

Huomataan, että päinvastoin kuin muut tähän asti johdetut sarjat funktiolle $f(x) = x$, tämä *sarja suppenee itseisesti*. Selitys tälle löytyy, kun tarkastelee miten funktion periodinen parillinen jatke

²(MAT) Tämän ominaisuuden näkee derivoimalla kosinisarja termeittäin, jolloin siitä tulee sinisarja. Derivaatan jatkuvuutta varten täytyy itse asiassa tehdä itseistä suppenemista hieman vahvempi oletus: $\sum_k |ka_k| < \infty$.



Kuva 6.2: Esimerkin 6.15 parillisen periodisen jatkeen kuvaaja.

käyttäytyy: sille pätee $g(y) = y/\pi$, kun $0 \leq y \leq \pi$, joten $g(y) = -y/\pi$, kun $-\pi < y < 0$, eli jatke on itseasiassa funktion $g(y) = |y|/\pi$ periodinen jatke väliltä $[-\pi, \pi]$. Tästä syntyy Kuvassa 6.2 löytyvä sahalaitakuvio, joka on jatkuva kaikkialla. Näin ollen funktion f kosinisarja suppenee myös päätepisteissä, eli nyt $S(x) = x$ kaikilla $0 \leq x \leq 1$.

6.5 Sarjaesitykset ortonormaalin funktiojonon avulla

6.5.1 Approksimaation virheen mittaaminen funktionormilla

Edellä nähtiin, että Dirichlet'n ehdon toteuttaville funktiolle niiden Fourier'n sarja suppenee kohti alkuperäistä funktiota, mahdollisesti funktion epäjatkuvuuspisteitä lukuun ottamatta. Epäjatkuvuuspisteitä on tällöin oletuksen mukaan äärellinen määrä, joten lähes jokaisessa välin pisteessä yhtyvät sarjan ja funktion arvot.

Usein sovelluksissa ei tarvitsekaan välittää funktion arvoista yhdessä tietyssä pisteessä, vaan kaikki tarpeellinen tieto ratkaisusta saadaan integroimalla sitä sopivasti valittuja suureita vastaan. Tällaisia ovat esimerkiksi kaikki jatkuvan aineen mekaniikan ja kvanttimekaniikan suureet, kuten hiukkas-, energia- ja liikemäärätiheydet. Jos esimerkiksi hiukkastiheyttä $\rho(x)$ arvioidaan simuloimalla hiukkastiheydellä $r(x)$, ei arvion tarvitsekaan olla hyvä jokaisessa pisteessä x , vaan simulaation virhettä voi kuvata hyvin esimerkiksi kertomalla seuraavan integraalin arvo näiden kahden jakauman erotukselle $f(x) := \rho(x) - r(x)$,

$$\|f\| := \sqrt{\int |f(x)|^2 dx}. \quad (6.20)$$

Tätä lukua kutsutaan funktion f **normiksi**,³ ja se yleistää luonnollisella tavalla funktioille \mathbb{R}^d :n **vektorin pituuden**

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{\sum_{i=1}^d |x_i|^2}.$$

Osoittautuikin, että myös kun funktio esitetään käyttäen Fourier'n sarjoja tai muunnoksia, on helpompaa tutkia näiden suppenemista käyttäen yllä olevaa funktionormia. Tästä seuraa kuitenkin uusi tekninen hankaluus, josta ei tarvitse lainkaan huolehtia yllä mainituille ”tiheyksien” kaltaisille funktioille: jos $f(x) \neq 0$ vain äärellisen monessa pisteessä, pätee sille (integraalien matemaattisen määritelmän mukaan) $\|f\| = 0$. Näin ollen esimerkiksi, jos tiedetään, että tiheyden approksimaatio $r(x)$ on eksakti siinä mielessä, että virheen funktionormi on nolla, $\|\rho - r\| = 0$, ei tästä seuraa, että $r(x) = \rho(x)$ jokaisessa pisteessä, vaan ainoastaan ”melkein kaikkialla”.

³(MAT) Tarkemmin, määritelmä (6.20) antaa funktion L^2 -normin. Matematiikassa määritellään useita muitakin samantyyppisiä normeja, sillä päinvastoin kuin \mathbb{R}^d :ssä, nämä eivät enää ole ekvivalentteja.

Jotta voitaisiin helposti tehdä ero sen kanssa, päteekö $f(x) = 0$ jokaisessa pisteessä vai ainoastaan melkein kaikkialla, käytetään matematiikassa seuraavia määritelmiä funktionormin avulla määriteltyjä virheitä käsiteltäessä.

Määritelmä 6.16 Oletetaan, että $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ on funktio, joka on määritelty jossain joukossa E , joka voi olla esimerkiksi koko reaaliakseli tai sen väli. Tällöin määritellään funktionormin avulla vastaava **funktioavaruus** $L^2(E)$, jolla on seuraavat ominaisuudet.

1. $\|f\| := \sqrt{\int_E |f(x)|^2 dx}$.
2. $f \in L^2(E)$, jos $\|f\| < \infty$.
3. $f \in L^2(E)$ on **nollafunktio**, jos $\|f\| = 0$. Tätä merkitään " $f = 0$ ".
4. Jos $f, g \in L^2(E)$, määritellään niiden välinen **etäisyys** kaavalla $\|f - g\|$.
5. Jos $f, g \in L^2(E)$, merkitään $f = g$, kun $\|f - g\| = 0$. Tällöin sanotaan, että $f(x) = g(x)$ **melkein kaikilla** x .

Lause 6.17 Seuraavat vektoreiden etäisyyksille pätevät ominaisuudet pätevät myös funktionormille:

- $\|f\| \geq 0$, kaikilla $f \in L^2(E)$.
- Jos $\alpha \in \mathbb{C}$ ja $f \in L^2(E)$, määritellään funktio $h := \alpha f$ kaavalla $h(x) = \alpha f(x)$, $x \in E$. Tällöin $\alpha f \in L^2(E)$ ja $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$.
- Jos $f, g \in L^2(E)$, määritellään funktio $h := f + g$ kaavalla $h(x) = f(x) + g(x)$, $x \in E$.
- Kolmioepäyhtälö pätee myös normille, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$, ja myös

$$\| \|f\| - \|g\| \| \leq \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|. \quad (6.21)$$

TODISTUS Näiden käsitteiden määritelmät ja Lauseen ominaisuudet käydään huolellisemmin läpi matematiikan mittateoriaa (Mitta ja integraali) ja reaalianalyysiä (Reaalianalyysi I) käsittelevillä kursseilla: seuraavien kommenttien tarkoitus on pelkästään selkeyttää yllä olevien määritelmien yhteyttä näiden kurssien sisältöön ja ne voi huolelta halutessaan hypätä yli. (Osa yllä olevista ominaisuuksista on hyvin suoraviivaisia seurauksia määritelmistä, mutta esimerkiksi kolmioepäyhtälö vaatii jonkin verran työtä.)

(MAT) Mittateorian mielessä yllä annetut määritelmät vastaavat ns. Lebesguen mitan yli otettuja L^2 -avaruuksia. Niissä voidaan valita joukoksi E mikä tahansa mitallinen joukko ja " $f = g$ melkein kaikkialla" tarkoittaa sitä, että poikkeusjoukko $\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$ on nollamitallinen. Matemaattisesti tämän jälkeen korvataan itse asiassa funktiot niitä vastaavilla ekvivalenssiluokilla, jolloin " $f = g$ " säilyttää myös tavallisen joukko-opillisen merkityksensä, kun $f, g \in L^2(E)$. Erityisesti kaikki äärelliset (ja jopa numeroituvat) pistejoukot ovat nollamitallisia Lebesguen mitan suhteen, joten tästä seuraa, että funktion arvon muuttaminen äärellisessä määrässä pisteitä ei muuta sen edustajaa avaruudessa $L^2(E)$. Lause 6.17 todistetaan kurssilla, kun osoitetaan, että $\|f\|$ todellakin määrittelee normin vektoriavaruudessa $L^2(E)$. Lisätietoja myös Wikipediasta ([https://en.wikipedia.org/wiki/Norm_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Norm_(mathematics))) ja https://en.wikipedia.org/wiki/Lp_space). \square

Huomautus 6.18

- Tässä siis esimerkiksi $L^2(\mathbb{R})$ tarkoittaa reaaliakselilla määriteltyjä funktioita $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, joille

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Huomataan, että ainoa polynomi, joka kuuluu avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$ on nollafunktio. Se ei sisällä myöskään analyyttisiä funktioita $f(x) = e^{cx}$ millään kompleksivakiolla c , sillä integraalin suppeneminen vaatii, että $|f(x)| \rightarrow 0$, kun $x \rightarrow \infty$ ja myös kun $x \rightarrow -\infty$. Sen sijaan eksponentiaalisesti vähenevä funktio $e^{-|x|}$ kuuluu tähän avaruuteen, samoin kuin potenssivähenevät funktiot $f(x) = (1 + |x|)^{-p}$, kunhan $p > \frac{1}{2}$. Avaruuden funktioilla voi olla myös singulariteetteja: esimerkiksi $f(x) = e^{-x}|x|^{-\frac{1}{4}}$ kuuluu avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$ (huomaa, että tässä ei ole mitään merkitystä sillä, minkä arvon f saa origossa; esimerkiksi voi määritellä $f(0) = 0$).

- Fourier'n sarjoja varten tarvitaan esimerkiksi välillä $[-\pi, \pi]$ määriteltyä funktioavaruutta $L^2([-\pi, \pi])$, jolloin siis

$$f \in L^2([-\pi, \pi]) \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Tähän avaruuteen kuuluvat kaikki rajoitetut funktiot f , joille integraalin arvon voi ylipäättään laskea, eli esimerkiksi kaikki Dirichlet'n ehdon toteuttavat funktiot. Siihen kuuluu myös joitain singulaarisia funktioita, kuten $f(x) = |x|^{-p}$, kun $p < \frac{1}{2}$.

6.5.2 Skalaaritulo, ortogonaalius ja ortonomaalit kannat

Yllä olevaan funktionormiin liittyy luonnollisella tavalla **skalaaritulo**⁴

$$\langle g|f \rangle := \int_E g(x)^* f(x) dx, \quad f, g \in L^2(E), \quad (6.22)$$

joka yleistää funktioavaruuteen \mathbb{C}^d :n pistetulon

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = \sum_{i=1}^d w_i^* z_i, \quad \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^d. \quad (6.23)$$

Tämä taas on tutun \mathbb{R}^d :n pistetulon yleistys

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^d x_i y_i, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d. \quad (6.24)$$

Kuten määritelmästä näkee, muodostetaan skalaaritulossa kahdesta funktiosta integraalin avulla kompleksiluku samaan tapaan kuin funktionormissa muodostetaan integraalin avulla yhdestä funktiosta positiivinen reaaliluku. Itse asiassa määritelmistä seuraa suora yhteys näiden kahden luvun välille

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f \rangle}. \quad (6.25)$$

Tämän ominaisuuden takia sanotaan, että L^2 :n funktionormi on *skalaaritulon määräämä*.

Ei ole kuitenkaan täysin selvää, miksi skalaaritulon integraali suppenisi kaikilla avaruuden L^2 funktiolla. Tämän näkemiseksi tarvitaan seuraavaa aputulosta.

⁴(MAT) Matematiikassa käytetään usein kaavan (6.22) sijaan määritelmää, jossa funktioiden järjestys on vaihdettu, ja tällöin merkitään $\langle f, g \rangle := \langle g|f \rangle$.

Lause 6.19 (Hölderin epäyhtälö) Kaikilla (mitallisilla) funktioilla $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$ pätee

$$\int_E |g(x)||f(x)|dx \leq \sqrt{\int_E |g(x)|^2 dx} \sqrt{\int_E |f(x)|^2 dx},$$

myös silloin, kun joku näistä integraaleista saa arvon $+\infty$.

TODISTUS Todistus tehdään reaalianalyysin kurssilla, mutta se löytyy myös lähteestä [3, Lause 3.5] ja Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/H%C3%B6lder's_inequality). \square

Tästä seuraa erityisesti epäyhtälö

$$|\langle g|f \rangle| \leq \int_E |g(x)||f(x)|dx \leq \|g\| \|f\|.$$

Näin ollen, jos $f, g \in L^2(E)$, on määritelmän mukaan $\|g\| \|f\| < \infty$, joten nähdään myös, että skalaaritulon määrittelevä integraali on itseisesti suppeneva kaikilla $f, g \in L^2(E)$.

Alla on listattu skalaaritulon perusominaisuuksia, jotka voi johtaa helposti suoraan määritelmää käyttäen.

1. $\langle f|f \rangle = \|f\|^2 \geq 0$, jossa $\langle f|f \rangle = 0$, jos ja vain jos $\|f\| = 0$.
2. (Cauchyn–Schwarzin epäyhtälö) $|\langle g|f \rangle| \leq \|g\| \|f\|$.
3. (konjugaattisymmetria) $\langle f|g \rangle^* = \langle g|f \rangle$.
4. (lineaarisuus toisessa argumentissa) $\langle g|\alpha f_1 + \beta f_2 \rangle = \alpha \langle g|f_1 \rangle + \beta \langle g|f_2 \rangle$, aina kun $g, f_1, f_2 \in L^2(E)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
5. (konjugaattilineaarisuus ensimmäisessä argumentissa) $\langle \alpha g_1 + \beta g_2|f \rangle = \alpha^* \langle g_1|f \rangle + \beta^* \langle g_2|f \rangle$, aina kun $g_1, g_2, f \in L^2(E)$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Määritelmä 6.20

- Funktiot $f, g \in L^2(E)$ ovat **ortogonaaliset**, jos niiden skalaaritulo on nolla: $\langle g|f \rangle = 0$.
- Funktiojono $f_n \in L^2(E)$ on **ortonormaali**, jos mitkä tahansa kaksi sen funktiota ovat ortogonaaliset ja lisäksi jokaisen funktion normi on yksi. Tämä toteutuu jos ja vain jos

$$\langle f_m|f_n \rangle = \delta_{m,n} = \mathbb{1}_{\{m=n\}} = \begin{cases} 1, & \text{jos } m = n, \\ 0, & \text{jos } m \neq n. \end{cases} \quad (6.26)$$

Tässä usein käytettyä lyhennysmerkintää $\delta_{m,n} := \mathbb{1}_{\{m=n\}}$ kutsutaan **Kroneckerin deltaksi**.

- Annetusta jonosta (f_n) funktioita voidaan muodostaa **lineaarikombinaatiota**. Tällainen saadaan valitsemalla jotkin jonon indeksit $n_i, i = 1, 2, \dots, N$, näihin kuuluvat vakiot $\alpha_i \in \mathbb{C}$ ja määrittelemällä funktio $h = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_{n_i}$ kaavalla

$$h(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_{n_i}(x).$$

- Ortonormaali funktiojono (e_n) on **täydellinen**, jos sen lineaarikombinaatioiden avulla voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti (funktionormissa) mitä tahansa funktiota $f \in L^2(E)$. Toisin sanoen, jokaista tarkkuutta $\varepsilon > 0$ kohti täytyy tällöin löytyä jonon indeksit n_i ja vakiot $\alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, N$, joilla

$$\left\| f - \sum_{i=1}^N \alpha_i e_{n_i} \right\| < \varepsilon.$$

- Täydellistä ortonomaalia funktiojonoa kutsutaan avaruuden $L^2(E)$ **ortonormaaliksi kannaksi**.
- Jos (e_n) on avaruuden $L^2(E)$ ortonormaali kanta, määritellään funktion $f \in L^2(E)$ **komponentit** c_n kannassa (e_n) sisätuloina

$$c_n := \langle e_n | f \rangle.$$

Jonon ortonormaaliluudesta seuraa tärkeä approksimointiominaisuus, joka kertoo miten löydetään normissa paras approksimaatio jollekin annetulle funktiolle jonon funktioiden lineaarikombinaationa. Tämän näkemiseksi tutkitaan aluksi äärellistä ortonomaalia jonoa $(e_n)_{n=1}^N$ ja jotain funktiota $f \in L^2(E)$. Valitaan mielivaltaiset kertoimet α_n , $n = 1, 2, \dots, N$ lineaarikombinaation muodostamiseksi. Näin saadun funktion etäisyys funktiosta f toteuttaa skalaaritulon lineaarisuusominaisuuksia hyväksi käyttäen

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\|^2 &= \left\langle f - \sum_{n'=1}^N \alpha_{n'} e_{n'} \left| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right. \right\rangle \\ &= \left\langle f \left| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right. \right\rangle - \sum_{n'=1}^N \alpha_{n'}^* \left\langle e_{n'} \left| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right. \right\rangle \\ &= \langle f | f \rangle - \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle f | e_n \rangle - \sum_{n'=1}^N \alpha_{n'}^* \langle e_{n'} | f \rangle + \sum_{n', n=1}^N \alpha_{n'}^* \alpha_n \langle e_{n'} | e_n \rangle. \end{aligned}$$

Tämä voidaan kirjoittaa käyttäen funktion f koordinaatteja jonon (e_n) suhteen, eli kompleksilukuja $c_n := \langle e_n | f \rangle$. Sovelletaan lisäksi viimeisessä summassa jonon oletettua ortonormaaliluutta, josta saadaan

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\|^2 &= \langle f | f \rangle - \sum_{n=1}^N \alpha_n c_n^* - \sum_{n=1}^N \alpha_n^* c_n + \sum_{n', n=1}^N \alpha_{n'}^* \alpha_n \delta_{n', n} \\ &= \langle f | f \rangle - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 + \sum_{n=1}^N [c_n^* c_n - \alpha_n c_n^* - \alpha_n^* c_n + \alpha_n^* \alpha_n]. \end{aligned}$$

Jäljelle jäävässä summassa $c_n^* c_n - \alpha_n c_n^* - \alpha_n^* c_n + \alpha_n^* \alpha_n = (c_n^* - \alpha_n^*)(c_n - \alpha_n) = |c_n - \alpha_n|^2$.

Ollaan päädytty siis tulokseen

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\|^2 = \langle f | f \rangle - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 + \sum_{n=1}^N |c_n - \alpha_n|^2. \quad (6.27)$$

Tästä nähdään, että jos jonot (α_n) ja (c_n) eivät ole samat, eli jos löytyy jokin indeksi m , jolla $\alpha_m \neq c_m$, viimeisen summan arvo on aidosti positiivinen ja pätee siis

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\|^2 > \langle f | f \rangle - \sum_{n=1}^N |c_n|^2.$$

Toisaalta, sijoittamalla kaavaan (6.27) $\alpha_n = c_n$ saadaan tulos

$$0 \leq \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n e_n \right\|^2 = \langle f | f \rangle - \sum_{n=1}^N |c_n|^2.$$

Näistä kaavoista päädytään suoraan seuraavaan yleiseen tulokseen, joka pätee myös äärettömille ortonormaaleille jonoille; siinä olevaa kaavaa (6.28) kutsutaan **Besselin epäyhtälöksi**.

Lause 6.21 Olkoon (e_n) ortonormaali funktiojono avaruudessa $L^2(E)$, $f \in L^2(E)$ ja $c_n := \langle e_n | f \rangle$ vastaavat komponentit. Tällöin

$$\|f\|^2 \geq \sum_n |c_n|^2 \quad \text{ja} \quad \left\| f - \sum_n c_n e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_n |c_n|^2 \geq 0. \quad (6.28)$$

Erityisesti siis sarja $\sum_n |c_n|^2$ aina suppenee.

Funktio $\sum_n c_n e_n$ on lisäksi paras approksimaatio funktiosta f jonon (e_n) lineaarikombinaatioiden avulla: jos $\alpha_n \in \mathbb{C}$ on jono kertoimia ja löytyy jokin indeksi m , jolla $\alpha_m \neq c_m$, pätee

$$\left\| f - \sum_n \alpha_n e_n \right\| > \left\| f - \sum_n c_n e_n \right\|. \quad (6.29)$$

TODISTUS Yllä todistettiin tulos, jos jono (e_n) on äärellinen. (MAT) Jos jono on ääretön, tiedetään siis, että tulos pätee jonolle $(e_n)_{n=1}^N$ kaikilla $N \in \mathbb{N}$. Tällöin luvuille $r_N := \sum_{n=1}^N |c_n|^2$ pätee $r_N \leq \|f\|^2 < \infty$ ja $r_{N+1} \geq r_N \geq 0$ kaikilla N . Näin ollen jono (r_N) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, joten se suppenee, eli myös vastaavalle positiivitermiselle sarjalle pätee $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|^2 < \infty$. Tämän jälkeen voidaan näyttää, että löytyy funktio $g \in L^2(E)$, jolle $\left\| g - \sum_{n=1}^N c_n e_n \right\| \rightarrow 0$, kun $N \rightarrow \infty$, ja tälle funktiolle pätee $\|f - g\|^2 = \|f\|^2 - \sum_n |c_n|^2$ (osasummien jono on tällöin Cauchy-jono ja $L^2(E)$ on täydellinen metrinen avaruus, joten jonolle löytyy raja-arvo g). Tämä antaa merkityksen kaavan (6.28) äärettömälle summalle $\sum_n c_n e_n$. Kaavan (6.29) epäyhtälö taas pätee siinä mielessä, että joko $\left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\| \rightarrow \infty$, kun $N \rightarrow \infty$, tai löytyy $h \in L^2(E)$, jolle $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| h - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\| = 0$ ja $\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n \right\| = \|f - h\| > \|f - \sum_n c_n e_n\|$. \square

Tämän tuloksen avulla voidaan johtaa seuraava hyödyllinen tulos, joka näyttää, että jos ortonormaali joukko on täydellinen, sen avulla voidaan esittää kaikki avaruuden $L^2(E)$ funktiot käyttäen funktion koordinaateista muodostettujen lineaarikombinaatioiden sarjaa. Siinä olevaa yhtälöä (6.30) kutsutaan **Parsevalin kaavaksi**.

Lause 6.22 Ortonormaali funktiojono $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on avaruuden $L^2(E)$ ortonormaali kanta täsmälleen silloin, kun kaikilla $f \in L^2(E)$ pätee

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n | f \rangle|^2. \quad (6.30)$$

Tällöin

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle e_n | f \rangle e_n \right\| = 0, \quad (6.31)$$

jota merkitään $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n | f \rangle e_n$.

TODISTUS Olkoon $f \in L^2(E)$ ja merkitään sen koordinaatteja $c_n := \langle e_n | f \rangle$. Koska (e_n) on ortonormaali jono, voidaan soveltaa Lausetta 6.21, josta saadaan

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle e_n | f \rangle e_n \right\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \right) = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Näin ollen, jos (6.30) pätee, seuraa, että myös (6.31) on totta. Tämä tarkoittaa sitä, että lineaarikombinaatioiden $\sum_{n=1}^N \langle e_n | f \rangle e_n$ muodostama jono suppenee normissa koh-
ti funktiota f , jota merkitään $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n | f \rangle e_n$. Jos $\varepsilon > 0$, löytyy siis jokin $N_0 \in \mathbb{N}$,
jolle

$$\left\| f - \sum_{n=1}^{N_0} \langle e_n | f \rangle e_n \right\| < \varepsilon.$$

Tällöin lineaarikombinaatio $\sum_{n=1}^{N_0} \langle e_n | f \rangle e_n$ on funktion f approksimaatio halutulla tarkkuudella ε . Nähdään siis, että jono (e_n) on täydellinen, jos (6.30) pätee kaikilla $f \in L^2(E)$.

(MAT) Toisaalta, jos löytyy jokin funktio $f \in L^2(E)$, jolle (6.30) ei pidä paikkaansa, niin sitä ei voi approksimoida tarkasti jonon (e_n) lineaarikombinaatioilla: tutkitaan mielivaltaisia indeksejä n_i , $i = 1, 2, \dots, M$, vakioita $\beta_i \in \mathbb{C}$, ja näistä muodostettua lineaarikombinaatiota $h = \sum_{i=1}^M \beta_i e_{n_i}$. Olkoon N suurin indekseistä n_i ja määritellään uudet vakiot α_n , $1 \leq n \leq N$, asettamalla $\alpha_n = \beta_i$, jos $n = n_i$ jollakin i , ja $\alpha_n = 0$ muuten. Tällöin on myös $h = \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n$, sillä summaan on lisätty pelkästään nolla-funktioita. Lauseen 6.21 perusteella pätee tällöin

$$\|f - h\|^2 \geq \left\| f - \sum_{n=1}^N c_n e_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |c_n|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \geq 0.$$

Koska f ei oletuksen mukaan toteuta kaavaa (6.30), on oltava $\|f\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 > 0$. Kun valitaan tarkkuudeksi ε ottamalla neliöjuuri luvusta $\|f\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$ pätee tässä siis $\|f - h\| \geq \varepsilon$ kaikilla lineaarikombinaatioilla h . Näin ollen ortonormaali jono (e_n) ei tässä tapauksessa ole täydellinen. \square

Parservalin kaavasta seuraa suoraan myös samanlainen esitys sisätuloille:

Lause 6.23 (Plancherelin kaava) Jos (e_n) on avaruuden $L^2(E)$ ortonormaali kanta, voidaan funktioiden $f, g \in L^2(E)$ sisätulo aina laskea käyttäen niiden komponentteja,

$$\langle g | f \rangle = \sum_n \langle g | e_n \rangle \langle e_n | f \rangle. \quad (6.32)$$

TODISTUS Jätetään harjoitustehtäväksi tarkistaa, että oheinen **polarisaatioidentiteetti** pätee kaikille kompleksiluvuille z ja w :

$$w^* z = \frac{1}{4} (|z + w|^2 - |z - w|^2 + i|z + iw|^2 - i|z - iw|^2) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k |z + i^k w|^2.$$

Käytetään tätä määritelmässä $\langle g | f \rangle = \int_E g(x)^* f(x) dx$, jolloin nähdään, että integrandissa kiinteällä x pätee

$$g(x)^* f(x) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k |f(x) + i^k g(x)|^2$$

Koska joukko (e_n) on ortonormaali kanta, voidaan Lauseen 6.22 mukaan käyttää Parservalin kaavaa (6.30) kaikille funktioille. Tästä saadaan

$$\begin{aligned} \langle g | f \rangle &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \int_E |f(x) + i^k g(x)|^2 dx = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|f + i^k g\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n | f + i^k g \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k |\langle e_n | f \rangle + i^k \langle e_n | g \rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n | g \rangle^* \langle e_n | f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g | e_n \rangle \langle e_n | f \rangle, \end{aligned}$$

jossa lopussa turvauduttiin polarisaatioidentiteettiin käänteisessä suunnassa. \square

Seuraavat ns. Diracin bra-ket merkinnät (https://en.wikipedia.org/wiki/Bra%E2%80%93ket_notation) ovat yleisiä varsinkin kvanttimekaniikassa:

Huomautus 6.24

- Jos f on avaruuden L^2 funktio, korostetaan tätä merkitsemällä sitä ”ket”-notaatiolla, $|f\rangle$.
- Funktion $g \in L^2$ kompleksikonjugaatin yli integroinnista käytetään vastaavasti ”bra”-merkintää, $\langle g|$. Tällöin saadaan skalaaritulo ”tulona”

$$\langle g|f\rangle = \int_E g(x)^* f(x) dx.$$

- Jos $(|e_n\rangle)$ on avaruuden $L^2(E)$ *ortonormaali kanta*, pätee identiteettikuvaukselle $1|f\rangle = |f\rangle$ muodollinen hajotelma

$$1 = \sum_n |e_n\rangle\langle e_n|.$$

Tästä saadaan nimittäin brakket-merkinöillä

$$|f\rangle = 1|f\rangle = \sum_n |e_n\rangle\langle e_n|f\rangle \quad \text{ja} \quad \langle g|f\rangle = \langle g|1|f\rangle = \sum_n \langle g|e_n\rangle\langle e_n|f\rangle,$$

joten hajotelma on hyvä muistisääntö sekä Lauseelle 6.22 että Planchrelin kaavalle.

6.5.3 Parsevalin ja Plancherelin kaavat Fourier'n sarjoille

Fourier'n sarjat muodostavat itse asiassa hyvän esimerkin edellisessä luvussa johdetuista tuloksista. Määritellään

$$e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik\frac{2\pi}{L}x}, \quad x \in [0, L], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Kullakin k saadaan näin aikaiseksi välillä $[0, L]$ annettu funktio, jolle $|e_k(x)| = 1/\sqrt{L}$ kaikilla x , ja siten myös $\int_0^L |e_k(x)|^2 dx < \infty$. Näin ollen $e_k \in L^2([0, L])$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Kuten Lauseen 6.3 todistuksessa, (6.26), nähdään helposti, että kaikilla $L > 0$ ja $k', k \in \mathbb{Z}$ pätee

$$\langle e_{k'}|e_k\rangle = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{L}} \left(e^{ik'\frac{2\pi}{L}x} \right)^* \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik\frac{2\pi}{L}x} dx = \frac{1}{L} \int_0^L e^{i(k-k')\frac{2\pi}{L}x} dx = \delta_{k',k} = \begin{cases} 0, & \text{jos } k - k' \neq 0, \\ 1, & \text{jos } k - k' = 0. \end{cases}$$

Näin ollen muodostavat funktiot $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ *ortonormaalin jonon* avaruudessa $L^2([0, L])$. Tämä jono on itse asiassa *täydellinen*⁵ Siten $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ **on eräs avaruuden $L^2([0, L])$ ortonormaali kanta.**

Funktion f komponentit tässä kannassa saadaan Fourier'n kertoimien avulla, sillä määritelmistä seuraa

$$\langle e_k|f\rangle = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-ik\frac{2\pi}{L}x} f(x) dx = \sqrt{L} \hat{f}_k,$$

jossa viimeisessä vaiheessa on käytetty Fourier'n kertoimien $\hat{f}_k := \hat{f}_{k;[0,L]}$ määritelmää kaavassa (6.16). Näin ollen Lauseesta 6.22 saadaan tulos, että funktionormin mielessä

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle e_k|f\rangle e_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{L} \hat{f}_k \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik\frac{2\pi}{L}x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ik\frac{2\pi}{L}x},$$

⁵Täydellisyys voi ehkä uskoa, kun muistaa, että jokaiselle Dirichlet'n ehdot toteuttavalle funktiolle sen Fourier'n sarja suppenee melkein kaikkialla kohti tätä funktiota. Itse asiassa mitä tahansa $f \in L^2(E)$ voi approksimoida mielivaltaisen tarkasti normissa jollain Dirichlet'n ehdot toteuttavalla funktiolla, ja sen voi jopa tehdä käyttäen ns. trigonometrisiä polynomeja, jotka ovat juuri funktioiden (e_k) lineaarikombinaatioita. Todistus tähän löytyy esim. lähteestä [3, Luku 4.24].

eli funktion $f \in L^2([0, L])$ Fourier'n sarja suppenee aina funktionormissa.⁶

Toisaalta Parsevalin (6.30) ja Plancherelin (6.32) kaavat voidaan nyt kirjoittaa auki yhtälöksi, joka yhdistää integraalien ja sarjojen summien arvoja keskenään.

Parsevalin kaavan mukaan kaikilla $f \in L^2([0, L])$ pätee

$$\int_0^L |f(x)|^2 dx = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2, \quad (6.33)$$

ja Plancherelin kaava tulee funktioille $f, g \in L^2([0, L])$ muotoon

$$\int_0^L g(x)^* f(x) dx = L \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k^* \hat{g}_k. \quad (6.34)$$

Parsevalin kaavaa on joskus kätevintä käyttää suoraan trigonometristen kertoimien avulla. Palautetaan mieleen, että $a_k = \hat{f}_k + \hat{f}_{-k}$ ja $b_k = i(\hat{f}_k - \hat{f}_{-k})$, minkä näkee myös suoraan laskemalla määritelmistä (6.16). Näin ollen

$$|a_k|^2 + |b_k|^2 = (\hat{f}_k^* + \hat{f}_{-k}^*)(\hat{f}_k + \hat{f}_{-k}) + (\hat{f}_k^* - \hat{f}_{-k}^*)(\hat{f}_k - \hat{f}_{-k}) = 2(\hat{f}_k^* \hat{f}_k + \hat{f}_{-k}^* \hat{f}_{-k}) = 2(|\hat{f}_k|^2 + |\hat{f}_{-k}|^2).$$

Tästä seuraa

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \sum_{k=1}^{\infty} (|\hat{f}_k|^2 + |\hat{f}_{-k}|^2) = -|\hat{f}_0|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2.$$

Koska $a_0 = 2\hat{f}_0$, on tässä $|\hat{f}_0|^2 = \frac{1}{4}|a_0|^2$ ja Parsevalin kaavan (6.33) mukaan saadaan siis

Parsevalin kaava trigonometrisille kertoimille

$$\int_0^L |f(x)|^2 dx = \frac{L}{2} \left[\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \right]. \quad (6.35)$$

Huomautus 6.25

- Yllä olevat kaavat on johdettu kertoimille, jotka lasketaan origosta lähteville väleille, eli kun $a = 0$. Kuten aiemmin huomattiin, Fourier'n kertoimet muuttuvat vain vaihetermillä, kun kehityspistettä siirretään, ja tällöin kertoimien modulit $|\hat{f}_k|$ säilyvät ennallaan. Parsevalin kaavan oikea puoli ei siis riipu kehityspisteen a valinnasta lainkaan. Vasemman puolen integraalin arvokin säilyy myös ennallaan, kunhan muistaa käyttää siinä funktion f L -periodista jatketta, jolle $\int_0^L |f(x)|^2 dx = \int_a^{a+L} |f(x)|^2 dx$.

Esimerkki 6.26 Esimerkissä 6.8 laskettiin funktion $f(x) = x$, kun $x \in [-\pi, \pi]$, Fourier'n kertoimiksi $\hat{f}_k = i \frac{(-1)^k}{k}$, kun $k \neq 0$, ja $\hat{f}_0 = 0$. Näin ollen kaavan (6.33) oikea puoli saa tällöin arvon

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = 2\pi \left(\sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 4\pi\zeta(2).$$

⁶Itse asiassa funktionormissa suppenemisesta seuraa, että löytyy jono kokonaislukuja $N_n \rightarrow \infty$, jolla $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-N_n}^{N_n} \hat{f}_k e^{ik \frac{2\pi}{L} x}$ melkein kaikilla x , ks. [3, Lause 3.12].

Toisaalta kaavan vasemman puolen integraali antaa tulokseksi

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \left/ \frac{1}{3} x^3 \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3} 2\pi^3.$$

Parsevalin kaavan mukaan pätee siis

$$4\pi\zeta(2) = \frac{2}{3}\pi^3 \quad \Rightarrow \quad \zeta(2) = \frac{1}{6}\pi^2.$$

Sama tulos johdettiin jo Esimerkissä 6.12 tietyn Fourier'n sarjan arvoa käyttäen.

Luku 7

Fourier'n muunnos

7.1 Johdantoa

Edellä tutkittiin periodisten funktioiden esittämistä Fourier'n sarjan avulla, ja huomattiin, että tämä onnistui koko reaaliakselilla käyttäen periodisuuvälän pituuden yli integroimalla saatuja Fourier'n kertoimia. Löytyykö mitään vastaavaa, jos luovutaan periodisuusoletuksesta, mutta halutaan silti esitys, joka pätee koko reaaliakselilla?

Tämä onnistuu, kunhan funktio toteuttaa joitain lisävaatimuksia, jotka liittyvät sen jatkuvuuteen ja käytökseen äärettömyydessä. Tutkitaan johdantona funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, joka on itseisesti integroitava, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, ja toteuttaa Dirichlet'n ehdot jokaisella suljetulla välillä $[-M, M]$, kun $M \in \mathbb{N}$.

Oletetaan, että $x_0 \in \mathbb{R}$ on funktion f jatkuvuus piste ja että M on niin suuri, että $|x_0| < M$. Tällöin voidaan funktion arvo pisteessä x_0 esittää käyttäen sen väliltä $]-M, M]$ tehdyn periodisen jatkeen suppenevan Fourier'n sarjan avulla, kuten Luvussa 6.4 kerrotaan. Käytetään tässä kehityspisteinä origoa, eli valitaan $a = 0$ (tai sisällytetään vastaava vaihetermi kertoimeen \hat{f}_k), jolloin Lauseesta 6.13 saadaan

$$f(x_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{k;L} e^{ik \frac{2\pi}{L} x_0}, \quad (7.1)$$

jossa $L := 2M$ on välin pituus ja tässä olevat Fourier'n kertoimet saadaan integraaleista

$$\hat{f}_{k;L} = \frac{1}{L} \int_{-M}^M f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{L} x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Kun $M \gg 1$, näyttäisi hyvältä idealta approksimoida näitä kertoimia käyttäen integraalin avulla määriteltyä funktiota

$$\hat{f}(p) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx. \quad (7.2)$$

Oletetusta f :n integroituvuudesta seuraa, että funktion $\hat{f}(p)$ määrittelevä integraali suppenee kaikilla $p \in \mathbb{R}$ (itseasiassa saatu funktio on jopa jatkuva) ja pätee¹ myös $\int_{-M}^M f(x) e^{-ikp} dx \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \hat{f}(p)$.

Näin ollen

$$\hat{f}_{k;L} \approx \frac{1}{L} \hat{f}\left(\frac{2\pi k}{L}\right),$$

¹(MAT) Raja-arvon suppeneminen seuraa Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseesta korvaamalla integrointiväli sen karakteristisella funktiolla $\mathbb{1}_{\{|x| \leq M\}}$.

Jos oletetaan, että approksimaation tarkkuus säilyy riittävän hyvänä myös suurilla $|k|$:n arvoilla, seuraa kaavasta (7.1) approksimaatio

$$f(x_0) \approx \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{L} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{2\pi k}{L}\right) e^{i\frac{2\pi k}{L}x_0} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipx_0} dp, \quad (7.3)$$

kunhan \hat{f} on riittävän säännöllinen, jotta kaavan keskellä oleva Riemannin summa konvergoi kohti oikean puolen vastaavaa integraalia.

Yllä oleviin approksimaatioihin jäi jonkin verran epävarmuutta siitä, milloin kaavat toimivat. Seuraavissa luvuissa on tarkoituksena kertoa, milloin ja missä mielessä kaavan (7.2) määrittelemää muunnosta voidaan käyttää esittämään alkuperäistä funktiota kaavan (7.3) oikean puolen integraaleilla. Osoittautuu, että tästä esityksestä on hyötyä monien fysiikan differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa.

7.2 Funktion esittäminen Fourier'n muunnoksen avulla

Määritelmä 7.1 *Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Fourier'n muunnos on funktio $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, joka määritellään integraalilla*

$$\hat{f}(p) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx, \quad (7.4)$$

niille $p \in \mathbb{R}$, joilla integraali suppenee (pääarvomielessä). Funktiota \hat{f} voidaan merkitä myös symboleilla $\mathcal{F}f$ tai $\mathcal{F}[f]$. Vastaavasti määritellään Fourier'n käänteismuunnos funktiolle $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integraalina

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(p) e^{ipx} dp, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (7.5)$$

Huomautus 7.2

- Päinvastoin kuin Fourier'n sarjassa, Fourier'n muunnos ja käänteismuunnos ovat lähes identtisiä operaatioita: $(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}g)(-x)$.
- Fourier'n muunnoksen ja käänteismuunnoksen määritelmissä esiintyy paljon vaihtelua eri alojen välillä (sitä käytetään esim. fysiikassa, insinöritieteissä ja matematiikassa). Esimerkiksi kaavoissa (7.4) ja (7.5) saatetaan vaihtaa eksponenttitermien merkit keskenään, $e^{ipx} \leftrightarrow e^{-ipx}$. Lisäksi käänteismuunnoskaavan vakio $\frac{1}{2\pi}$ saatetaan sijoittaa toisin:

1. Normitukseltaan helppokäyttöisin on määritellä muunnos muuttujanvaihdon $p = 2\pi k$ jälkeen, eli asettamalla

$$(\mathcal{F}f)(k) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi kx} dx, \quad (\mathcal{F}^{-1}g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{i2\pi kx} dk. \quad (7.6)$$

Tällöin muunnoksista tulee entistä symmetrisempiä, $(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = (\mathcal{F}g)(-x)$. Tämä muoto poistaa muitakin myöhemmin ilmaantuvia vastaavia 2π -kertoimia, ks. esim. Parsevalin kaava Lauseessa 7.15.

2. Toinen tapa tehdä muunnoksista symmetrisempiä, on jakaa kerroin $\frac{1}{2\pi}$ tasaisesti muunnoksen ja käänteismuunnoksen välille, eli määritellä

$$(\mathcal{F}f)(p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx, \quad (\mathcal{F}^{-1}g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(p) e^{ipx} dp. \quad (7.7)$$

Tätä muotoa käytetään erityisesti matematiikassa, sillä se säilyttää määritelmässä yksinkertaisemman eksponentin muodon, mutta poistaa ylimääräiset kertoimet kaavasta $(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = (\mathcal{F}g)(-x)$.

Fourier'n muunnoksen pisteittäinen kääntyvyys on hankalampaa kuin Fourier'n sarjoissa. Sen sijaan funktioavaruudessa $L^2(\mathbb{R})$ kaikki toimii täsmälleen niin kuin sarjoillakin. Alla on lueteltu kaksi tavallisinta käänteiskuvaustulosta ja palataan myöhemmin Fourier'n muunnoksen kääntyvyyden tarkistamiseen jossain annetussa pisteessä.

Lause 7.3

1. Jos funktio on **neliöintegroituva**, eli $f \in L^2(\mathbb{R})$, suppenee sen Fourier'n muunnoksen määrittelevä integraali melkein kaikkialla² ja $\mathcal{F}f \in L^2(\mathbb{R})$. Käänteismuunnoskaava $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f] = f$ pätee funktioormissa ja vastaavalla tavalla melkein kaikissa pisteissä.
2. (Lisä) Jos f on ns. **Schwartzin funktio** (ks. alla), $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on sitä myös sen Fourier'n muunnos, eli $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Tällöin käänteismuunnoskaava pätee pisteittäin, eli $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f](x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Lisäksi tässä kaavassa sekä Fourier'n muunnoksen että käänteismuunnoksen integraalit ovat itseisesti suppenevia.

TODISTUS Ensimmäinen tuloksista todistetaan matematiikan Fourier-analyysin kursilla. Todistukset löytyvät myös lähteestä [4, Lauseet 7.7 ja 7.9]. \square

Huomautus 7.4

- Kuten Fourier'n sarjaesityksissä, tulee Fourier'n käänteismuunnoskaavastakin tyypillisesti funktion f "hyppykohdassa" arvo vastaavan hypyn puolestavälistä, eli jos f on epäjatkuva pisteessä x , mutta sillä on vasen ja oikea raja-arvo tässä pisteessä, on tyypillisesti

$$(\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}f])(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

- (Lisä) Joukko $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sisältää kaikki ne funktiot $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, jotka ovat kaikissa pisteissä mielivaltaisen monta kertaa derivoituvia ja joiden derivaatat (funktio itse mukaan lukien) häviävät äärettömyydessä nopeammin kuin mikään potenssi. Toisin sanoen vaaditaan, että jokaisella $k, n \in \mathbb{N}_0$ löytyy jokin yläraja $C_{k,n}$, jolla

$$|x^n f^{(k)}(x)| \leq C_{k,n}, \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Funktioita $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ kutsutaan myös **nopeasti väheneviksi funktioiksi** (engl. *rapidly decreasing function*) tai Schwartzin testifunktioiksi. Jälkimmäinen nimi liittyy niiden käyttöön distribuutioteoriassa, mahdollistaen Fourier'n muunnoksen ottamisen myös distribuutioista, eli viimeisessä luvussa käsiteltävistä yleistetyistä funktioista. Lisää tietoa löytyy esim. Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Schwartz_space).

Esimerkki 7.5 Etsi funktion $f(x) = e^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, Fourier'n muunnos, kun $a > 0$.

Ratkaisu: Funktio f on nyt itseisesti integroituva, ja sen muunnos voidaan laskea jokaisessa pisteessä suoraan jakamalla integrointiväli kahteen osaan origon kohdalla:

$$\begin{aligned} \hat{f}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ipx} dx = \int_{-\infty}^0 e^{ax} e^{-ipx} dx + \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-ipx} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{a-ip} e^{(a-ip)x} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{-a-ip} e^{(-a-ip)x} dx = \frac{1}{a-ip} + \frac{1}{a+ip} \\ &= \frac{a+ip+a-ip}{(a-ip)(a+ip)} = \frac{2a}{a^2+p^2}, \end{aligned}$$

²(MAT) Tarkemmin sanottuna: löytyy jokin jono kokonaislukuja M_n , jolle $M_n \rightarrow \infty$ ja vastaavat pääarvointegraalit suppenevat melkein kaikilla $p \in \mathbb{R}$. Pääarvointegraalit suppenevat tällöin myös funktioormissa.

jossa äärettömän sisältävät sijoitustermit häviävät, koska $a > 0$. Eli $\hat{f}(p) = \frac{2a}{p^2+a^2}$, ja käänteismuunnoskaava antaa tällöin esityksen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{p^2+a^2} e^{ipx} dp = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{p^2+a^2} \cos(px) dp.$$

Oikeanpuoleisen integraalin arvo on jo itseasiassa laskettu residylaskun avulla Esimerkissä 3.28, kun $x > 0$, ja sen tulokseen sijoittamalla nähdään, että integraalin arvo on tällöin e^{-ax} , eli käänteismuunnoskaava pätee näissä pisteissä. Toisaalta kosinin parillisuuden takia on integraalin arvo tällöin $e^{-a|x|}$, kun $x < 0$, ja edelleen residylauseen Esimerkin 3.20 mukaan tuottaa integraali arvon 1, kun $x = 0$. Näin ollen tässä saadaan esimerkki funktiosta, jolle Fourier'n käänteismuunnoskaava pätee pisteittäin, vaikka funktio ei olekaan Schwartzin funktio (f ei ole jatkuvasti derivoituva pisteessä $x = 0$).

Huomautus 7.6

- Kun $a = 0$ edellisessä esimerkissä, saadaan vakiofunktio $f(x) = 1$. Tämä on kyllä rajoitettu funktio, mutta se ei ole integroituva reaaliakselin yli, eikä se myöskään kuulu avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$. Sen Fourier'n muunnosta ei enää voida määritellä funktiona, vaan se tuottaa ns. Diracin δ -distribuition, joita käsitellään viimeisessä luvussa.
- Kun $a < 0$, on funktio f eksponentiaalisesti kasvava. Tällaisella funktiolla ei ole Fourier'n muunnosta edes distribuutiomieleessä. Tässä esimerkissä ei myöskään analyttisestä jatkamisesta parametrin a suhteen ole mitään hyötyä: Fourier'n muunnos $\hat{f}(p) = \frac{2a}{p^2+a^2}$ on analyttinen parametrissa a pisteitä $a = \pm ip$ lukuun ottamatta, joten voisi ajatella, että käyttäisi sitä myös määritelmänä, kun $a < 0$. Vaikka käänteismuunnoskaava tällöin supeneekin, antaa se yllä lasketun mukaan pisteessä x arvoksi $-e^{-|a||x|} = -e^{a|x|}$, joka on hyvin kaukana alkuperäisen funktion arvosta $e^{-a|x|}$.

7.2.1 Fourier'n kosini- ja sinimuunnokset

Samoin kuin Fourier'n sarjoille, saa Fourier'n muunnoksestakin johdettua Eulerin kaavan avulla, sijoittamalla $e^{-ipx} = \cos(px) - i \sin(px)$, pelkästään trigonometriä funktioita käyttäviä muunnoksia. Näihin turvaudutaan yleensä vain, jos funktio f on parillinen tai pariton.

1. Jos f on *parillinen*, eli $f(-x) = f(x)$ kaikilla x , on funktio $f(x) \cos(px)$ parillinen ja $f(x) \sin(px)$ pariton. Tällöin pätee siis

$$\hat{f}(p) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(px) dx.$$

Näin ollen $\hat{f}(-p) = \hat{f}(p)$, joten myös \hat{f} on parillinen, ja käänteismuunnoskaava saa muodon

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipx} dp = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(p) \cos(px) dp.$$

2. Jos f on *pariton*, eli $f(-x) = -f(x)$ kaikilla x , on funktio $f(x) \cos(px)$ pariton ja $f(x) \sin(px)$ parillinen. Tällöin pätee siis

$$\hat{f}(p) = -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin(px) dx,$$

joten myös \hat{f} on pariton ja käänteismuunnoskaava saa muodon

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipx} dp = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} i \hat{f}(p) \sin(px) dp.$$

Näistä saadaan vakiot sopivasti siirtämällä aikaiseksi kosini- ja sinimuunnokset funktiolle $f(x)$, joka on määritelty positiivisella reaaliakselilla eli, kun $x > 0$. Tällöin tehdään ensin joko parillinen tai pariton jatke h funktiosta f koko reaaliakselille. Parillisessa tapauksessa määritellään $\mathcal{F}_c f = \frac{1}{2}\hat{h}$ ja parittomassa tapauksessa $\mathcal{F}_s f = \frac{1}{2}\hat{h}$. Käyttämällä yllä annettuja trigonometrisia esityksiä jatkeen Fourier'n muunnokselle saadaan seuraavat tulokset.

Funktion $f(x)$, $x > 0$, **kosinimuunnos** ja sen käänteismuunnos määritellään kaavoilla

$$(\mathcal{F}_c f)(p) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(px) dx, \quad p > 0, \quad (7.8)$$

$$(\mathcal{F}_c^{-1} g)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g(p) \cos(px) dp, \quad x > 0, \quad (7.9)$$

ja vastaava **sinimuunnos** ja sen käänteismuunnos määritellään kaavoilla

$$(\mathcal{F}_s f)(p) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(px) dx, \quad p > 0, \quad (7.10)$$

$$(\mathcal{F}_s^{-1} g)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g(p) \sin(px) dp, \quad x > 0. \quad (7.11)$$

Esimerkki 7.7 Tutkitaan suorakulmaista pulssia $f(x) = \mathbb{1}_{\{0 < x \leq a\}}$, jossa $a > 0$. Laske sen kosini- ja sinimuunnos.

Ratkaisu: Olkoon $p > 0$. Kosinimuunnoksen arvo saadaan tällöin kaavasta

$$(\mathcal{F}_c f)(p) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(px) dx = \int_0^a \cos(px) dx = \left/ \frac{1}{p} \sin(px) \right|_0^a = \frac{\sin(pa)}{p}.$$

Sinimuunnokselle pätee vastaavasti

$$(\mathcal{F}_s f)(p) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(px) dx = \int_0^a \sin(px) dx = \left/ \frac{-1}{p} \cos(px) \right|_0^a = \frac{1}{p} (1 - \cos(pa)).$$

Käänteismuunnoskaavoista saadaan siis laskettua seuraavien integraalien arvot

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(pa) \cos(px)}{p} dp = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 \leq x < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } x = a, \\ 0, & \text{kun } x > a, \end{cases}$$

ja sinimuunnokselle

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos(pa)) \sin(px)}{p} dp = \begin{cases} 1, & \text{kun } 0 < x < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } x = a, \\ 0, & \text{kun } x > a \text{ tai } x = 0. \end{cases}$$

Tässä arvo pisteessä $x = 0$ johtuu Fourier'n muunnoksessa käytetyn jatkeen parittomuudesta.

7.3 Fourier'n muunnoksen perusominaisuuksia

Lause 7.8 (Riemannin–Lebesguen lemma) Oletetaan, että f on itseisesti integroitava, eli $C := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Tällöin sen Fourier'n muunnokselle \hat{f} pätee:

1. $\hat{f}(p)$ on jatkuva funktio.

2. $|\widehat{f}(p)| \leq C$ kaikilla $p \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{p \rightarrow \infty} \widehat{f}(p) = 0 = \lim_{p \rightarrow -\infty} \widehat{f}(p)$.

TODISTUS Todistuksen löytää lähteestä [3, Lause 7.5] tai Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann%E2%80%93Lebesgue_lemma). Kohdat 1 ja 2 ovat suoraviivaisia, viimeinen kohta vaatii vähän enemmän työtä. \square

Huomautus 7.9

- Tässä on hyvä huomata, että vaikka $f \in L^2(\mathbb{R})$ ei siitä enää automaattisesti seuraa, että f olisi itseisesti integroituva, tai toisin päin. (Fourier'n sarjan tapauksessahan jokainen $f \in L^2([a, a + L])$ on itseisesti integroituva tällä välillä, kuten Hölderin epäyhtälöstä seuraa.) Esimerkkeiksi käyvät $\exp(-|x|)|x|^{-1/2}$, joka on itseisesti integroituva, muttei kuulu avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$, ja $1/(1 + |x|)$, joka kuuluu avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$, muttei ole itseisesti integroituva.
- Kohdan 3 voi myös ilmaista sanomalla, että näillä oletuksilla $\widehat{f}(p) = o(1)$, kun $|p| \rightarrow \infty$, eli ” f häviää äärettömydessä”.
- Yleisestikin pätee nyrkkisääntö: **mitä säännöllisempi funktio f on, sitä nopeammin sen Fourier'n muunnos häviää äärettömydessä**. Esimerkiksi seuraavassa Lauseessa nähdään, että jokainen integroituva lisäderivaatta funktiolle lisää Fourier'n muunnoksen häviämisenopeutta yhden p :n potenssin verran.

Alla oleva tulos on keskeinen syy sille, miksi Fourier'n muunnos on niin usein kätevä tapa ratkaista differentiaaliyhtälöitä: **Fourier'n muunnos muuttaa derivaatan polynomilla kertomiseksi**.

Lause 7.10 (Derivaatan Fourier'n muunnos)

1. Jos f on jatkuvasti derivoituva funktio, jolle $f(x) = o(1)$, kun $|x| \rightarrow \infty$, ja sen derivaatta f' on **itseisesti integroituva**, on $\widehat{f}(p) = o(|p|^{-1})$, kun $|p| \rightarrow \infty$, ja lisäksi pätee

$$\mathcal{F}[f'](p) = ip\widehat{f}(p), \quad p \in \mathbb{R}. \quad (7.12)$$

2. Tutkitaan funktiota f , joka on n kertaa jatkuvasti derivoituva. Oletetaan, että $f^{(k)}$ on itseisesti integroituva kaikilla $0 < k \leq n$ ja $f^{(k)}(x) = o(1)$, kun $|x| \rightarrow \infty$ ja $0 \leq k < n$. Tällöin kaikilla $0 < k \leq n$,

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](p) = (ip)^k \widehat{f}(p), \quad p \in \mathbb{R}, \quad \text{ja} \quad \widehat{f}(p) = o(|p|^{-k}), \quad |p| \rightarrow \infty. \quad (7.13)$$

3. (Lisä) Jos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pätee kaikilla $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](p) = (ip)^k \widehat{f}(p), \quad p \in \mathbb{R}, \quad \text{ja} \quad \widehat{f}(p) = o(|p|^{-k}), \quad |p| \rightarrow \infty. \quad (7.14)$$

TODISTUS Aloitetaan kohdasta 1. Kun $p \neq 0$ ja $M > 0$, saadaan osittaisintegroimalla

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M f(x)e^{-ipx} dx &= \int_{-M}^M f(x) \frac{1}{-ip} e^{-ipx} - \int_{-M}^M f'(x) \frac{1}{-ip} e^{-ipx} dx \\ &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{1}{ip} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ipx} dx = \frac{1}{ip} \mathcal{F}[f'](p), \end{aligned}$$

sillä oletettiinhan, että $f(\pm M) \rightarrow 0$, kun $M \rightarrow \infty$. Koska tällöin vasen puoli lähestyy arvoa $\hat{f}(p)$, nähdään, että $\mathcal{F}[f'](p) = ip\hat{f}(p)$, kun $p \neq 0$. Jos $\hat{f}(0)$ suppenee³, kaava pätee myös pisteessä $p = 0$: tällöin sen oikea puoli antaa nollan ja toisaalta

$$\mathcal{F}[f'](0) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M f'(x) dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[f(x) \right]_{-M}^M = \lim_{M \rightarrow \infty} (f(M) - f(-M)) = 0.$$

Riemannin–Lebesguen lemman (Lause 7.8) mukaan $\mathcal{F}[f'](p) = o(1)$, kun $|p| \rightarrow \infty$, joten kaavasta $\mathcal{F}[f'](p) = ip\hat{f}(p)$ seuraa suoraan $\lim_{|p| \rightarrow \infty} (|p|\hat{f}(p)) = 0$, eli $\hat{f}(p) = o(|p|^{-1})$.

Kohtaa 2 varten huomataan, että se vastaa kohtaa 1, kun $n = 1$, joten tämä tapaus on jo todistettu. Tehdään tämän jälkeen induktio-oletus, että kohdan 2 tulos pätee arvoille $n - 1$ saakka. Tällöin arvolla n oletuksista seuraa erityisesti, että aina kun $0 < k \leq n$, on $f^{(k-1)}(p) = o(1)$ ja $f^{(k)}(p) = \frac{d}{dp} f^{(k-1)}(p)$ on itseisesti integroitava. Näin ollen kohdan 1 ja induktio-oletuksen mukaan

$$\mathcal{F}[f^{(k)}](p) = ip\mathcal{F}[f^{(k-1)}](p) = ip(ip)^{k-1}\hat{f}(k) = (ip)^k\hat{f}(k).$$

Tästä seuraa myös $\hat{f}(p) = o(|p|^{-k})$, kun $|p| \rightarrow \infty$. Kohta 3 on kohdan 2 suora seuraus, sillä Schwartzin funktion määritelmästä seuraa, että kohdan 2 oletukset toteutuvat kaikilla n . \square

7.4 Konvoluutio ja sen Fourier'n muunnos

Määritelmä 7.11 *Reaaliakselilla määritellyiden funktioiden f, g konvoluutio on funktio h , jonka arvot määritellään seuraavan integraalin arvoilla, aina kun integraali suppenee*

$$h(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy.$$

Tällöin merkitään $h = f * g$.

Huomautus 7.12

- Jos sekä f että g ovat *itseisesti integroituvia*, suppenee konvoluution määrittelevä integraali itseisesti melkein kaikilla x ja myös funktio $h = f * g$ on tällöin itseisesti integroitava [3, Lause 8.14].
- Muuttujanvaihdoilla $y' = x - y$ nähdään helposti, että $h(x) = (g * f)(x)$ aina kun integraali suppenee. Eli **konvoluutio on symmetrinen funktioiden f, g vaihdossa**: $f * g = g * f$.
- Konvoluutio tulee sovelluksissa vastaan esimerkiksi kuvankäsittelyssä ja digitaalisessa signaalinkäsittelyssä (ks. Wikipedia, <https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution>). Sovelluksissa käytetäänkin hyväksi yhtä konvoluution perusominaisuuksista: **tyypillisesti $f * g$ on säännöllisempi kuin kumpikaan funktioista f tai g** , eli näin voidaan esimerkiksi silottaa jotain mitattua signaalia g ottamalla siitä konvoluutio jonkin Schwartzin funktion f kanssa. Tämä ominaisuus seuraa suoraan seuraavasta Lauseesta, kun muistaa, että funktion säännöllisyys liittyy sen Fourier'n muunnoksen häviämiseen äärettömydessä.

Lause 7.13 *Fourier'n muunnos muuttaa konvoluution tuloksi:*

$$\mathcal{F}[f * g](p) = \hat{f}(p)\hat{g}(p), \quad p \in \mathbb{R}, \quad (7.15)$$

ainakin, kun f ja g ovat itseisesti integroituvia.

³(MAT) Vaikka $\hat{f}(0) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^M e^{-ipx} dx$ ei suppenisikaan, pätee kaava kuitenkin raja-arvomielessä myös pisteessä $p = 0$, sillä $\mathcal{F}[f']$ on jatkuva Riemannin–Lebesguen lemman mukaan, joten $0 = \mathcal{F}[f'](0) = \lim_{p \rightarrow 0} \mathcal{F}[f'](p) = \lim_{p \rightarrow 0} (ip\hat{f}(p))$.

TODISTUS Lauseen todistus perustuu integrointijärjestyksen vaihtoon, joka on sallittua ainakin, jos f ja g ovat itseisesti integroituvia (ks. alla oleva Fubinin lause, jota varten on tärkeintä huomata, että näillä oletuksilla $\int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)||g(y)|dx]dy < \infty$). Tällöin nimittäin $h := f * g$ on yllä mainitun tuloksen perusteella itseisesti integroituva, joten sen Fourier'n muunnos on itseisesti integroituvan integraalin antama kaikilla p , ja sille pätee

$$\begin{aligned}\widehat{h}(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \right] e^{-ipx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)e^{-ipx} dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ip(x'+y)} dx' \right] dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ipy} \widehat{f}(p) dy = \widehat{f}(p)\widehat{g}(p).\end{aligned}$$

Saatiin siis todistettua kaava (7.15) annetussa erikoistapauksessa. \square

(MAT) Alla täydellisyyden vuoksi vielä versio Fubinin lauseesta, jolla pystyy perustelemaan kaikki tämän monisteen integrointijärjestyksen vaihdot. Alla oleva jatkuvuuteen liittyvä ehto on erittäin väljä ja se on käytännössä aina totta funktioille, joita tulee vastaan sovelluksissa (esimerkiksi kaikki tässä monisteessa esiintyvät funktiot toteuttavat sen). Sen sijaan itseiseen integroituvuuteen liittyvä ehto (7.16) voi helpostikin jäädä toteutumatta ja sen tarkistaminen on tärkein osa Fubinin lauseen käyttöä. Löytyy suhteellisen yksinkertaisia esimerkkifunktioita, joissa integroituvuusehto (7.16) ei toteudu ja molemmat iteroidut integraali suppenevat, mutta integraalien arvot eivät ole samat (ks. Wikipedian sivun lopun esimerkki, https://en.wikipedia.org/wiki/Fubini's_theorem)

Lause 7.14 (Fubinin lause) *Olkoon E', E mitallisia joukkoja (esimerkiksi jotain reaaliakselin rajoitettuja tai rajoittamattomia välejä). Oletetaan, että $F(x', x)$, $x' \in E'$, $x \in E$, on funktio joka on joko jatkuva joukossa $E' \times E$ tai saadaan pisteittäin suppenevana rajana jostain jonosta jatkuvia funktioita (eli löytyy jatkuvat F_n , joilla $F(x', x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x', x)$ melkein kaikilla x', x). Jos jompikumpi alla olevista iteroiduista integraaleista on äärellinen,*

$$\int_{E'} \left[\int_E |F(x', x)| dx \right] dx' < \infty \quad \text{tai} \quad \int_E \left[\int_{E'} |F(x', x)| dx' \right] dx < \infty, \quad (7.16)$$

niin molemmat näistä integraaleista ovat äärellisiä ja vastaavissa itseisesti suppenevissa integraaleissa saa tehdä integrointijärjestyksen vaihdon:

$$\int_{E'} \int_E F(x', x) dx dx' = \int_E \int_{E'} F(x', x) dx' dx = \int_{E' \times E} F(x', x) d(x', x).$$

TODISTUS Oletuksista seuraa, että funktio F on pisteittäinen raja mitallisista funktioista, joten se on mitallinen tulomitan suhteen joukossa $E' \times E$. Lisäksi Lebesguen mitat ovat σ -äärellisiä, joten Fubinin lausetta saa soveltaa, kunhan jompikumpi iteroiduista integraaleista on itseisesti suppeneva. Yksityiskohtia lauseesta löytyy lähteestä [3, Lause 8.8], reaalianalyysin kursseilla ja Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Fubini's_theorem). \square

7.5 Parsevalin ja Plancherelin kaavat Fourier'n muunnokselle

Parsevalin ja Plancherelin kaavat yleistyvät myös Fourier'n muunnokselle, kuten alla näytetään. Huomataan, että Plancherelin kaava sanoo, että Fourier'n muunnos säilyttää skalaaritulon arvon kerrointa $\frac{1}{2\pi}$ vaille: $\langle g|f \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{g}|\widehat{f} \rangle$, kun $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Jos olisi käytetty jotain Luvun 7.2 alussa mainituista vaihtoehtoisista määritelmistä Fourier'n muunnokselle, olisi tässä päästy eroon myös ylimääräisestä kertoimesta, ja niille Plancherelin kaava kuuluisikin $\langle g|f \rangle = \langle \mathcal{F}[g]|\mathcal{F}[f] \rangle$.

Koska Fourier'n muunnos $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ on lisäksi lineaarinen ja kääntyvä, seuraa tästä, että **Fourier'n muunnos on avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ unitaarinen kuvaus**. Tällaiset kuvaukset ovat tärkeitä erityisesti kvanttimekaniikassa, koska ne säilyttävät avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ rakenteen, samaan tapaan kuin rotaatiot säilyttävät avaruuden \mathbb{R}^3 rakenteen.

Lause 7.15 *Olkoot $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ja merkitään niiden Fourier'n muunnoksia \hat{f} ja \hat{g} . Tällöin $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$, ja pätee*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^* f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(p)^* \hat{f}(p) \frac{dp}{2\pi}, \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(p)|^2 \frac{dp}{2\pi}, \quad (7.17)$$

joita voidaan myös lyhentää kaavoiksi

$$\langle g|f \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{g}|\hat{f} \rangle \quad \text{ja} \quad \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|^2.$$

TODISTUS Tulos on suoraviivaisinta johtaa käyttämällä käänteismuunnoskaavaa ja tekemällä sen jälkeen integrointijärjestyksen vaihto Plancherelin kaavan vasemmalle puolelle. Koska Parsevalin kaava on suora seuraus Plancherelin kaavasta sijoituksella $g = f$, riittää tämä todistukseen. Käänteismuunnoskaavan mukaan

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipx} \frac{dp}{2\pi},$$

joten

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^* f(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)^* \hat{f}(p) e^{ipx} \frac{dp}{2\pi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) e^{-ipx})^* dx \frac{dp}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) \hat{g}(p)^* \frac{dp}{2\pi}. \end{aligned}$$

Näin ollen Plancherelin kaava pätee.

(MAT) Lasku on matemaattisesti ”oikein” sellaisenaan kaikille funktioille $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, sillä tällöin funktiot ja niiden Fourier'n muunnokset \hat{f}, \hat{g} ovat kaikki jatkuvia, itseisesti integroituvia funktioita (tätä tietoa tarvitaan Fubinin lauseen soveltamiseksi integrointijärjestystä vaihdettaessa), ja käänteismuunnoskaava toimii kaikissa pisteissä x . Tämän jälkeen täytyy vielä käyttää tietoa, että Schwartzin funktioiden joukko on tiheä avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$, eli jokaista avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ funktiota voidaan approksimoida mielivaltaisen tarkasti normissa joukon $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ funktioilla. Tästä seuraa, että sekä Parseval että Plancherel pätevät myös avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ funktioille. \square

Esimerkki 7.16 Laske integraalin $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(pa)}{p^2} dp$ arvo kaikilla vakioilla $a > 0$.

Ratkaisu: Esimerkin 7.7 suorakulmaisen pulssin parillinen jatke on funktio $h(x) = \mathbb{1}_{\{|x| < a\}}$ ja selvästi $h \in L^2(\mathbb{R})$. Sen Fourier'n muunnos voidaan laskea kuten esimerkissä,

$$\hat{h}(p) = 2 \frac{\sin(pa)}{p}.$$

Parsevalin kaavan mukaan pätee siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(p)|^2 \frac{dp}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(pa)}{p^2} dp.$$

Näin ollen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(pa)}{p^2} dp = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2} \int_{-a}^a 1 dx = \pi a.$$

7.6 Moniulotteinen Fourier'n muunnos

Aloitetaan kaksiulotteisesta tapauksesta, tavoitteena on etsiä funktion $f(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, Fourier'n muunnos. Oletetaan, että funktio on itseisesti integroitava koko määrittelyjoukkonsa \mathbb{R}^2 yli, ja tehdään ensin Fourier'n muunnos sen argumentin x suhteen ja tämän jälkeen argumentin y suhteen. Tällöin voidaan käyttää Fubinin lausetta perustelevaan tulos

$$\hat{f}(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-iqy} dy \right] e^{-ipx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(px+qy)} dx dy.$$

Ottamalla tästä käänteismuunnos ensin q :n suhteen ja sen jälkeen p :n suhteen, saadaan tulokseksi (ainakin riittävän säännöllisille funktioille f)

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p, q) e^{iqy} \frac{dq}{2\pi} \right] e^{ipx} \frac{dp}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p, q) e^{i(px+qy)} \frac{dp dq}{(2\pi)^2}.$$

Huomataan, että merkinnät käyvät kömpelöiksi varsinkin, kun ulottuvuuksien määrää tästä lisätään. Otetaan nyt käyttöön seuraavat yleisesti käytetyt lyhennysmerkinnät:

$$\int_{\mathbb{R}^d} F(\mathbf{x}) d^d \mathbf{x} := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_d) dx_1 dx_2 \cdots dx_d,$$

jossa iteroidaan d kertaa integrointia reaaliakselin yli. Jos F on itseisesti integroitava, vastaa tämä Fubinin lauseen mukaan samaa kuin, jos tässä integroitaisiin suoraan vasemmalla puolella oleva d -ulotteinen integraali koko joukon \mathbb{R}^d yli. Huomataan lisäksi, että yllä eksponentissa olevaa termiä voi yksinkertaistaa kirjoittamalla se \mathbb{R}^2 :n pistetulon avulla,

$$px + qy = (p, q) \cdot (x, y).$$

Päädytään siis seuraaviin määritelmiin d -ulotteiselle Fourier'n muunnokselle.

Määritelmä 7.17 *Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ d -ulotteinen Fourier'n muunnos on funktio $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, joka määritellään integraalilla*

$$\hat{f}(\mathbf{p}) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} d^d \mathbf{x}, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^d. \quad (7.18)$$

Vastaavasti määritellään d -ulotteinen Fourier'n käänteismuunnos funktiolle $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ integraalilla

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (7.19)$$

Esimerkki 7.18 Kun $a > 0$, laske funktion $f(\mathbf{x}) := e^{-a|\mathbf{x}|}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, Fourier'n muunnos.

Ratkaisu: Määritelmän mukaan tarvitsee siis ratkaista integraalin

$$\hat{f}(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-a|\mathbf{x}|} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} d^3 \mathbf{x}$$

arvo, kun $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$. Lasketaan integraali käyttäen pallokoordinaatteja (r, θ, φ) , joiden z -akseli valitaan samansuuntaiseksi kuin vektori \mathbf{p} , eli joille $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$, $p := |\mathbf{p}|$. Tällöin $|\mathbf{x}| = r$ ja integrandin pistetulo toteuttaa $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = p\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{x} = pr \cos \theta$, joten saadaan

$$\hat{f}(\mathbf{p}) = \int_0^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta e^{-ar - ipr \cos \theta} = 2\pi \int_0^{\infty} dr r^2 e^{-ar} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta e^{-ipr \cos \theta}.$$

Muuttujanvaihdolla $y = \cos \theta$, jolle $\frac{dy}{d\theta} = -\sin \theta < 0$, kun $0 < \theta < \pi$, saadaan θ -integraalista arvoille $p, r \neq 0$,

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-ipr \cos \theta} = \int_{-1}^1 dy e^{-ipry} = \int_{-1}^1 \frac{1}{-ipr} e^{-ipry} = \frac{i}{pr} (e^{-ipr} - e^{ipr}).$$

Näin ollen, kun $p \neq 0$,

$$\hat{f}(\mathbf{p}) = 2\pi \int_0^\infty dr r^2 e^{-ar} \frac{i}{pr} (e^{-ipr} - e^{ipr}) = \frac{i2\pi}{p} \left(\int_0^\infty dr r e^{(-a-ip)r} - \int_0^\infty dr r e^{(-a+ip)r} \right).$$

Osittaisintegroimalla saadaan, kaikille $q \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr r e^{-(a+iq)r} &= \int_0^\infty r \frac{1}{-(a+iq)} e^{-(a+iq)r} - \int_0^\infty dr \frac{1}{-(a+iq)} e^{-(a+iq)r} \\ &= 0 - 0 + \frac{1}{a+iq} \int_0^\infty \frac{1}{-(a+iq)} e^{-(a+iq)r} = \frac{1}{(a+iq)^2}. \end{aligned}$$

Sijoittamalla tämä tulos kahdesti aiempaan kaavaan, tulee lopputulokseksi, kun $p \neq 0$,

$$\hat{f}(\mathbf{p}) = \frac{i2\pi}{p} \left(\frac{1}{(a+ip)^2} - \frac{1}{(a-ip)^2} \right) = \frac{i2\pi}{p} \frac{(a-ip)^2 - (a+ip)^2}{(a+ip)^2(a-ip)^2} = \frac{i2\pi}{p} \frac{-i4ap}{(a^2+p^2)^2} = \frac{8\pi a}{(a^2+p^2)^2}.$$

Jos $p = 0$, on $\int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-ipr \cos \theta} = 2$, joten

$$\hat{f}(\mathbf{0}) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 e^{-ar} = \frac{4\pi}{a} \int_0^\infty ds \left(\frac{s}{a}\right)^2 e^{-s} = \frac{4\pi}{a^3} \Gamma(3) = \frac{8\pi}{a^3}.$$

Vastaus: Kaikilla $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ pätee

$$\hat{f}(\mathbf{p}) = \frac{8\pi a}{(a^2+p^2)^2}, \quad p = |\mathbf{p}|.$$

Huomautus 7.19

- Luvussa 7.2.1 nähtiin, että reaaliakselilla määritellyn funktion parillisuus periytyi sen Fourier'n muunnokselle. Tämä tulos pätee myös moniulotteiselle Fourier'n muunnokselle, kuten nähdään muuttujanvaihdolla (esim. $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$) määrittelevien integraalien sisällä:

$$\begin{aligned} f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \text{ kaikilla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d &\Rightarrow \hat{f}(-\mathbf{p}) = \hat{f}(\mathbf{p}) \text{ kaikilla } \mathbf{p} \in \mathbb{R}^d, \\ f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}) \text{ kaikilla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d &\Rightarrow \hat{f}(-\mathbf{p}) = -\hat{f}(\mathbf{p}) \text{ kaikilla } \mathbf{p} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

- Edellisessä esimerkissä havaittiin, että Fourier'n muunnos säilytti alkuperäisen funktion rotaatioinvarianssin. Tämä pätee yleisemminkin, eli **jos f on rotaatioinvariantti, on myös \hat{f} rotaatioinvariantti**. Toisin sanoen, jos $f(R\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ kaikilla rotaatiomatriiseilla $R \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ja pisteissä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, pätee myös $\hat{f}(R\mathbf{p}) = \hat{f}(\mathbf{p})$ kaikilla rotaatiomatriiseilla $R \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ja pisteissä $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$.
- Jos f on rotaatioinvariantti, löytyy aina funktio $\varphi(r)$, $r \geq 0$, jolle $f(\mathbf{x}) = \varphi(|\mathbf{x}|)$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Koska tällöin myös \hat{f} on rotaatioinvariantti, löytyy sillekin vastaava funktio $\psi(r)$, $r \geq 0$, jolle $\hat{f}(\mathbf{p}) = \psi(|\mathbf{p}|)$ kaikilla $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$.
- Huomaa, että tällöin **ei** kuitenkaan yleensä päde $\psi = \hat{\varphi}$: Tapauksen $\varphi(r) = e^{-ar}$, $a > 0$, Fourier'n muunnos on laskettu yhdessä dimensiossa Esimerkissä 7.5 ja kolmessa dimensiossa Esimerkissä 7.18. Yksiulotteinen tapaus antaa funktion $\psi(p) = \frac{2a}{a^2+p^2}$ ja kolmiulotteinen tapaus funktion $\psi(p) = \frac{8\pi a}{(a^2+p^2)^2}$. Vastaus riippuu siis oleellisesti dimensioista.

TODISTUS (Lisä) Näytetään vielä lopuksi miten yllä mainitut rotaatioinvarianssiominaisuudet voi johtaa. Olkoon $R \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mielivaltainen rotaatiomatriisi. Tällöin sille pätee $R^{-1} = R^T$, joten $R^T R = \mathbb{1} =$ yksikkömatriisi. Näin ollen $1 = \det \mathbb{1} = \det(R^T R) = \det(R^T) \det R = (\det R)^2$, joten $\det R = \pm 1$. Tehdään Fourier'n muunnoksen määrittelevään integraaliin muuttujanvaihto $\mathbf{x} = R^T \mathbf{y}$, jonka Jacobin determinantti on $|\det R^T| = |\det R| = 1$. Saadaan siis

$$\hat{f}(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(R^T \mathbf{y}) e^{-i\mathbf{p} \cdot (R^T \mathbf{y})} d^d \mathbf{y}.$$

Koska myös R^T on tällöin rotaatiomatriisi, pätee tässä oletusten mukaan $f(R^T \mathbf{y}) = f(\mathbf{y})$. Toisaalta transpoosin määritelmän mukaan $\mathbf{p} \cdot (R^T \mathbf{y}) = (R\mathbf{p}) \cdot \mathbf{y}$, joten nähdään, että $\hat{f}(\mathbf{p}) = \hat{f}(R\mathbf{p})$. Näin ollen rotaatioinvarianssi säilyy Fourier'n muunnoksessa.

Jos f on rotaatioinvariantti, löytää funktion φ esimerkiksi valitsemalla kullakin \mathbf{x} rotaatioksi R jonkin kuvauksen, joka kääntää vektorin \mathbf{x} osoittamaan ykkösakselin suuntaan, eli kuvauksen, jolle $R\mathbf{x} = (|\mathbf{x}|, 0, 0, \dots) = |\mathbf{x}| \mathbf{e}_1$. Tällöin siis $f(\mathbf{x}) = f(R\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}| \mathbf{e}_1)$, joten voidaan määritellä $\varphi(r) := f(r\mathbf{e}_1)$, $r \geq 0$, josta seuraa haluttu kaava $f(\mathbf{x}) = \varphi(|\mathbf{x}|)$ kaikille \mathbf{x} . \square

7.7 (Lisä) Fourier'n käänteismuunnoksen pisteittäinen suppeneminen ja Gibbsin ilmiö

Yleensä Fourier'n muunnosta käytettäessä yllä esitetty $L^2(\mathbb{R})$ -teoria riittää, eikä siitä ole suurempaa harmia, ettei käänteismuunnoksen arvoa jossain tietyssä pisteessä tunneta, vaan tiedetään ainoastaan, että se antaa takaisin alkuperäisen funktion melkein kaikkialla. Joskus tarvitsee kuitenkin laskea myös käänteismuunnoksen pisteittäisiä arvoja, tai tarkistaa sen toimivuutta funktioille, jotka ovat itseisesti integroituvia, mutta eivät neliöintegroituja. Alla esitetyn **Dinin ehdon** (engl. *Dini's criterion*) tarkistaminen on yksi harvoista tavoista tehdä tämä suhteellisen vaivattomasti: lopputuloksena on, että tällöin myös Fourier'n käänteismuunnos toimii samalla tavalla kuin se käyttäytyi Fourier'n sarjojen tapauksessa, kun alkuperäinen funktio toteutti Dirichlet'n ehdot (ks. Lause 6.9).

Tästä laskusta nähdään myös, että Fourier'n käänteismuunnoksen pääarvointegraalin suppeneminen alkuperäisen funktion epäjatkuvuuspisteiden lähellä voi olla patologista: suppeneminen ei tapahdu monotonisesti, vaan siihen liittyy suurta arvojen heilahtelua epäjatkuvuuspisteen ympäristössä. Tätä ominaisuutta kutsutaan **Gibbsin ilmiöksi** ja sitä käsitellään lisää Esimerkissä 7.22.

Lähdetään tarkastelemaan jotain funktiota $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ja mielivaltaista pistettä $x_0 \in \mathbb{R}$, olettaen että seuraavat kaksi ehtoa toteutuvat.

1. f on itseisesti integroituva, eli $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.
2. Funktiolle löytyy vasen ja oikea raja-arvo pisteessä x_0 . Käytetään näistä merkintöjä $f(x_0^-)$ ja $f(x_0^+)$, kuten Dirichlet'n ehdoissa tehtiin. *Huom:* Tämä ehto toteutuu automaattisesti, jos f on jatkuva pisteessä x_0 , ja tällöin on $f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+)$.

Tällöin oletuksesta 1. seuraa, että funktion f Fourier'n muunnoksen $\hat{f}(p)$ integraali suppenee itseisesti kaikilla $p \in \mathbb{R}$, ja saatu funktion on jatkuva, rajoitettu ja se häviää äärettömyydessä (ks. Lause 7.8). Näin ollen käänteismuunnoksen pääarvossa esiintyvät integraalit

$$I_R := \int_{-R}^R \hat{f}(p) e^{ipx_0} \frac{dp}{2\pi}, \quad (7.20)$$

ovat äärellisiä kaikilla $R > 0$, mutta funktion \hat{f} ominaisuuksista seuraa suoraan ainoastaan, että integraalin arvo on $O(R)$, kun $R \rightarrow \infty$. Mikä lisäoletus funktiosta f takaisi, että tässä raja-arvo, kun $R \rightarrow \infty$, suppenee kohti pisteen x_0 kohdalla olevan mahdollisen hypyn puoliväliä, eli

kohti keskiarvoa $\frac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)]$, niin kuin Fourier'n sarjoille kävi? Yksi suhteellisen helposti tarkistettava ehto on ns. Dinin ehto, joka on esitelty seuraavassa lauseessa.

Lause 7.20 *Oletetaan, että funktio f toteuttaa yllä olevat ehdot 1 ja 2 pisteessä x_0 . Määritellään tällöin erotusosamäärää muistuttava funktio*

$$\Phi(y; x_0) := \frac{f(x_0 + y) + f(x_0 - y) - f(x_0^-) - f(x_0^+)}{2y}, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (7.21)$$

Jos funktio f toteuttaa lisäksi seuraavan **Dinin ehdon**, eli jos löytyy jokin $r > 0$, jolla

$$\int_{-r}^r |\Phi(y; x_0)| dy < \infty, \quad (7.22)$$

niin käännteismuunnoksen pääarvointegraalille pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipx_0} \frac{dp}{2\pi} := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \hat{f}(p) e^{ipx_0} \frac{dp}{2\pi} = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}. \quad (7.23)$$

Erityisesti, jos f toteuttaa Dinin ehdot jossain jatkuvuus pisteessä x_0 , niin käännteismuunnos antaa takaisin funktion arvon $f(x_0)$.

Huomautus 7.21

- Dinin ehto (7.22) toteutuu erityisesti, jos löytyy $r > 0$, jolla f on jatkuvasti derivoituva väleillä $[x_0 - r, x_0]$ ja $[x_0, x_0 + r]$. Tällöin nimittäin arvoille $0 < y < r$ pätee

$$f(x_0 + y) - f(x_0^+) = \int_0^y f'(x_0 + \tau) d\tau, \quad \text{ja} \quad f(x_0^-) - f(x_0 - y) = \int_{-y}^0 f'(x_0 + \tau) d\tau,$$

joten $|\Phi(y; x_0)| \leq \frac{1}{2y}(Cy + Cy) = C$, missä C on jokin $|f'(x)|$:n yläraja välillä $[x_0 - r, x_0 + r]$. Koska $\Phi(-y; x_0) = -\Phi(y; x_0)$ seuraa tästä estimaatti $\int_{-r}^r |\Phi(y; x_0)| dy \leq 2rC < \infty$, joten ehto (7.22) toteutuu.

- Yhdistämällä edellinen kohta Lauseeseen 7.20 nähdään, että **käännteismuunnoskaava (7.23) pätee kaikissa pisteissä x_0 , jos f on itseisesti integroitava ja se on paloitain määritelty käyttäen joitain jatkuvasti derivoituvia funktioita**. Tällaisia funktioita ovat esimerkiksi $f(x) = e^{-|x|}$, $f(x) = |x|e^{-x^2}$, $f(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}}e^{-x}$, ja kaikki välien karakteristiset funktiot, eli esimerkiksi $f(x) = \mathbb{1}_{\{a < x < b\}}$, kun $a < b$.
- Myös funktio $f(x) := \mathbb{1}_{\{0 < x \leq 1\}}x^{-p}$, jossa $p < 1$, toteuttaa siis Lauseen ehdot kaikilla $x_0 \neq 0$. Näin ollen sen käännteismuunnoskaava antaa takaisin funktion arvon $f(x_0)$ kaikkialla muualla paitsi f :n epäjatkuvuus pisteissä $x_0 = 0$ ja $x_0 = 1$. Tämä siitäkin huolimatta, että $f \notin L^2(\mathbb{R})$, jos $\frac{1}{2} \leq p < 1$. Näin ollen neliöintegroituvuus ei ole välttämätöntä käännteismuunnoskaavan toimimiselle.

TODISTUS Lauseen todistamiseksi oletetaan, että f ja x_0 ovat sellaiset, että kaikki kolme vaadittua ehtoa toteutuvat, ja määritellään sen jälkeen $\Phi(y; x_0)$ kaavalla (7.21) ja I_R , $R > 0$, integraaleina (7.20). Koska f on itseisesti integroitava, voi I_R :n määritelmässä käyttää Fubinin lausetta integrointijärjestyksen vaihtamiseksi ja saada

$$\begin{aligned} I_R &= \int_{-R}^R \frac{dp}{2\pi} \hat{f}(p) e^{ipx_0} = \int_{-R}^R \frac{dp}{2\pi} e^{ipx_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ipx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \int_{-R}^R \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x_0 - x)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) D_R(x_0 - x) = (D_R * f)(x_0), \end{aligned}$$

jossa toisella rivillä on määritelty *Dirichlet'n ydin* Fourier'n muunnokselle integraalina

$$D_R(u) := \int_{-R}^R \frac{dp}{2\pi} e^{ipu}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Määritelmästä nähdään, että $D_R(0) = \frac{R}{\pi}$, ja kun $u \neq 0$,

$$D_R(u) = \int_{-R}^R \frac{dp}{2\pi} e^{ipu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{1}{iu} e^{ipu} = \frac{-i}{2\pi u} (e^{iRu} - e^{-iRu}) = \frac{-i}{2\pi u} 2i \sin(Ru) = \frac{\sin(Ru)}{\pi u}.$$

Selvästi $D_R(-u) = D_R(u)$, joten D_R on parillinen funktio. Otetaan nyt käyttöön säde $r > 0$, jolle Dinin ehto pätee, ja jaetaan integraali vastaavan välin avulla kahteen osaan:

$$\begin{aligned} I_R &= (D_R * f)(x_0) = (f * D_R)(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x_0 - x) D_R(x) \\ &= \int_{|x|>r} dx f(x_0 - x) D_R(x) + \int_{|x|\leq r} dx f(x_0 - x) D_R(x). \end{aligned}$$

Tässä ensimmäinen termi voidaan kirjoittaa uudelleen käyttäen funktiota $h(x) := \mathbb{1}_{\{|x|>r\}} \frac{1}{\pi x} f(x_0 - x)$, jolle pätee

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx |h(x)| &= \int_{|x|>r} dx \frac{1}{\pi|x|} |f(x_0 - x)| \leq \frac{1}{\pi r} \int_{|x|>r} dx |f(x_0 - x)| \\ &\leq \frac{1}{\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x_0 - x)| = \frac{1}{\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} dy |f(y)| < \infty, \end{aligned}$$

sillä f on itseisesti integroituva. Toisaalta

$$\begin{aligned} \int_{|x|>r} dx f(x_0 - x) D_R(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathbb{1}_{\{|x|>r\}} \frac{\sin(Rx)}{\pi x} f(x_0 - x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx h(x) \sin(Rx) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dx h(x) (e^{iRx} - e^{-iRx}) = \frac{1}{2i} (\hat{h}(-R) - \hat{h}(R)) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

sillä h on itseisesti integroituva ja siihen voidaan siten soveltaa Riemannin–Lebesguen lemmaa, eli Lausetta 7.8.

Näin ollen jää tutkittavaksi enää integraali

$$J_R := \int_{|x|\leq r} dx f(x_0 - x) D_R(x) = \int_{|y|\leq r} dy f(x_0 + y) D_R(-y) = \int_{-r}^r dy f(x_0 + y) D_R(y).$$

Ottamalla keskiarvo kaavan vasemmasta ja oikeasta puolesta ei sen arvo muutu, joten käyttäen määritelmää (7.21) saadaan tulos

$$\begin{aligned} J_R &= \frac{1}{2} \int_{-r}^r dy (f(x_0 - y) D_R(y) + f(x_0 + y) D_R(y)) \\ &= \int_{-r}^r dy D_R(y) \frac{f(x_0 - y) + f(x_0 + y)}{2} = \int_{-r}^r dy D_R(y) \frac{2y\Phi(y; x_0) + f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} \\ &= \int_{-r}^r dy D_R(y) y\Phi(y; x_0) + \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} \int_{-r}^r dy D_R(y). \end{aligned}$$

Tässä ensimmäinen termi voidaan kirjoittaa funktion $g(y) := \mathbb{1}_{\{|y|\leq r\}} \Phi(y; x_0)$ Fourier'n muunnoksen avulla:

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r dy D_R(y) y\Phi(y; x_0) &= \int_{-r}^r dy \frac{\sin(Ry)}{\pi} \Phi(y; x_0) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^r dy (e^{iRy} - e^{-iRy}) \Phi(y; x_0) = \frac{1}{2\pi i} (\hat{g}(-R) - \hat{g}(R)) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

sillä oletuksesta (7.22) seuraa, että $\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy = \int_{-r}^r dy |\Phi(y; x_0)| < \infty$, joten myös funktioon g voi soveltaa Riemannin–Lebesguen lemmaa.

Viimeisen funktiosta f riippumattoman integraalin laskemiseksi sievennetään se ensin käyttäen funktion D_R parillisuutta muotoon

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r dy D_R(y) &= 2 \int_0^r dy D_R(y) = 2 \int_0^r dy \frac{\sin(Ry)}{\pi y} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{rR} dx \frac{1}{R} \frac{\sin x}{x/R} = \frac{2}{\pi} \int_0^{rR} dx \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

Merkitään $M := rR$, jolle $M \rightarrow \infty$, kun $R \rightarrow \infty$. Poistetaan origo jäljelle jääneestä integraalista ja sen jälkeen sievennetään tulos jo aiemmin tutkittuun muotoon huomaamalla, että kun $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^M dx \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{2i} \int_{\varepsilon}^M dx \frac{1}{x} (e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i} \left(\int_{\varepsilon}^M dx \frac{e^{ix}}{x} - \int_{-M}^{-\varepsilon} dy \frac{e^{iy}}{-y} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq M} dx \frac{e^{ix}}{x}. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{rR} dx \frac{\sin x}{x} = \lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq M} dx \frac{e^{ix}}{x} = \frac{1}{2i} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{x} dx.$$

Tämä viimeinen pääarvointegraali on laskettu Esimerkissä 3.27, joten nähdään, että

$$\int_{-r}^r dy D_R(y) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{2i} i\pi = 1.$$

Kaikki yllä johdetut raja-arvot yhdistäen saadaan

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} J_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} \int_{-r}^r dy D_R(y) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}.$$

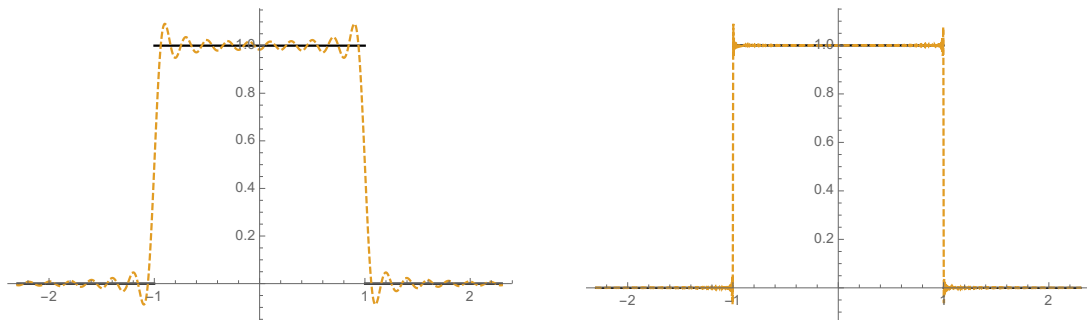
Tämä on juuri haluttu tulos (7.23). □

Yllä nähtiin, että käännteismuunnoskaava voidaan ymmärtää myös konvoluution rajana, sillä $I_R = (f * D_R)(x_0)$. Tässä esiintyvä funktio $D_R(y) = \frac{\sin(Ry)}{\pi y}$ on vahvasti oskilloiva, kun $R \gg 1$. Ei siis ole kovin yllättävää, että myös käännteismuunnoksessa voi esiintyä suuria heilahteluja, ja näin käykin erityisesti silloin, kun x_0 on funktion f epäjatkuvuuspiste. Tämä tunnetaan ns. **Gibbsin ilmiönä**.

Esimerkki 7.22 Tutkitaan numeerisesti käännteismuunnoskaavan suppenemista karakteristiselle funktiolle $f(x) = \mathbb{1}_{\{-1 < x < 1\}}$. Kuten aiemmin mainittiin, toteuttaa tämä funktio Dinin ehdon, ja siihen voi soveltaa Lausetta 7.20. Koska $f(x)$ on jatkuva pisteitä $x = \pm 1$ lukuun ottamatta, käännteismuunnoskaavasta saadaan siis tulokseksi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipx} \frac{dp}{2\pi} = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } |x| = 1, \\ 0, & \text{kun } |x| > 1. \end{cases}$$

Kuvassa 7.1 on näytetty, miten funktio $I_R(x_0) = (f * D_R)(x)$ käyttäytyy integrointirajan R eri arvoilla. Huomataan, että epäjatkuvuuspisteiden ympäristössä oskillaatiot vain voimistuvat, kun R kasvaa. Lisäksi nähdään, että suppeneminen ei myöskään ole tasaista näiden pisteiden ympäristössä, vaan aina löytyy jokin kohta, jossa virhe säilyy suurena.



Kuva 7.1: Esimerkin 7.22 funktion käänteismuunnoksen konvoluutioaprosimaation $I_R = f * D_R$ kuvaajat kahdella eri R :n arvolla (*katkoviiva*), sekä alkuperäisen funktion f kuvaaja (*musta viiva*): (*vasen kuva*) $R = 32$, (*oikea kuva*) $R = 1000$. Gibbsin ilmiö konvergenssin epätasaisuudesta näkyy selvästi epäjatkuvuusasteissa $x = \pm 1$.

Luku 8

Laplacen ja Mellinin muunnokset

Kuten Esimerkin 7.5 jälkeen mainittiin, ei eksponentiaalisesti kasvavista funktioista voi järkevästi suoraan ottaa Fourier'n muunnosta. Samoin tietyissä tilanteissa, joissa esiintyy potenssifunktion tapaista asymptootista käytöstä äärettömyydessä, voi olla parempi vaihtaa funktion esittämistä varten integraalimuunnoksen määritelmää. Näistä eksponentiaalisen kasvun mahdollistaminen johtaa luonnollisesti tässä luvussa käsiteltävään Laplacen muunnokseen ja toinen potenssifunktiota-paus Mellinin muunnokseen, jota käsitellään lyhyesti luvun lopussa.

8.1 (Lisä) Kaksipuolinen Laplacen muunnos ja Fourier'n muunnoksen analyttinen jatkaminen

Fourier'n muunnoksen yleistäminen eksponentiaalisesti kasvaville funktioille onnistuu helposti sen analyttistä jatketta käyttämällä, kunhan funktio on kasvava vain toiseen suuntaan, esimerkiksi kun $x \rightarrow \infty$, ja se vähenee vastakkaiseen suuntaan ($x \rightarrow -\infty$) tätä kasvua nopeammin. Oletetaan, että löytyy reaali-luvut a, b , joille $a < b$, ja pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma x} |f(x)| dx < \infty, \quad a < \sigma < b.$$

Tällöin funktion Fourier'n muunnoksen määrittelevä integraali suppenee myös reaaliakselin ympäristössä: kun z on kompleksiluku, jolle $a < -\operatorname{Im} z < b$, voidaan määritellä

$$\hat{f}(z) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} f(x) dx.$$

Kun merkitään $\alpha := \operatorname{Re} z$, $\beta := \operatorname{Im} z$, on $z = \alpha + i\beta$, joten $e^{-izx} = e^{-i\alpha x} e^{\beta x}$ ja $|e^{-izx}| = e^{\beta x} = e^{-(\beta)x}$. Näin ollen yllä oleva integraali suppenee oletuksen mukaan itseisesti arvoille $a < -\beta < b$.

Näistä oletuksista seuraa itse asiassa, että \hat{f} on jopa analyttinen kompleksitason alueessa $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \mid a < -\operatorname{Im} z < b\}$. Tarkistetaan tämä Lausetta 5.4 käyttäen: Olkoon D jokin suljettu kiekko nauhassa Ω . Tällöin löytyy $\varepsilon > 0$, jolla $a + \varepsilon \leq -\operatorname{Im} z \leq b - \varepsilon$ kaikilla $z \in D$ (ε on esimerkiksi kiekon etäisyys nauhan reunasta). Näin ollen, kun $z \in D$, pätee estimaatti

$$|e^{-izx} f(x)| = e^{x \operatorname{Im} z} |f(x)| \leq M(x) := \begin{cases} e^{-(a+\varepsilon)x} |f(x)|, & \text{kun } x \geq 0, \\ e^{-(b-\varepsilon)x} |f(x)|, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Koska $M(x) \leq (e^{-(a+\varepsilon)x} + e^{-(b-\varepsilon)x}) |f(x)|$, jossa $a < a + \varepsilon < b - \varepsilon < b$, integroituvuusoletuksesta seuraa, että $\int_{-\infty}^{\infty} M(x) dx < \infty$. Koska $z \mapsto e^{-izx} f(x)$ on analyttinen funktio kaikilla x , säilyttää parametrin x yli integrointi Lauseen 5.4 perusteella analyttisyyden, eli funktio \hat{f} on analyttinen koko nauhassa Ω .

Yllä oletettiin, että funktio $h(x) := e^{-\sigma x} f(x)$ on itseisesti integroitava kaikilla $a < \sigma < b$. Käänteismuunnoskaavaa varten oletetaan nyt sen sijaan, että se neliöintegroituva, eli $h \in L^2(\mathbb{R})$. Tällöin sen Fourier'n muunnos arvolla $p \in \mathbb{R}$ on

$$\widehat{h}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx} e^{-\sigma x} f(x) dx = \widehat{f}(p - i\sigma),$$

ja käänteismuunnoskaavan mukaan pätee lisäksi melkein kaikilla x

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \widehat{h}(p) \frac{dp}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \widehat{f}(p - i\sigma) \frac{dp}{2\pi}.$$

Koska $h(x) = e^{-\sigma x} f(x)$, saadaan tästä myös esitys funktion f arvolle pisteessä x ,

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\sigma x} h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+ip)x} \widehat{f}(p - i\sigma) \frac{dp}{2\pi} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma+ip)x} \widehat{f}(-i(\sigma+ip)) \frac{dp}{2\pi} = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\gamma_M} e^{sx} \widehat{f}(-is) \frac{ds}{2\pi i}, \end{aligned}$$

jossa $\gamma_M(p) = \sigma + ip$, $p \in [-M, M]$, on polku joka kulkee suoraa pitkin pisteestä $\sigma - iM$ pisteeseen $\sigma + iM$. Saatiin siis käänteismuunnoskaava, joka pätee myös joillekin eksponentiaalisesti kasvaville funktioille, funktiota $F(s) := \widehat{f}(-is) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$ käyttäen.

Yhteenvetona yllä olevista tuloksista saadaan siis seuraava lause.

Lause 8.1 Oletetaan, että $a < b$ on annettu, ja pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\sigma x} |f(x)|^2 dx < \infty, \quad \text{kaikilla } a < \sigma < b. \quad (8.1)$$

Tällöin voidaan määritellä funktion f **kaksipuolinen Laplacen muunnos** $F = \mathcal{B}f$ kompleksiluvuille s (pääarvo)integraalina

$$F(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx, \quad a < \operatorname{Re} s < b. \quad (8.2)$$

Funktion f arvot saadaan esitettyä tällöin (melkein) kaikilla $x \in \mathbb{R}$ kaavalla

$$f(x) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{sx} F(s) \frac{ds}{2\pi i}, \quad (8.3)$$

jossa $a < \sigma < b$ ja integraalimerkintä tarkoittaa viivaintegraalia polun $\gamma(p) := \sigma + ip$, $p \in \mathbb{R}$, yli.

Jos lisäksi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma x} |f(x)| dx < \infty, \quad a < \sigma < b, \quad (8.4)$$

on kaksipuolinen Laplacen muunnos $F(s)$ analyyttinen funktio yllä määritellyssä alueessa, eli kun $a < \operatorname{Re} s < b$.

Huomautus 8.2

- Yllä oleva tulos pätee myös, kun $a = -\infty$ tai $b = \infty$. Erityisesti, jos f on jatkuva funktio, joka on nolla jonkin äärellisen välin ulkopuolella, pätevät oletukset (8.1) ja (8.4) kaikilla $\sigma \in \mathbb{R}$, eli tällöin voidaan käyttää tulosta valiten $a = -\infty$ ja $b = \infty$.
- Funktion f kaksipuolisesta Laplacen muunnoksesta voidaan käyttää myös merkintöjä $\mathcal{B}f$ tai $\mathcal{B}[f]$, jotka juontavat juurensa vastaavaan englanninkieliseen termiin, *bilateral Laplace transform*, ks. Wikipedia (https://en.wikipedia.org/wiki/Two-sided_Laplace_transform).

- Lauseessa esiintyvä ehto $a < \operatorname{Re} s < b$ vastaa luvun alun ehtoa $a < -\operatorname{Im} z < b$, sillä Laplacen muunnoksen muuttujaksi on valittu $s = -iz$, jolloin $\operatorname{Re} s = -\operatorname{Im} z$.
- Lauseen molemmat oletukset toteutuvat esimerkiksi funktioille

$$g(x) := \mathbb{1}_{\{x>0\}}e^{ax}, \quad \text{ja} \quad f(x) := \begin{cases} e^{ax}, & \text{kun } x \geq 0, \\ e^{-b|x|}, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Funktiolle g pätee $\int_{-M}^M e^{-n\sigma x} |g(x)|^n dx = \int_0^M e^{n(a-\sigma)x} dx$, joten molemmat integraaleista (8.1) ja (8.4) suppenevat kaikilla $\sigma > a$. Tässä tapauksessa voidaan siis valita $b = \infty$ ja käyttää määritelmän parametria a myös Lauseessa 8.1. Vastaavasti nähdään, että funktiolle f nämä integraalit suppenevat, kun $a < \sigma < b$, joten funktion määritelmän molempia parametreja voi käyttää sellaisenaan Lauseen oletuksissa.

- (MAT) Jos funktion f jatkuvuudesta ei tehdä mitään lisäoletuksia, käänteismuunnoskaava pätee samoin rajoituksin kuin L^2 -avaruuden Fourier'n muunnokselle: integraali suppenee varmasti ainoastaan funktionormissa, kun se lasketaan käyttäen polkuja $\gamma_M(p) = \sigma + ip$, $p \in [-M, M]$, ja lopussa otetaan $M \rightarrow \infty$. Tällöin löytyy kuitenkin aina myös jokin jono luonnollisia lukuja $M_n \rightarrow \infty$, jolla käänteiskaava toimii melkein kaikissa pisteissä x , eli $f(x)$ saadaan polkujen γ_{M_n} yli otetuista integraaleista rajalla $n \rightarrow \infty$.

8.2 Laplacen muunnos

Funktion $f(t)$, $t \geq 0$, Laplacen muunnos $\mathcal{L}f$ määritellään sen nollajatkkeen kaksipuolisena Laplacen muunnoksena, eli $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{B}[g](s)$, kun määritellään

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{kun } x \geq 0, \\ 0, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Tästä saadaan Lauseen 8.1 avulla seuraava tulos.

Lause 8.3 *Olkoon $f(t)$, $t \geq 0$, annettu ja löytyy reaaliluku a , jota käyttäen seuraavat integraalit suppenevat*

$$\int_0^\infty e^{-at} |f(t)| dt, \quad \int_0^\infty e^{-2at} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (8.5)$$

Tällöin voidaan määritellä funktion f **Laplacen muunnos** $F = \mathcal{L}f$ kompleksiluvuille s integraalilla

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} s > a. \quad (8.6)$$

Funktio $F(s)$ on **analyttinen koko puolitasossa** $\operatorname{Re} s > a$, ja funktion f arvot saadaan esitettyä sen avulla (melkein) kaikilla $t \geq 0$ kaavalla

$$f(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{ts} F(s) \frac{ds}{2\pi i}, \quad (8.7)$$

jossa $\sigma > a$ ja integraali tarkoittaa pääarvoa polun $\gamma(p) := \sigma + ip$, $p \in \mathbb{R}$, yli.

TODISTUS Tulos seuraa soveltamalla Lausetta 8.1 yllä määriteltyyn nollajatkkeeseen g . Tällöin oletuksesta (8.5) seuraa, että integraaliehtot (8.1) ja (8.4) toteutuvat kaikilla $\sigma > a$, sillä tällöin pätee $e^{-\sigma x} \leq e^{-ax}$ kaikilla $x \geq 0$. Lauseessa voidaan siis valita $b = \infty$. \square

Huomautus 8.4

- Koska käänteismuunnoskaava (8.3) esittää itseasiassa funktiota g , pätee sille melkein kaikilla $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{ts} F(s) \frac{ds}{2\pi i} = \begin{cases} f(t), & \text{kun } t \geq 0, \\ 0, & \text{kun } t < 0. \end{cases}$$

- Ei ole vahinko, että tässä on vaihdettu funktion muuttujan nimi t :ksi, sillä Laplacen muunnosta käytetään fysiikassa usein juuri *ajan* suhteen otettuna. Muistetaan, että Fourier'n muunnos tyypillisesti vaatii, että funktio häviää äärettömyydessä. Toisaalta taas fysikaalisesti mielenkiintoiset suureet ovat sellaisia, jotka lähestyvät jotain vakiota tai jäävät oskilloimaan, kun $t \rightarrow \infty$, eli niille pätee tällöin pelkästään $O(1)$. Fourier'n muunnoksen ottaminen tällaisesta funktiosta tuottaa pahoja singulariteetteja, tyypillisesti distribuutioita. Sen sijaan niin kauan, kun ollaan varmoja, että tutkittava suure säilyy eksponentiaalisesti rajoitettuna äärettömyydessä, eli jos se rajoitettu jokaisella suljetulla välillä ja $O(e^{bt})$, kun $t \rightarrow \infty$, toteuttaa se Lauseen 8.3 ehdot millä tahansa vakiolla $a > b$. Näin ollen ajan suhteen otettu Laplacen muunnos onkin hyvin määritelty ja alkuperäinen funktio voidaan esittää sen käänteismuunnoskaavan avulla.
- Lisätietoja löytyy esimerkiksi Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform).

Laplacen muunnoksen analytyttöisyys on usein oleellista käänteismuunnoskaavan integraalia laskettaessa. Usein Laplacen muunnosta käytetäänkin seuraavaa algoritmia seuraamalla:

1. Etsitään (tai tiedetään esimerkiksi fysikaalisiin perusteisiin) vakio $a \in \mathbb{R}$, joka rajoittaa funktion f käytöstä äärettömässä siten, että oletukset (8.5) toteutuvat.
2. Tällöin Laplacen muunnos $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$ on määritelty ja analyttinen, kun $\operatorname{Re} s > a$. Oletetaan, että $F(s)$ on tunnettu jollain tuon alueen välillä, esimerkiksi reaalilla arvoilla $s > a$. Nämä arvot saadaan esimerkiksi differentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa usein suoraan esitettyä jonain rationaalifunktiona, jonka parametrit riippuvat alkutilasta. *Tässä vaiheessa on hyvä huomata, esimerkiksi muuttujanvaihtoja varten, että voi huoletta olettaa parametrin s olevan positiivinen.*
3. Etsitään saadun funktion F analyttinen jatke mahdollisimman suureen kompleksitason alueeseen Ω . Yllä olevan perusteella tiedetään, että Ω sisältää ainakin kaikki arvot s , joille $\operatorname{Re} s > a$, mutta se voi olla myös huomattavasti suurempi. Esimerkiksi, jos F on rationaalifunktio, voi alueeksi Ω valita koko kompleksitason, josta on poistettu funktion F nimittäjän nollakohdat.
4. Lähdetään liikkeelle käänteismuunnoskaavasta käyttäen polkua $\gamma_M(p) = \sigma - ip$, jossa $\sigma > a$, $M \gg 1$, ja $p \in [-M, M]$. Pyritään siirtämään polku mahdollisimman kauas vasemmalle Cauchyn lausetta tai residylausetta käyttäen. Tämän voi tehdä esimerkiksi neliön muotoisia suljettuja polkuja käyttäen, jotka kulkevat janoja pitkin seuraavien pisteiden kautta: $\sigma - iM \rightarrow \sigma + iM \rightarrow \sigma' + iM \rightarrow \sigma' - iM \rightarrow \sigma - iM$, jossa $\sigma' < \sigma$. *Tässä vaiheessa kannattaa käyttää koko analytyttöisyysaluetta Ω , eikä pelkästään alkuperäistä F :n määrittelyaluetta $\operatorname{Re} s > a$.*
5. Polun siirtämistä vasemmalle motivoi seuraava käänteismuunnoskaavan integrandin ominaisuus: koska $|e^{ts}| = e^{t \operatorname{Re} s} = e^{t\sigma}$, tulee integraalista arvoilla $\sigma < 0$ rajan $M \rightarrow \infty$ jälkeenkin tyypillisesti termi, joka häviää eksponentiaalisesti, kun $t \rightarrow \infty$. Jos tässä voi ottaa rajan $\sigma \rightarrow -\infty$, häviää termi kokonaan, ja käänteismuunnoksen voi laskea suoraan residylausetta soveltamalla.

Esimerkki 8.5 Lasketaan Laplacen muunnos $\mathcal{L}f$, kun $f(t) = e^{ct}$ ja $c \in \mathbb{C}$ on annettu. Tutkitaan myös sen käänteismuunnoskaavan suppenemistä.

Ratkaisu: Kun $s, w \in \mathbb{C}$ ja $n = 1, 2$, pätee

$$\int_0^M e^{-nst} e^{nwt} dt = \int_0^M e^{n(w-s)t} dt = \int_0^M \frac{1}{n(w-s)} e^{n(w-s)t} dt = \frac{1}{n(s-w)} \left(1 - e^{(w-s)nM}\right),$$

joten integraali suppenee, kun $M \rightarrow \infty$, jos ja vain jos $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} w$. Koska $|f(t)| = e^{t \operatorname{Re} c}$, seuraa tästä, että ehdot (8.5) toteutuvat, jos valitaan jokin $a > \operatorname{Re} c$. Olkoon siis $a = \operatorname{Re} c + \varepsilon$, jollakin $\varepsilon > 0$.

Kun nyt $\operatorname{Re} s > a$, saadaan yllä olevasta laskusta sijoittamalla $n = 1$ ja $w = c$ Laplacen muunnoksen $F = \mathcal{L}f$ arvoksi

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} dt = \frac{1}{s-c}.$$

F on siis rationaalifunktio, jolla on tasan yksi erikoispiste kompleksitasossa, ensimmäisen kertaluvun napa pisteessä $s = c$. Voidaan siis valita $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{c\}$.

Käänteismuunnosta varten valitaan tämän jälkeen jokin $\sigma > a$, jolloin $\sigma > \operatorname{Re} c$. Tavoitteena on laskea raja-arvo $I(t) := \lim_{M \rightarrow \infty} I_M(t)$, kun $t \in \mathbb{R}$ ja

$$I_M(t) := \int_{\sigma-iM}^{\sigma+iM} e^{ts} F(s) \frac{ds}{2\pi i} = \int_{\sigma-iM}^{\sigma+iM} e^{ts} \frac{1}{s-c} \frac{ds}{2\pi i}.$$

Tässä käytetään siis viivaintegraalia polun $\gamma_1 := \gamma_{\sigma-iM \rightarrow \sigma+iM}$ yli.

Oletetaan ensin, että $t > 0$. Täydennetään tällöin γ_1 suljetuksi polun lisäämällä siihen polku $\gamma_2(\phi) := \sigma + iM e^{i\phi}$, $\phi \in [0, \pi]$. Tällöin $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$ on selvästi suljettu polku, ja kaikilla tarpeeksi suurilla M , se sisältyy kokonaan analytyysisuusalueeseen Ω ja kiertää kerran navan $s = c$ ympäri positiiviseen kiertosuuntaan (ks. Kuva 8.1). Näin ollen residylauseesta saadaan kaikille tarpeeksi suurille M arvoksi

$$\int_\gamma e^{ts} \frac{1}{s-c} \frac{ds}{2\pi i} = \operatorname{Res}\left(e^{ts} \frac{1}{s-c}, s=c\right) = \lim_{s \rightarrow c} \left[(s-c) e^{ts} \frac{1}{s-c} \right] = \lim_{s \rightarrow c} e^{ts} = e^{tc}.$$

Toisaalta

$$\int_\gamma e^{ts} \frac{1}{s-c} \frac{ds}{2\pi i} = I_M(t) + \int_{\gamma_2} e^{ts} \frac{1}{s-c} \frac{ds}{2\pi i}.$$

Tehdään integraaliin polun γ_2 yli ”muuttajanvaihto“ $z = -i(s - \sigma)$, jonka näkee toimivan juuri niin kuin odottaisikin kirjoittamalla auki molempien käyräintegraalien parametrisoinnit:

$$\int_{\gamma_2} e^{ts} \frac{1}{s-c} \frac{ds}{2\pi i} = \int_0^\pi e^{t(\sigma + iM e^{i\phi})} \frac{1}{\sigma + iM e^{i\phi} - c} \frac{1}{iM e^{i\phi}} i d\phi = \int_{\gamma_M^\wedge} e^{t(\sigma + iz)} \frac{1}{\sigma + iz - c} \frac{dz}{2\pi}.$$

Jäljelle jää viivaintegraali ylätasen ympyränkaaren yli, eli käyrää $\gamma_M^\wedge(\phi) = M e^{i\phi}$, $\phi \in [0, \pi]$, pitkin. Koska $t > 0$, voidaan tähän soveltaa suoraan Jordanin lemmaa, sillä kun $z = M e^{i\phi}$, on kolmioepäytälön perusteella

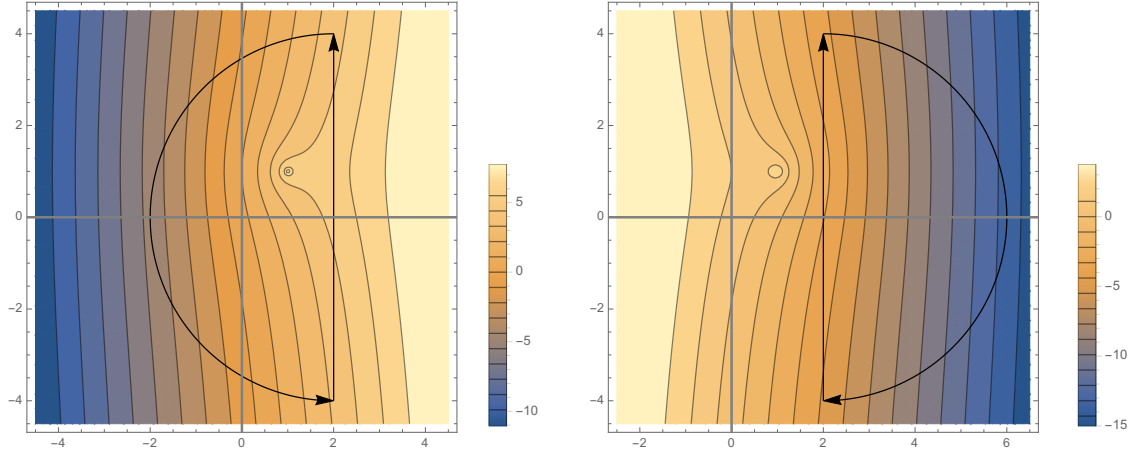
$$\left| \frac{1}{iz + \sigma - c} \right| = \frac{1}{|iz + \sigma - c|} \leq \frac{1}{||z| - |\sigma - c||} = \frac{1}{|M - |\sigma - c||} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0.$$

Näin ollen Lauseen 3.26 mukaan

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} e^{ts} \frac{1}{s-c} \frac{ds}{2\pi i} = \frac{e^{t\sigma}}{2\pi} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\gamma_M^\wedge} \frac{e^{itz}}{\sigma + iz - c} dz = 0,$$

joten ollaan todistettu, että

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I_M(t) = e^{tc}, \quad \text{kun } t > 0.$$



Kuva 8.1: Esimerkin 8.5 integrointipolut, sekä niiden sijainti napapisteeseen c nähden. Kuvat on piirretty parametreilla $c = 1 + i$, $M = 4$ ja $\sigma = 2$, jolloin $\sigma > 1 = \operatorname{Re} c$, ja taustalla on integrandin modulin logaritmin korkeuskäyräkuvaaja. (Vasen kuva) $t = 2 > 0$ ja vastaava integrointipolku $\gamma_1 + \gamma_2$. (Oikea kuva) $t = -2 < 0$ ja vastaava integrointipolku $\gamma_1 + \gamma_3$

Kun $t < 0$, voidaan edetä kuten edellä, paitsi nyt Jordanin lemmaa varten täytyy suljetuksi poluksi valita $\gamma := \gamma_1 + \gamma_3$, eli lisätä käyrän $\gamma_3(\phi) := \sigma - iMe^{i\phi}$, $\phi \in [0, \pi]$, käänteispolku. Tämä vastaa alkuperäisen integrointipolun oikealla puolella kulkevaa ympyränkaarta (onhan $\operatorname{Re} \gamma_3(\phi) = \sigma + M \sin \phi \geq \sigma$), joten sen sisään ei jää yhtään erikoispistettä. Residyauseen ja Jordanin lemma perusteella (käytetään nyt muuttujanvaihtoa $z = i(s - \sigma)$) saadaan tällöin

$$\lim_{M \rightarrow \infty} I_M(t) = 0, \quad \text{kun } t < 0.$$

Tutkitaan vielä myös arvo $t = 0$ huolellisesti. Koska $\frac{d}{ds} \overline{\ln}(s - c) = \frac{1}{s - c}$, saadaan

$$\begin{aligned} I_M(0) &= \int_{\sigma - iM}^{\sigma + iM} \frac{1}{s - c} \frac{ds}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - iM}^{\sigma + iM} \overline{\ln}(s - c) = \frac{1}{2\pi i} (\overline{\ln}(\sigma - c + iM) - \overline{\ln}(\sigma - c - iM)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} (\ln |\sigma - c + iM| - \ln |\sigma - c - iM| + i [\operatorname{Arg}(\sigma - c + iM) - \operatorname{Arg}(\sigma - c - iM)]) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\ln \left| \frac{\sigma - c + iM}{\sigma - c - iM} \right| + i \left[\operatorname{Arg} \left(\frac{\sigma - c}{M} + i \right) - \operatorname{Arg} \left(\frac{\sigma - c}{M} - i \right) \right] \right). \\ &\xrightarrow{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\ln 1 + i \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Yhteenvetona käänteismuunnoskaavasta ollaan yllä laskettu pisteittäiset arvot, jotka pätevät aina, kun $\sigma > \operatorname{Re} c$,

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{ts} \frac{1}{s - c} \frac{ds}{2\pi i} = \begin{cases} e^{ct}, & \text{kun } t > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } t = 0, \\ 0, & \text{kun } t < 0. \end{cases}$$

Tulos oli siis odotettu nollajatkkeen käänteismuunnos. Huomataan, että jopa arvolla $t = 0$ kaikki meni edellä kerrotun mukaisesti, sillä saatu integraalin arvo on keskiarvo nollajatkkeen vasemmasta raja-arvosta, joka on 0, ja sen oikeasta raja-arvosta, joka on $e^0 = 1$.

Huomautus 8.6 Yllä on siis laskettu sekä vakiofunktion ($c = 0$), että eksponenttifunktioiden

Laplacen muunnokset,

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}, \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}[e^{ct}](s) = \frac{1}{s-c}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Lisäksi nähtiin, että käänteismuunnoskaava piti niille paikkaansa pisteittäin, kun $t > 0$.

Esimerkki 8.7 Millä $c \in \mathbb{C}$ potenssifunktion $f(t) = t^c$, $t > 0$, Laplacen muunnos suppenee itseisesti ja minkä funktion se tällöin tuottaa?

Ratkaisu: Tässä siis $t^c = \exp(c \ln t)$, $t > 0$, joten $|f(t)| = e^{\operatorname{Re} c \ln t} = t^{\operatorname{Re} c}$. Näin ollen $\int_0^\infty |f(t)|e^{-at} dt < \infty$ tasan silloin, kun $a > 0$ (vaaditaan suppenemiseen suurilla t) ja $\operatorname{Re} c > -1$ (vaaditaan suppenemiseen kun $t \approx 0$). Oletetaan siis, että $\operatorname{Re} c > -1$ ja valitaan jokin $a > 0$.

Laplacen muunnoksen $F = \mathcal{L}[f]$ laskemiseksi oletetaan ensin, että $\operatorname{Re} c > -1$, s on reaalinen, ja $s > a > 0$. Tällöin voidaan tehdä reaalinen muuttujanvaihto $r = st$, jolle pätee normaalien logaritmin laskusääntöjen mukaan $\ln t = \ln(r/s) = \ln r - \ln s$. Näin saadaan

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^c dt = \int_0^\infty e^{-r} e^{c(\ln r - \ln s)} \frac{dr}{s} = s^{-(c+1)} \int_0^\infty e^{-r} r^{c+1-1} dr = \Gamma(c+1) s^{-(c+1)},$$

jossa ollaan käytetty Γ -funktion määritelmää argumentille, jolla $\operatorname{Re}(c+1) > 0$. Tämän funktion analyttinen jatke alueeseen $\operatorname{Re} s > a$ saadaan logaritmin päähaaraa käyttäen,

$$F(s) = \Gamma(c+1) \exp(-(c+1) \bar{\ln} s),$$

ja itse asiassa näin saadaan analyttinen jatke koko alueeseen $\Omega := \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Huomataan, että tässä $F(s) = \Gamma(c+1) s^{-(c+1)}$, kun verrataan jatketta yleisen kompleksipotenssin määritelmään.

Vastaus: Kun $\operatorname{Re} c > -1$,

$$\mathcal{L}[t^c](s) = \Gamma(c+1) s^{-(c+1)}.$$

Itse asiassa käänteismuunnoksen integraalin L^2 -suppeneminen vaatisi vähän vahvemman ehdon $\operatorname{Re} c > -\frac{1}{2}$, joka tarvitaan toiseen Lauseen 8.3 ehdoista, eli jotta $\int_0^\infty |t^c|^2 e^{-2at} dt < \infty$. Tässä tapauksessa käy kuitenkin niin, että käänteismuunnos toimii pääarvointegraalina tulkittuna myös arvoilla $-1 < \operatorname{Re} c \leq -\frac{1}{2}$.¹

8.2.1 Laplacen muunnoksen perusominaisuuksia

Laplacen muunnos on lineaarinen

Seuraava tulos nähdään suoraan integraalien perusominaisuuksia käyttäen.

Lause 8.8 Jos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $f(t), g(t)$, $t \geq 0$, toteuttavat Lauseen 8.3 ehdot, myös niiden lineaarikombinaatio $\alpha f + \beta g$ toteuttaa ne ja näiden funktioiden Laplacen muunnokselle pätee $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{L}[f] + \beta \mathcal{L}[g]$.

Laplacen muunnoksen laskemista voi joskus helpottaa esittämällä alkuperäinen funktio summana, jossa ainakin osalla termeistä on tunnettu Laplacen muunnos. Esimerkiksi seuraavassa laskussa pystytään näin suoraan käyttämään edellä johdettuja eksponenttifunktion tunnettuja muunnoksia.

Esimerkki 8.9 Mikä on funktion $f(t) = \sin(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{C}$, Laplacen muunnos?

Ratkaisu: Koska $f(t) = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega t}$ saadaan lineaarisuuden ja Esimerkin 8.5 avulla

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \frac{1}{2i} \mathcal{L}[e^{i\omega t}](s) - \frac{1}{2i} \mathcal{L}[e^{-i\omega t}](s) = \frac{1}{2i} \frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{2i} \frac{1}{s+i\omega} \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega} \right) = \frac{1}{2i} \frac{2i\omega}{(s-i\omega)(s+i\omega)} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

¹(MAT) On olemassa funktioita, jotka eivät ole L^2 -integroituvia, mutta joille silti Fourier'n käänteismuunnos ja siten myös Laplacen käänteismuunnos, toimii pisteittäin. Ks. Wikipedia URL https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform#Laplace_transform ja sen Laplacen muunnos-kohdan viitteitä.

Huomautus 8.10 Vastaavanlaisella laskulla voi laskea myös kosinin Laplacen muunnoksen; näistä saadaan

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}. \quad (8.8)$$

Huomataan, että eksponenttifunktion ja kosinin muunnokset ovat $O(|s|^{-1})$, kun $s \rightarrow \infty$, eivätkä ne ole itseisesti integroituvia. Sen sijaan sinin muunnos on $O(|s|^{-2})$, kun $s \rightarrow \infty$, joka taas tarkoittaa sitä, että se on itseisesti integroituvia. Tämä ero selittyy sillä, että $\sin(\omega t) \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow 0$, joten sen nollajatkke on jatkuva, päinvastoin kuin kosinin ja eksponenttifunktioiden jatkeet.

Derivaatan Laplacen muunnos

Derivaatan Fourier'n muunnos oli yksinkertainen, katsotaan seuraavaksi miten käy Laplacen muunnoksen tapauksessa. Oletetaan siis, että funktio f on derivoituva jokaisella $t > 0$, ja sen derivaatta f' toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot. Olkoon $\operatorname{Re} s > a$, jolloin voidaan osittaisintegroida seuraavaa Laplacen muunnosta kohti rajalla $\varepsilon \rightarrow 0^+$ konvergoivaa integraalia

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-st} f(t) - \int_{\varepsilon}^{\infty} (-s) e^{-st} f(t) dt = -e^{-\varepsilon s} f(\varepsilon) + s \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

sillä ylärajan sijoitustermi häviää.² Ottamalla tässä raja $\varepsilon \rightarrow 0^+$, saadaan siis tulos

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0^+),$$

joka pätee, jos $f'(t)$ löytyy jokaisessa pisteessä $t > 0$ ja saatu funktio toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot.

Huomautus 8.11

- Tässä on korostettu merkinnällä $f(0^+)$ sitä, että tähän otetaan funktiosta f saatu raja-arvo, eikä esimerkiksi sen käänteismuunnoksen tai nollajatkkeen arvoa origossa.
- Jos $f(0) = 0$, pätee Fourier'n muunnosta (7.12) muistuttava yksinkertaisempi tulos $\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s)$.
- Laplacen muunnos on siis erityisen kätevä käyttää, jos pitää ratkaista differentiaaliyhtälöitä pitäen funktion arvo origossa kiinnitettynä, eli esimerkiksi Dirichlet'n reunaehdoilla.

Laplacen muunnoksen derivaatta

Oletetaan, että f toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot. Kuten Lauseen todistuksessa nähtiin, tällöin sen Laplacen muunnos $F = \mathcal{L}[f]$ saadaan integraalista, joka toteuttaa Lauseen 5.4 ehdot, ja siten sillä on derivaatta analytyttisyysalueessa $\operatorname{Re} s > a$, jonka voi laskea integrandia derivoimalla. Tästä seuraa

$$F'(s) = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} (-t) e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}[-t f(t)](s),$$

ja yleisestikin k kertaa derivoimalla saadaan

$$\frac{d^k}{ds^k} \mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[(-t)^k f(t)](s).$$

²(MAT) Oletuksista seuraa, että analyysin peruslausetta voi käyttää derivaatan integroinnissa, eli kaikilla $x \geq 0$ pätee $\int_{\varepsilon}^x f'(t) dt = f(x) - f(\varepsilon)$ (ks. [3, Lause 7.21]). Tästä seuraa yläraja $|f(x)| \leq |f(\varepsilon)| + \int_{\varepsilon}^x e^{\alpha t} e^{-\alpha t} |f'(t)| dt \leq |f(\varepsilon)| + C e^{\alpha x}$, eli $f(x) = O(e^{\alpha x})$, kun $x \rightarrow \infty$. Näin ollen, jos $\operatorname{Re} s > a$, pätee $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$.

Esimerkki 8.12 Mikä on funktion $f(t) = t^n e^{ct}$, $c \in \mathbb{C}$ ja $n \in \mathbb{N}$, Laplacen muunnos?

Ratkaisu: Esimerkin 8.5 mukaan on $\mathcal{L}[e^{ct}](s) = \frac{1}{s-c}$. Tämän derivaatta on siis $-\frac{1}{(s-c)^2} = \mathcal{L}[(-t)e^{ct}](s)$, ja n kertaa iteroimalla saadaan

$$\frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}[e^{ct}](s) = (-1)^n \frac{n!}{(s-c)^{n+1}} = \mathcal{L}[(-t)^n e^{ct}](s).$$

Näin ollen saadaan vastaukseksi lineaarisuutta käyttäen

$$\mathcal{L}[t^n e^{ct}](s) = \frac{n!}{(s-c)^{n+1}}.$$

Kun $c = 0$, saadaan $\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, aivan kuten myös Esimerkistä 8.7 seuraa.

Integraalifunktion Laplacen muunnos

Oletetaan, että f toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot ja muutenkin riittävän säännöllinen, esimerkiksi jatkuva. Tällöin myös sen integraalifunktiolle

$$g(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau,$$

saadaan laskettua Laplacen muunnos funktion f muunnoksen avulla. Koska tällöin $g'(t) = f(t)$ kaikilla $t > 0$, seuraa tästä, että g toteuttaa edellisen kohdan derivaatoille mainitut ehdot, ja siten

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g'](s) = s\mathcal{L}[g](s) - g(0^+) = s\mathcal{L}[g](s).$$

Näin ollen saadaan kaava

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s)}.$$

Laplacen muunnoksen integrointi

Oletetaan, että funktio f toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot ja merkitään $F = \mathcal{L}[f]$. Oletetaan, että G on jokin Laplacen muunnoksen F integraalifunktio, eli oletetaan, että $G(s)$ on analyyttinen alueessa $\operatorname{Re} s > a$ ja $G'(s) = F(s)$ kaikissa tämän alueen pisteissä. Jos tällöin s_1 ja s_2 ovat kaksi tämän alueen pistettä, kuuluu ne yhdistävä polku $\gamma_{s_1 \rightarrow s_2}$ myös kokonaan tähän alueeseen, joten sille pätee lauseen 1.32 mukaan

$$G(s_2) - G(s_1) = \int_{\gamma_{s_1 \rightarrow s_2}} G'(s) ds = \int_{\gamma_{s_1 \rightarrow s_2}} F(s) ds = \int_0^1 F(s_1 + \tau(s_2 - s_1)) (s_2 - s_1) d\tau.$$

Sijoittamalla tähän Laplacen muunnoksen määritelmä ja käyttämällä Fubinin lausetta saadaan

$$\begin{aligned} G(s_2) - G(s_1) &= (s_2 - s_1) \int_0^1 d\tau \int_0^\infty dt e^{-[s_1 + \tau(s_2 - s_1)]t} f(t) \\ &= \int_0^\infty dt e^{-s_1 t} f(t) \int_0^1 d\tau (s_2 - s_1) e^{-\tau(s_2 - s_1)t} = \int_0^\infty dt e^{-s_1 t} f(t) \frac{1}{-t} \Big|_0^1 e^{-\tau(s_2 - s_1)t} \\ &= \int_0^\infty dt f(t) \frac{1}{t} (e^{-s_1 t} - e^{-s_2 t}). \end{aligned}$$

Tästä laskusta saadaan suoraan seuraavat kaksi tulosta.

1. Jos $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$ ja $\operatorname{Re} s > a$ pätee

$$G(s + \alpha) - G(s) = \mathcal{L}[f(t)t^{-1}(1 - e^{-\alpha t})](s).$$

2. Jos funktio f toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot ja lisäksi funktio $f(t)/t$ on itseisesti integroitava välillä $[0, 1]$, sen Laplacen muunnoksen määrittelevä integraali $H(s) := \mathcal{L}[t^{-1}f(t)](s)$ suppenee itseisesti kaikilla $\operatorname{Re} s > a$, ja se saadaan integraalifunktion G avulla vakiota vaille kaavasta

$$H(s) = C - G(s).$$

Vakio C voidaan myös laskea reaaliakselia pitkin otettuna raja-arvona, $C = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$. Lisäksi voidaan tässä tapauksessa ratkaista Laplacen muunnos H myös käyttäen sen analyttistä jatketta reaalisilta arvoilta $r > a$, jotka toteuttavat

$$H(r) = \int_r^{\infty} F(s) ds. \quad (8.9)$$

TODISTUS (MAT) Kohta 1 seuraa suoraan sijoituksella $s_2 = s + \alpha$ ja $s_1 = s$, kun huomataan, että tässä $\operatorname{Re} s_2 = \operatorname{Re} s + \operatorname{Re} \alpha > a$. Kohtaa 2 varten huomataan ensin, että arvoilla $t \geq 1$ voidaan arvioida $|e^{-st}f(t)t^{-1}| \leq e^{-\operatorname{Re} st}|f(t)| \leq e^{-at}|f(t)|$, ja toisaalta kun $0 < t < 1$, on $|e^{-st}f(t)t^{-1}| \leq e^{|\alpha|}|f(t)t^{-1}|$, joten molemmat integraalit ovat itseisesti suppenavia. Lisäksi nämä ylärajat antavat käyttää Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta, kun $s \rightarrow \infty$, joten $H(s) \rightarrow 0$ tällä rajalla. Yllä johdetusta kaavasta seuraa nyt, että $G(R) - G(s) = H(s) - H(R)$ aina, kun $R, \operatorname{Re} s > a$. Voidaan siis määrittellä $C = H(a+1) + G(a+1)$, ja tällöin pätee $H(s) = C - G(s)$ kaikille $\operatorname{Re} s > a$. Lisäksi saadaan tästä myös tulos $G(R) = C - H(R) \rightarrow C$, kun $R \rightarrow \infty$. Jos $r > a$, pätee $H(r) - H(R) = G(R) - G(r) = \int_r^R F(s) ds$, joten ottamalla raja $R \rightarrow \infty$ saadaan myös kaava (8.9). \square

Esimerkki 8.13 Esimerkin 8.5 mukaan on funktion $f(t) = e^{ct}$, $c \in \mathbb{C}$, Laplacen muunnos $F(s) = \mathcal{L}[e^{ct}](s) = \frac{1}{s-c}$. Tämän eräs integraalifunktio saadaan logaritmin päähaaraa käyttäen määrittelemällä $G(s) = \overline{\ln}(s-c)$, sillä tämä funktio on analyttinen arvoilla $\operatorname{Re}(s-c) > 0$, jossa sen derivaatta on juuri $1/(s-c)$. Kohtaa yksi soveltamalla saadaan siis kaikille α , joille $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$, Laplacen muunnos

$$\overline{\ln}(s+\alpha-c) - \overline{\ln}(s-c) = \mathcal{L}[e^{ct}t^{-1}(1-e^{-\alpha t})](s) = \mathcal{L}[t^{-1}(e^{ct} - e^{(c-\alpha)t})](s).$$

Erityisesti, kun valitaan reaaliset eksponentit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, joille $c_1 > c_2$, voidaan tähän kaavaan sijoittaa $c = c_1$, $\alpha = c_1 - c_2$, josta seuraa kaikille reaalisille $s > c_1$

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{c_1 t} - e^{c_2 t}}{t}\right](s) = \overline{\ln}(s+c_1-c_2-c_1) - \overline{\ln}(s-c_1) = \ln(s-c_2) - \ln(s-c_1) = \ln \frac{s-c_2}{s-c_1}.$$

Jos tässä olisi $c_1 < c_2$, voidaan käyttää lineaarisuutta, jonka avulla kaikille $s > c_2$ saadaan

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{c_1 t} - e^{c_2 t}}{t}\right](s) = -\mathcal{L}\left[\frac{e^{c_2 t} - e^{c_1 t}}{t}\right](s) = -\ln \frac{s-c_1}{s-c_2} = \ln \frac{s-c_2}{s-c_1}.$$

Näin ollen analyttisen jatkteen avulla saadaan kaava, joka pätee kaikille reaalisille c_1, c_2 ja kompleksiarvoille s , joille $\operatorname{Re} s > c_1, c_2$,

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{e^{c_1 t} - e^{c_2 t}}{t}\right](s) = \overline{\ln} \frac{s-c_2}{s-c_1}}.$$

8.2.2 ”Viivästyneen” funktion Laplacen muunnos

Mitä tapahtuu Laplacen muunnokselle, jos annettua funktiota $f(t)$, $t \geq 0$, siirretään alkamaan hetkellä $t = \tau > 0$? Tarkemmin, tässä siirretään funktion f nollajatketta, eli määritellään

$$g(t) := \begin{cases} f(t-\tau), & \text{kun } t \geq \tau, \\ 0, & \text{kun } t < \tau. \end{cases}$$

Toisin sanoen $g(t) := f(t - \tau)\mathbb{1}_{\{t \geq \tau\}}$, kun $t \geq 0$. Oletetaan, että f toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot ja $\operatorname{Re} s > a$. Tällöin

$$\mathcal{L}[g](s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt = \int_\tau^\infty e^{-st} f(t - \tau) dt = \int_0^\infty e^{-s(u+\tau)} f(u) du = e^{-\tau s} \mathcal{L}[f](s).$$

(Samanlainen lasku näyttää, että tässä tapauksessa myös g toteuttaa Lauseen ehdot ilman, että a :n arvoa tarvitsee vaihtaa.) Toisin sanoen funktion ”viivästyttäminen” liittyy eksponenttifunktiolla kertomiseen Laplacen muunnoksessa:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t - \tau)\mathbb{1}_{\{t \geq \tau\}}](s) = e^{-\tau s} \mathcal{L}[f](s) \quad \tau \geq 0.}$$

Vastaavasti alkuperäisen funktion kertominen eksponenttifunktiolla vastaa Laplacen muunnoksen argumentin siirtoa: Jos c on kompleksiluku ja $\operatorname{Re} s > a + \operatorname{Re} c$, on myös $\operatorname{Re}(s - c) > a$, joten

$$\mathcal{L}[f](s - c) = \int_0^\infty e^{-(s-c)t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} f(t) dt = \mathcal{L}[e^{ct} f(t)](s). \quad (8.10)$$

Esimerkki 8.14 Tarkastellaan ”portaikkofunktiota”, jonka askelen ”leveys” on $\tau > 0$ ja ”korkeus” $A > 0$, eli funktiota

$$f(t) := \begin{cases} A, & \text{kun } 0 \leq t < \tau, \\ A + A, & \text{kun } \tau \leq t < 2\tau, \\ A + A + A, & \text{kun } 2\tau \leq t < 3\tau, \\ \dots & \dots \end{cases} = A\mathbb{1}_{\{t \geq 0\}} + A\mathbb{1}_{\{t \geq \tau\}} + A\mathbb{1}_{\{t \geq 2\tau\}} + \dots$$

Tämä funktio voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmin sarjana

$$f(t) = A \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{t \geq n\tau\}}.$$

Jos tässä $t \geq 0$ ja $m = \lfloor t/\tau \rfloor$ on luvun t/τ kokonaislukuosa, on $t/\tau < m + 1$, joten $\mathbb{1}_{\{t \geq n\tau\}} = 0$ kaikilla $n > m$. Näin ollen on yllä olevassa sarjassa jokaisessa pisteessä ainoastaan äärellinen määrä nollasta poikkeavia termejä, joten se triviaalisti suppenee itseisesti kaikissa pisteissä ja pätee $|f(t)| \leq A \sum_{n=0}^m 1 = A(m + 1) \leq A(t/\tau + 1)$. Näin ollen $|f(t)|$ on lineaarisesti rajoitettu, ja se toteuttaa Lauseen 8.3 ehdot, kun valitaan jokin $a > 0$.

Tällöin voidaan myös sen Laplacen muunnosta laskiessa vaihtaa integroinnin ja summauksen järjestystä, josta saadaan, kun $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \int_0^\infty dt e^{-st} A \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{t \geq n\tau\}} = A \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty dt e^{-st} \mathbb{1}_{\{t \geq n\tau\}} = A \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\tau}^\infty dt e^{-st} \\ &= A \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\tau}^\infty \frac{1}{-s} e^{-st} = \frac{A}{s} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn\tau} = \frac{A}{s} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-s\tau})^n. \end{aligned}$$

Viimeisessä summassa on $|e^{-s\tau}| = e^{-\tau \operatorname{Re} s} < 1$, sillä $\operatorname{Re} s, \tau > 0$. Näin ollen voidaan käyttää geometrisen sarjan summakaavaa, ja päädytään lopputulokseen

$$\boxed{\mathcal{L}\left[A \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{t \geq n\tau\}}\right](s) = \frac{A}{s} \frac{1}{1 - e^{-s\tau}}, \quad \tau > 0.}$$

8.2.3 Konvoluutio ja Laplacen muunnos

Koska (kaksipuolinen) Laplacen muunnos oli läheistä sukua Fourier'n muunnokselle, ei ehkä tule yllätyksenä, että myös sopivaa muotoa olevilla konvoluutioilla on yksikertainen Laplacen muunnos. Tätä varten on kuitenkin käytettävä kaksipuoliseen muunnokseen sijoitettavia funktioita, eli juuri ”nollajatkkeita”.

Oletetaan siis, että $f_1(t), f_2(t), t \geq 0$, on annettu ja merkitään niiden nollajatkkeita $g_i(x) := \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} f_i(x), i = 1, 2$. Tällöin näiden konvoluution arvo pisteessä $t > 0$ on

$$(g_1 * g_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t-x)g_2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-x)f_2(x)\mathbb{1}_{\{x \leq t\}}\mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}dx = \int_0^t f_1(t-x)f_2(x)dx,$$

ja, kun $t \geq 0$, antaa integraali nollan. Kokeillaan siis, mitä tapahtuu, kun otetaan Laplacen muunnos funktiosta $h(t) := \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$, olettaen, että f_1 ja f_2 toteuttavat Lauseen 8.3 ehdot.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h](s) &= \int_0^{\infty} dt e^{-st} \int_0^{\infty} d\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} f_1(t-\tau) f_2(\tau) = \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} dt e^{-st} \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} f_1(t-\tau) f_2(\tau) \\ &= \int_0^{\infty} d\tau f_2(\tau) \int_{\tau}^{\infty} dt e^{-st} f_1(t-\tau) = \int_0^{\infty} d\tau f_2(\tau) \int_0^{\infty} du e^{-s(u+\tau)} f_1(u) \\ &= \int_0^{\infty} d\tau f_2(\tau) e^{-s\tau} \mathcal{L}[f_1](s) = \mathcal{L}[f_1](s) \mathcal{L}[f_2](s), \end{aligned}$$

ainakin, kun $\operatorname{Re} s > a_1, a_2$, jotta kaikki yllä olevat integraalit suppevat itseisesti ja Fubinin lausetta saa käyttää ensimmäisessä integrointijärjestyksen vaihdossa.

Eli tätä muotoa olevalle konvoluutiolle Laplacen muunnos käyttäytyy aivan kuten Fourier'n muunnoskin,

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right](s) = F_1(s)F_2(s)}, \quad F_i(s) := \mathcal{L}[f_i](s), \quad i = 1, 2.$$

Tulon Laplacen muunnoksesta tuleekin jo vähän hankalammin käytettävä tulos. Merkitään taas $F_1 := \mathcal{L}[f_1], F_2 := \mathcal{L}[f_2]$, ja oletetaan, että a_1 ja a_2 ovat vakiot, joilla f_1 ja f_2 toteuttavat Lauseen 8.3 ehdot.

Oletetaan, että f_2 on niin säännöllinen, että sen Laplacen käänteismuunnoskaava suppee itseisesti. Tällöin, jos $\sigma > a_2$, melkein kaikilla $t > 0$ pätee

$$f_2(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{ts'} F_2(s') \frac{ds'}{2\pi i}.$$

Tämä voidaan sijoittaa tulon $f_1(t)f_2(t)$ Laplacen muunnoksen määritelmään olettaen $\operatorname{Re} s > a_1 + \sigma$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1 f_2](s) &= \int_0^{\infty} dt e^{-st} f_1(t) f_2(t) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} f_1(t) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{ds'}{2\pi i} e^{ts'} F_2(s') \\ &= \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{ds'}{2\pi i} F_2(s') \int_0^{\infty} dt e^{-(s-s')t} f_1(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{ds'}{2\pi i} F_1(s-s') F_2(s'). \end{aligned}$$

Tulon muunnoksesta saadaan siis konvoluutiointegraali, mutta kompleksitason viivaintegraalina. Tässä on myös oleellista, että polun reaaliosa σ on valittu riittävän suureksi ($\sigma > a_2$).

8.2.4 Esimerkkejä Laplacen muunnoksen käytöstä

Taulukossa 8.1 on yhteenveto edellä johdetuista Laplacen muunnoksista ja niiden yleisistä ominaisuuksista. Lisää vastaavanlaisia tuloksia löytyy esimerkiksi Wikipediasta (https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform). Alla on annettu esimerkkejä siitä, miten näitä taulukon tuloksia voi hyödyntää käytännössä. Aloitetaan parista suoraviivaisesta esimerkistä, jossa vältetään integrointi Laplacen muunnosta ja käänteismuunnosta laskettaessa taulukkoa soveltamalla.

Taulukko 8.1: **Yhteenvedo tässä Luvussa johdetuista Laplacen muunnoskaavoista.** Kaavoissa käytetään vasemman puolen funktioiden f, g Laplacen muunnoksista merkintöjä $F = \mathcal{L}[f]$ ja $G = \mathcal{L}[g]$.

Funktio, $t > 0$	Laplacen muunnos, $s \in \mathbb{C}$	Tarkennuksia
1	s^{-1}	
e^{ct}	$\frac{1}{s-c}$	$c \in \mathbb{C}$
t^c	$\Gamma(c+1)s^{-(c+1)}$	$\operatorname{Re} c > -1$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\omega \in \mathbb{C}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\omega \in \mathbb{C}$
$\frac{e^{c_1 t} - e^{c_2 t}}{t}$	$\ln \frac{s-c_2}{s-c_1}$	$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$	$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0^+)$	
$t^k f(t)$	$(-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s)$	$k \in \mathbb{N}$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$	
$t^{-1} f(t)$	$\int_s^\infty F(s') ds'$	$t^{-1} f(t)$ integroituva, $s > 0$
$f(t-\tau) \mathbb{1}_{\{t \geq \tau\}}$	$e^{-\tau s} F(s)$	$\tau \geq 0$
$e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	$c \in \mathbb{C}$
$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{t \geq n\tau\}}$	$\frac{1}{s} \frac{1}{1 - e^{-s\tau}}$	$\tau > 0$
$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$	
$f(t)g(t)$	$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s-s')G(s') \frac{ds'}{2\pi i}$	$\sigma > "a"$ g :lle Lauseessa 8.3

Esimerkki 8.15 Laske funktion $f(t) = e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$ Laplacen muunnos, kun $\omega, \gamma \in \mathbb{C}$.
Ratkaisu: Kaavojen (8.10) ja (8.8) mukaan, kun $\operatorname{Re} s$ on tarpeeksi suuri,

$$\mathcal{L}[e^{-\gamma t} \sin(\omega t)](s) = \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s - (-\gamma)) = \frac{\omega}{(s')^2 + \omega^2} \Big|_{s'=s+\gamma} = \frac{\omega}{(s + \gamma)^2 + \omega^2}.$$

Esimerkki 8.16 Laske funktion $F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2+4}$ Laplacen käänteismuunnos.

Ratkaisu: Havaitaan, että $\frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega^2+s^2} \Big|_{\omega=2} = \frac{1}{2} \mathcal{L}[\sin(2t)](s)$. Näin ollen $F(s) = e^{-3s} \mathcal{L}[\frac{1}{2} \sin(2t)](s)$, joten se on Laplacen muunnos funktiosta $f(t) = \frac{1}{2} \sin(2t)$ ajalla $\tau = 3$ viivästyneenä. Toisin sanoen $F(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, jossa

$$g(t) = \frac{1}{2} \sin(2(t-3)) \mathbb{1}_{\{t \geq 3\}}.$$

Näin ollen funktio $g(t)$ antaa juuri etsityn funktion $F(s)$ Laplacen käänteismuunnoksen.

Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen

Esimerkki 8.17 Olkoon $a, b > 0$ annettu. Ratkaise seuraava **pakotetun värähtelijän** differentiaaliyhtälö,

$$x''(t) + a^2 x(t) = b \sin(at), \quad t > 0, \quad (8.11)$$

reunaehdoilla $x(0) = x_0$ ja $x'(0) = v_0$, jossa vakiot $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$ on annettu.

Ratkaisu: Etsitään säännöllistä ratkaisua $x(t)$, jonka derivaatat x' ja x'' toteuttavat Lauseen 8.3 ehdot. Merkitään x :n Laplacen muunnosta $F(s) = \mathcal{L}[x(t)](s)$. Tällöin sen ensimmäiselle derivaatalle pätee reunaehtojen takia

$$\mathcal{L}[x'](s) = s\mathcal{L}[x](s) - x(0) = sF(s) - x_0,$$

ja toiselle derivaatalle vastaavasti

$$\mathcal{L}[x''](s) = s\mathcal{L}[x'](s) - x'(0) = s(sF(s) - x_0) - v_0 = s^2 F(s) - x_0 s - v_0.$$

Ottamalla Laplacen muunnos yhtälön (8.11) molemmista puolista saadaan sen vasemmasta puolesta

$$\mathcal{L}[x''(t) + a^2 x(t)](s) = \mathcal{L}[x''](s) + a^2 F(s) = (s^2 + a^2)F(s) - x_0 s - v_0,$$

ja Taulukkoa 8.1 hyödyntämällä yhtälön oikea puoli antaa

$$\mathcal{L}[b \sin(at)](s) = b \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

Näin ollen funktion F täytyy toteuttaa (ainakin, kun $\operatorname{Re} s$ on riittävän suuri) yhtälö

$$(s^2 + a^2)F(s) - x_0 s - v_0 = \frac{ab}{s^2 + a^2} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{v_0 + x_0 s}{s^2 + a^2} + \frac{ab}{(s^2 + a^2)^2}.$$

Riittää siis enää etsiä oikean puolen Laplacen käänteismuunnos. Tehdään tämä jakamalla se termeihin, jotka tunnustetaan jonkin jo johdetun funktion Laplacen muunnoksiksi Taulukon 8.1 avulla. Aloitetaan helpoimmasta

$$\frac{v_0}{s^2 + a^2} = \frac{v_0}{a} \frac{a}{s^2 + a^2} = \frac{v_0}{a} \mathcal{L}[\sin(at)](s) = \mathcal{L}\left[\frac{v_0}{a} \sin(at)\right](s).$$

Samalla tavalla huomataan, että

$$\frac{x_0 s}{s^2 + a^2} = x_0 \mathcal{L}[\cos(at)](s) = \mathcal{L}[x_0 \cos(at)](s).$$

Viimeisen termin tunnistaminen on vähän työläämpää. Huomataan kuitenkin, että jos $g(t) = \sin(at)$, on sen Laplacen muunnos $G(s) := \mathcal{L}[f](s) = \frac{a}{s^2+a^2}$, joten konvoluutiokaavan mukaan

$$\frac{a^2}{(s^2+a^2)^2} = G(s)G(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t g(t-\tau)g(\tau)d\tau\right](s).$$

Näin ollen funktion $h(t) = \int_0^t g(t-\tau)g(\tau)d\tau$ avulla pätee

$$\frac{ab}{(s^2+a^2)^2} = \frac{b}{a} \frac{a^2}{(s^2+a^2)^2} = \frac{b}{a} \mathcal{L}[h](s).$$

Käyttämällä trigonometristä summakaavaa $2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ nähdään, että

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t g(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t \sin(at-a\tau)\sin(a\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{2} [\cos(at-a\tau-a\tau) - \cos(at-a\tau+a\tau)] d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t \cos(at-2a\tau)d\tau - \frac{1}{2} \cos(at) \int_0^t 1d\tau \\ &= -\frac{t}{2} \cos(at) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{-2a} \sin(at-2a\tau) = -\frac{t}{2} \cos(at) - \frac{1}{4a} (\sin(-at) - \sin(at)) \\ &= -\frac{t}{2} \cos(at) + \frac{1}{2a} \sin(at). \end{aligned}$$

Yhteenvedon nähdään siis, että $\mathcal{L}[x](s) = \frac{v_0+x_0s}{s^2+a^2} + \frac{ab}{(s^2+a^2)^2}$ käyttäen funktiota

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{a} \sin(at) + x_0 \cos(at) + \frac{b}{a} \left(\frac{1}{2a} \sin(at) - \frac{t}{2} \cos(at) \right) \\ &= \left(\frac{v_0}{a} + \frac{b}{2a^2} \right) \sin(at) + \left(x_0 - \frac{b}{2a} t \right) \cos(at). \end{aligned}$$

Tämän jälkeen onkin suoraviivainen lasku tarkistaa, että näin määritelty funktio toteuttaa halutun differentiaaliyhtälön ja reunaehdot.

Vastaus: Löytyy vain yksi ratkaisu, joka toteuttaa kaikki ehdot:

$$x(t) = \left(\frac{v_0}{a} + \frac{b}{2a^2} \right) \sin(at) + \left(x_0 - \frac{b}{2a} t \right) \cos(at), \quad t \geq 0.$$

Ratkaisussa on ehkä vähän yllättävä lineaarisesti kasvava ja oskilloiva termi $-\frac{b}{2a}t \cos(at)$. Tämä termi liittyy värähtelijän ”pakottamiseen”, jonka voi ajatella lisäävän jatkuvasti värähtelijän ”energiaa”. Jos differentiaaliyhtälön oikean puolen ”pakotusermi” poistetaan sijoittamalla $b=0$, poistuu myös tämä lineaarisesti kasvava termikin ja jäljelle jää tavallinen värähtelijäratkaisu $x(t) = \frac{v_0}{a} \sin(at) + x_0 \cos(at)$.

Integraalin avulla määritellyn funktion laskeminen

Esimerkki 8.18 Esitä seuraava integraalin avulla määritelty funktio alkeisfunktioiden avulla,

$$f(t) := \int_0^\infty \frac{1 - \cos(xt)}{x^2} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ratkaisu: Koska $1 - \cos(xt) \geq 0$, on integrandi positiivinen. Näin ollen voidaan sen Laplacen muunnosta $F = \mathcal{L}[f]$ laskiessa vaihtaa integrointijärjestystä, ainakin kun $s > 0$, josta saadaan

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty dt e^{-st} f(t) = \int_0^\infty dt e^{-st} \int_0^\infty dx \frac{1 - \cos(xt)}{x^2} \\ &= \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2} \int_0^\infty dt e^{-st} (1 - \cos(xt)) = \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2} (\mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[\cos(xt)](s)). \end{aligned}$$

Tässä Taulukosta 8.1 löydetään

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}, \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}[\cos(xt)](s) = \frac{s}{s^2 + x^2}.$$

Näin ollen

$$\mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[\cos(xt)](s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + x^2} = \frac{s^2 + x^2 - s^2}{s(s^2 + x^2)} = \frac{x^2}{s(s^2 + x^2)},$$

joten saadaan

$$F(s) = \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2} \frac{x^2}{s(s^2 + x^2)} = \int_0^\infty dx \frac{1}{s(s^2 + x^2)} \stackrel{x=su}{=} \int_0^\infty du s \frac{1}{s(s^2 + s^2u^2)} = \frac{1}{s^2} \int_0^\infty du \frac{1}{1 + u^2}.$$

Jäljelle jäävän integraali arvo seuraa Esimerkin 3.20 tuloksesta, integrandin parillisuutta käyttäen,

$$\int_0^\infty du \frac{1}{1 + u^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty du \frac{1}{1 + u^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty du \frac{1}{1 + u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Näin ollen $F(s) = \frac{\pi}{2}s^{-2}$, kun $s > 0$, ja joten se pätee myös kaikilla $\operatorname{Re} s > 0$, Laplacen muunnoksen analyttisyyden takia. Tämän jälkeen voidaan turvautua vielä kerran Taulukkoon 8.1, jonka mukaan

$$F(s) = \frac{\pi}{2}s^{-2} = \frac{\pi}{2}\Gamma(2)s^{-2} = \frac{\pi}{2}\mathcal{L}[t](s) = \mathcal{L}\left[\frac{\pi}{2}t\right](s).$$

Tästä seuraa, että melkein kaikilla $t > 0$ pätee

$$f(t) = \frac{\pi}{2}t.$$

Nyt integraalin määräämä funktio on selvästi parillinen $f(-t) = f(t)$, ja se on lisäksi jatkuva.³ Näin ollen $f(t) = \frac{\pi}{2}t$ kaikilla $t \geq 0$, josta seuraa lopulta arvoille $t < 0$ tulos $f(t) = f(-t) = \frac{\pi}{2}(-t) = \frac{\pi}{2}|t|$.

Vastaus: Kaikilla reaalilla t pätee

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos(xt)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}|t|.$$

8.3 (Lisä) Mellinin muunnos

Kuten Esimerkissä 8.7 tehtiin, on kohtuullisen suoraviivaista johtaa potenssifunktiolle $f(t) = t^c$, $\operatorname{Re} c > -1$, sen Laplacen muunnos $\mathcal{L}[t^c](s) = \Gamma(c+1)s^{-(c+1)} = \Gamma(c+1)\exp(-(c+1)\overline{\ln} s)$. Tämänkaltaisen funktion *käänteismuunnoksen* laskeminen on kuitenkin melkoisen työlästä, sillä sen analyttisyyden alueessa on leikkaus negatiivisella reaaliakselilla, ja käänteismuunnosta laskettaessa joudutaankin yleensä turvautumaan Luvun 3.4.6 kaltaisiin tekniikoihin. Jos funktion käytös äärettömyydessä muistuttaa eksponenttifunktion sijaan potenssifunktiota, onkin usein helpompaa käyttää Laplacen muunnoksen sijaan seuraavaksi esiteltävää Mellinin muunnosta (potenssifunktion tapaan häviäviä funktioita tulee vastaan esimerkiksi aineen rakennetta kuvaavissa korrelaatiofunktioissa aineen faasidiagrammin kriittisessä pisteessä). Tällöin käänteismuunnoksen laskeminen voi helpottua merkittävästi, kuten Esimerkissä 8.20 tullaan näkemään.

Funktion $f(t)$, $t > 0$, Mellinin muunnos $\mathcal{M}[f]$ saadaan muuttujanvaihdon $u = -\ln t$ jälkeen otetusta *kaksipuolisesta* Laplacen muunnoksesta. Tarkemmin, jos $g(u) := f(e^{-u})$, $u \in \mathbb{R}$, ja se toteuttaa Lauseen 8.1 ehdot joillain vakioilla a, b , saadaan sen kaksipuolisesta Laplacen muunnoksesta, olettaen $a < \operatorname{Re} s < b$,

$$\mathcal{B}[g](s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-su} g(u) du = \int_{-\infty}^\infty e^{-su} f(e^{-u}) du = \int_0^\infty e^{s \ln t} f(t) t^{-1} dt = \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt =: \mathcal{M}[f](s).$$

³(MAT) Tämän näkee esimerkiksi Lebesguen dominoitujen konvergenssin lausetta käyttäen.

Lisäksi käänteismuunnoskaava antaa tällöin, kun $t > 0$ ja $a < \sigma < b$,

$$f(t) = g(-\ln t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{s(-\ln t)} \mathcal{B}[g](s) \frac{ds}{2\pi i} = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s} \mathcal{M}[f](s) \frac{ds}{2\pi i}.$$

Lauseen 8.1 seurauksena nähdään siis suoraan seuraava tulos Mellinin muunnokselle:

Lause 8.19 *Oletetaan, että $a < b$ on annettu, ja pätee*

$$\int_0^\infty t^{2\sigma-1} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad \text{kaikilla } a < \sigma < b. \quad (8.12)$$

Tällöin voidaan määritellä funktion f **Mellinin muunnos** $F = \mathcal{M}f$ (pääarvo) integraalina

$$F(s) := \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt, \quad a < \operatorname{Re} s < b. \quad (8.13)$$

Funktion f arvot saadaan esitettyä tällöin (melkein) kaikilla $t > 0$ integraalilla

$$f(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s} F(s) \frac{ds}{2\pi i}, \quad a < \sigma < b. \quad (8.14)$$

Jos lisäksi

$$\int_0^\infty t^{\sigma-1} |f(t)| dt < \infty, \quad a < \sigma < b, \quad (8.15)$$

on Mellinin muunnos $F(s)$ analyttinen funktio alueessa $a < \operatorname{Re} s < b$.

Esimerkki 8.20 Lasketaan funktion $f(t) = \mathbb{1}_{\{t \geq 1\}} t^c$, $c \in \mathbb{C}$, Mellinin muunnos ja sen käänteismuunnos.

Ratkaisu: Koska $|f(t)| = t^{\operatorname{Re} c}$, kun $t \geq 1$, suppenevat molemmat integraaleista (8.12) ja (8.15), kun $\sigma < -\operatorname{Re} c$. Näin ollen voidaankin valita $b = -\operatorname{Re} c$ ja asettaa tässä $a = -\infty$. Kun $\operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} c$, on $\operatorname{Re}(c+s) < 0$, ja Mellinin muunnokseksi saadaan

$$\mathcal{M}[f](s) = \int_0^\infty t^{s-1} f(t) dt = \int_1^\infty t^{c+s-1} dt = \int_1^\infty \frac{1}{c+s} t^{c+s} = -\frac{1}{s+c}.$$

Käänteismuunnoksessa on siis valittava $\sigma < -\operatorname{Re} c$, ja tällöin pitäisi laskea

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} t^{-s} F(s) \frac{ds}{2\pi i} = - \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{-s \ln t} \frac{1}{s+c} \frac{ds}{2\pi i}.$$

Samanlaisella residylaskulla kuin Esimerkissä 8.5, saadaan tästä tulokseksi

$$- \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{-s \ln t} \frac{1}{s+c} \frac{ds}{2\pi i} = \begin{cases} t^c, & \text{kun } t > 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{kun } t = 1, \\ 0, & \text{kun } t < 1, \end{cases}$$

eli käänteismuunnoskaava toimii kaikkialla muualla paitsi funktion f epäjatkuvuuspisteessä $t = 1$.

Huomautus 8.21 Mellinin muunnoksesta ja sen sovelluksista löytyy lisää tietoa esimerkiksi Wikipedian kautta (https://en.wikipedia.org/wiki/Mellin_transform). Muunnoksen kehittäjä on itse asiassa suomalainen matemaatikko: se on nimetty Robert Hjalmar Mellinin (1854–1933) mukaan (https://fi.wikipedia.org/wiki/Hjalmar_Mellin).

Luku 9

Distribuutiot

9.1 Motivaatio

Kuten aiemmin mainittiin, monia fysiikan ilmiöitä kuvataan yhtälöillä, jotka riippuvat *tiheyksistä* $\rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. Esimerkiksi Maxwellin yhtälöt, jotka kuvaavat jonkin aineen sähkömagneettisia ominaisuuksia, riippuvat aineen varaustiheydestä. Tämä on funktio, joka kertoo kuinka paljon jossain annetussa tilavuudessa $V \subset \mathbb{R}^3$ on sähkövarausta Q_V integraalina

$$Q_V = \int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \mathbb{1}_{\{\mathbf{r} \in V\}} \rho(\mathbf{r}).$$

Elektroni on pistemäinen hiukkanen, jonka varaus on $q_e < 0$. Millaista varaustiheyttä pitäisi käyttää Maxwellin yhtälöissä, kun elektroni on pisteessä $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$? *Ongelma*: Ei ole olemassa mitään funktiota $\rho(\mathbf{r})$, jolle pätsisi kaikilla $V \subset \mathbb{R}^3$ toivottu tulos

$$\int_V d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} q_e, & \text{kun } \mathbf{r}_0 \in V \\ 0, & \text{kun } \mathbf{r}_0 \notin V \end{cases} = q_e \mathbb{1}_{\{\mathbf{r}_0 \in V\}}.$$

Tämän ongelman pystyy kiertämään luopumalla vaatimuksesta, että tiheys $\rho(\mathbf{r})$ olisi aina funktion antama. Sen sijaan ajatellaankin, että tiheys on *sääntö*, joka kertoo mitä tapahtuu, kun sen suhteen integroidaan annettuja **testifunktioita**. Esimerkiksi yllä jokaiselle testifunktiolle f määritellään

$$\rho[f] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) f(\mathbf{r})$$

joka kertoo mikä on f :n mittaama varaus. Esimerkiksi yllä mainittu elektronin varaustiheys integroituna yli jonkin testifunktion f määritellään säännöllä

$$\rho_e[f] := q_e f(\mathbf{r}_0).$$

Näin määriteltyä sääntöä, joka matemaattisesti on siis kuvaus testifunktioilta kompleksiluvuille, merkitään yleensä käyttäen muodollisesti funktioilta näyttävää notaatiota

$$\rho_e(\mathbf{r}) = q_e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3.$$

Tässä esiintyvää "funktioita" $\delta(\mathbf{r})$ kutsutaan **Diracin δ -distribuutioksi**. Sen tarkempi määritelmä ja siitä usein käytetyt muodolliset integraalimerkinnät kuuluvat

$$\delta[f] = \delta_{\mathbf{0}}[f] := f(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \delta(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}), \quad \delta_{\mathbf{r}_0}[f] := f(\mathbf{r}_0). \quad (9.1)$$

9.2 Funktiojonon rajana määritelty distribuutio

Pistemäisten hiukkasten lisäksi distribuutiot ovat käteviä myös seuraavassa tilanteessa: Oletetaan, että (varaus)tiheys on funktion $\rho_\varepsilon(\mathbf{r})$ antama, ja se on keskittynyt täysin (esimerkiksi) origoon, ε -säteisen pallon sisälle. Mitataan varaustiheyttä laitteella, jonka paikkaresoluutio on $R \gg \varepsilon$. Jos laite on asetettuna pisteeseen \mathbf{r}_0 , antaa se mittaustulokseksi siis $\approx Q := \int d^3\mathbf{r} \rho_\varepsilon(\mathbf{r})$, eli kokonaisvarauksen, jos $|\mathbf{r}_0| \lesssim R$, ja 0 muuten. Koska laitteen resoluutio ei riitä erottamaan funktion ρ_ε yksityiskohtia, onkin tällöin helpompi ilmoittaa mittaustulos distribuutiona, eli yllä olevassa tapauksessa voitaisiin sanoa

$$\rho_\varepsilon(\mathbf{r}) \simeq Q\delta(\mathbf{r}).$$

Matemaattisesti tätä tilannetta voidaan mallintaa olettamalla, että ρ_ε on jonkin funktion g määräämä, kaavan

$$\rho_\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon^{-3}g\left(\frac{\mathbf{r}}{\varepsilon}\right)$$

avulla (tässä siis g kertoo jakauman muodon, mutta sen **pituuskaala** on ε :n antama). Oletetaan lisäksi, että g on keskittynyt origoon; tarkemmin oletetaan, että $g(\mathbf{x}) = 0$ aina, kun $|\mathbf{x}| \geq 1$. Tällöin nähdään, että $\rho_\varepsilon(\mathbf{r}) = 0$, kun $\frac{|\mathbf{r}|}{\varepsilon} \geq 1$, eli kun $|\mathbf{r}| \geq \varepsilon$, eli näin saatu funktion on todellakin keskittynyt ε -säteisen pallon sisälle. Edessä oleva kerroin on valittu sillä perusteella, että kokonaisvaraus ei riippuisi skaalasta ε : nythän

$$Q = \int d^3\mathbf{r} \rho_\varepsilon(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r} \varepsilon^{-3}g\left(\frac{\mathbf{r}}{\varepsilon}\right) = \int d^3\mathbf{x} g(\mathbf{x}).$$

Valitaan pituusyksikkö siten, että se vastaa laitteen resoluutiota, eli siten että $R \approx 1$. Oletetaan, että laitteen ”mittausprofiili” on tällöin funktion f antama: tarkemmin oletetaan, että jos laite on sijoitettu pisteeseen \mathbf{r}_0 ja se mittaa todellista jakaumaa $\rho(\mathbf{r})$, niin laite antaa arvoksi

$$Q_{\text{mitattu}}(\mathbf{r}_0) = \int d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})\rho(\mathbf{r}).$$

Tarkastellaan nyt, mitä tapahtuu, kun $R \gg \varepsilon$, eli mittaustarkkuus on paljon suurempi kuin mitattavan jakauman konsentraatiosäde. Pisteessä \mathbf{r}_0 mitattuna saadaan tällöin

$$\begin{aligned} Q_{\text{mitattu}}(\mathbf{r}_0) &= \int d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})\rho_\varepsilon(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})\varepsilon^{-3}g\left(\frac{\mathbf{r}}{\varepsilon}\right) \\ &= \int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{r}_0 + \varepsilon\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^3\mathbf{x} f(\mathbf{r}_0)g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{r}_0)Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})Q\delta(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Näin ollen riippumatta mittalaitteen profiilista f pätee

$$\rho_\varepsilon(\mathbf{r}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} Q\delta(\mathbf{r}),$$

ja approksimaatio $\rho_\varepsilon(\mathbf{r}) \approx Q\delta(\mathbf{r})$ kuvaa mittaustuloksia hyvin aina, kun $\varepsilon \ll R$.

Yleisestikin voidaan puhua funktiojonon suppenemisestä kohti jotain distribuutiota.

Määritelmä 9.1 Jono $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **funktioita** $F_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ **suppenee kohti distribuutiota** Λ , jos kaikilla testifunktioilla f pätee

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} d^d\mathbf{r} F_n(\mathbf{r})f(\mathbf{r}) = \Lambda[f].$$

Tätä voidaan merkitään myös lyhyemmin $F_n \rightarrow \Lambda$, kun $n \rightarrow \infty$.

Esimerkki 9.2 Yleinen versio alun esimerkistä saadaan valitsemalla jokin piste $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^d$ ja funktio g , jolle $g(\mathbf{r}) \geq 0$ ja $\int d^d\mathbf{r} g(\mathbf{r}) = 1$. Tämän jälkeen määritellään

$$F_n(\mathbf{r}) := n^d g(n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)).$$

Jos f on nyt jokin testifunktio, saadaan siis muuttujanvaihdoilla $\mathbf{x} = n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ alla olevassa integraalissa raja-arvo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{r} F_n(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{r} n^d g(n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) f(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} g(\mathbf{x}) f\left(\mathbf{r}_0 + \frac{1}{n} \mathbf{x}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{x} g(\mathbf{x}) f(\mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}_0) = \delta_{\mathbf{r}_0}[f]. \end{aligned}$$

Näin ollen $F_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta_{\mathbf{r}_0}$, jota joskus merkitään myös $F_n(\mathbf{r}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$.

9.3 (Lisä) Distribuutioiden matemaattinen määritelmä

Distribuutioiden määritelmässä ja niiden ominaisuuksien kannalta tärkein asia on testifunktioiden valinta. Fysiikan sovelluksissa on yleensä kätevämpää käyttää testifunktioina Huomautuksessa 7.4 määriteltyjä Schwartzin funktioita, eli valita $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Tästä avaruudesta käytetään myös lyhennysmerkintää \mathcal{S}_d . Tällöin saadaan aikaiseksi ns. **hillittyjä distribuutioita** (engl. *tempered distribution*), joiden kokoelmasta käytetään merkintää \mathcal{S}'_d . Toisin sanoen, jos $\Lambda \in \mathcal{S}'_d$, on tällöin Λ kuvaus $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, joka liittyy jokaiseen Schwartzin funktioon $f \in \mathcal{S}_d$ kompleksiluvun $\Lambda[f] \in \mathbb{C}$. Lisäksi hillityiltä distribuutioilta vaaditaan, että ne ovat jatkuvia lineaarikuvauksia. Erityisesti siis tiedetään, että aivan kuten motivaatioina käytetyille integraalien määrittelemille distribuutioille, pätee $\Lambda[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \Lambda[f_1] + \beta \Lambda[f_2]$, kun $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_d$.

Tarkka määritelmä sille, mitä distribuutioiden jatkuvuus tässä tarkoittaa, on aika työläs ja jätetään matematiikan kursseille. Asiaan voi halutessaan tutustua joko Wikipediassa ([https://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_\(mathematics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Distribution_(mathematics))) tai lähteestä [4, Luvut 6 ja 7]. Alla on muutama esimerkki siitä, millaiset kuvaukset muodostavat hillittyjä distribuutioita.

- Jos $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ on (mitallinen) funktio ja löytyy $p > 0$, jolla $\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\mathbf{r}|^2)^{-p} |F(\mathbf{r})| d^d \mathbf{r} < \infty$, on kuvaus

$$\Lambda[f] := \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{r} F(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) \quad (9.2)$$

hillitty distribuutio.

- Diracin δ -distribuutiot rajoitettuna Schwartzin funktioihin määrittelevät hillittyjä distribuutioita. Toisin sanoen, jos $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^d$ on annettu ja määritellään $\Lambda[f] := f(\mathbf{r}_0)$ kaikille $f \in \mathcal{S}_d$, on kuvaus Λ hillitty distribuutio.

9.4 Distribuutioiden perusominaisuuksia

Distribuutioiden matemaattinen teoria vaatii vähän enemmän työkaluja kuin mitä tässä monisteessa voidaan esittää. Alla on listattu muutamia (hillittyjen) distribuutioiden tärkeimpiä ominaisuuksia. Jos haluaa löytää lisätietoa tai todistuksia näistä tuloksista, kannattaa turvautua edellisessä luvussa mainittuihin lähteisiin.

Distribuutioista saa ottaa lineaarikombinaatioita

Jos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja Λ_1, Λ_2 ovat distribuutioita, on myös $\alpha \Lambda_1 + \beta \Lambda_2$ distribuutio, kun se määritellään luonnollisella kaavalla

$$(\alpha \Lambda_1 + \beta \Lambda_2)[f] := \alpha \Lambda_1[f] + \beta \Lambda_2[f], \quad f \in \mathcal{S}_d.$$

Esimerkiksi yllä käytetty distribuutio $Q\delta_{\mathbf{r}_0}$ saadaan tällä tavalla: jos $f \in \mathcal{S}_d$, määriteltiin $(Q\delta_{\mathbf{r}_0})[f] = Qf(\mathbf{r}_0) = Q\delta_{\mathbf{r}_0}[f]$.

Distributioita saa derivoida

Jos ∂_i merkitsee osittaisderivaattaa $\frac{\partial}{\partial r_i}$, määritellään distribuution Λ derivaatta kuvauksena

$$(\partial_i \Lambda)[f] := -\Lambda[\partial_i f]. \quad (9.3)$$

Perustelu tälle kaavalle tulee distribuutioista Λ_F , jotka on annettu jonkin jatkuvasti derivoituvan ja korkeintaan polynomiaalisesti kasvavan funktion F avulla käyttäen kaavaa (9.2). Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että $d = 1$, jolloin osittaisderivaatta on sama kuin muuttujan suhteen otettu derivaatta. Tällöin testifunktiolle f saadaan osittaisintegroimalla tulos

$$-\Lambda_F[f'] = -\int_{-\infty}^{\infty} dx F(x)f'(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} F(x)f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx F'(x)f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx F'(x)f(x),$$

sillä sijoitustermit häviävät, koska f häviää äärettömyydessä nopeammin kuin F . Tässä tilanteessa on siis distribuution Λ_F derivaatta sama kuin derivaatan F' määräämä distributio $\Lambda_{F'}$.

Esimerkki 9.3 Tutkitaan mitä tapahtuu, jos otetaan derivaatta Heavisiden funktion $\theta(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}}$ määräämästä distribuutiosta Λ_θ . Lähtien liikkeelle määritelmästä saadaan testifunktiolle f tulos

$$\Lambda[f'] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \theta(x)f'(x) = \int_0^{\infty} dx f'(x) = \int_0^{\infty} f(x) = 0 - f(0).$$

Näin ollen $-\Lambda[f'] = f(0) = \delta_0[f]$, joten $\frac{d}{dx}\Lambda_\theta = \delta_0$. Koska Heavisiden funktion määräämän distribuution derivaatta on siis δ -distributio, merkitäänkin joskus $\theta'(x) = \delta(x)$. Tämän merkinnän kanssa täytyy kuitenkin olla tarkkana: funktiolla $\theta(x)$ on olemassa myös normaali derivaatta kaikissa pisteissä $x \neq 0$ ja tällöin pätee $\theta'(x) = 0$. Näin saatu funktio on kuitenkin nollafunktio, ja sen määräämä distributio $\Lambda_{\theta'}$ on nolladistributio (se kuvaa kaikki testifunktiot nolalle). Tässä tapauksessa onkin siis $\partial_x \Lambda_\theta \neq \Lambda_{\theta'}$, vaikka funktio θ on derivoituva kaikkialla muualla paitsi origossa.

Esimerkki 9.4 Mikä on δ -distribuution derivaatta?

Ratkaisu: Jos f on testifunktio, saadaan määritelmästä $\delta'[f] := -\delta[f'] = -f'(0)$, eli nyt distribuution arvo riippuukin testifunktion derivaatan arvosta origossa.

Distributioita saa kertoa säännöllisillä funktioilla

Distribuution Λ kertominen funktiolla g tarkoittaa kuvausta

$$(g\Lambda)[f] := \Lambda[gf].$$

Tässä funktion g on oltava riittävän säännöllinen, jotta gf on Schwartzin funktio aina, kun f on Schwartzin funktio. Esimerkiksi g voi olla mikä tahansa polynomi, Schwarzin funktio tai näiden tulo.

Hillityistä distribuutioista saa ottaa Fourier'n muunnoksen

Kun $\Lambda \in \mathcal{S}'_d$, määritellään sen Fourier'n muunnos $\widehat{\Lambda}$ kuvauksena

$$\widehat{\Lambda}[f] := \Lambda[\widehat{f}], \quad f \in \mathcal{S}_d. \quad (9.4)$$

Tällöin on myös kuvaus $\widehat{\Lambda}$ hillitty distributio, eli kuuluu joukkoon \mathcal{S}'_d .

Esimerkki 9.5 Mikä on vakiofunktion $F(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, määräämän distribuution Λ_F Fourier'n muunnos?

Ratkaisu: Kun $f \in \mathcal{S}_1$, pätee Fourier'n muunnoksen käänteismuunnos jokaisessa pisteessä, erityisesti siis origossa $f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(p) \frac{dp}{2\pi}$. Käyttäen distribuution Λ määritelmää nähdään siis

$$\Lambda[\widehat{f}] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \widehat{f}(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(p) \frac{dp}{2\pi} = 2\pi f(0) = 2\pi \delta_0[f].$$

Näin ollen $\widehat{\Lambda}_F = 2\pi \delta_0$. Tämä tulos ilmaistaan usein sanomalla, että

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} \frac{dp}{2\pi}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Distribuution voi joskus yhdistää muuttujanvaihdon kanssa

Aloitetaan esimerkin vuoksi yksiulotteisesta tapauksesta, jossa Λ_F on funktion F määräämä distribuutio. Katsotaan mitä tapahtuu, jos määrittelevään integraaliin tehdään muuttujanvaihto. Olkoon tätä varten $\varphi(x)$ funktio, jolle $\varphi'(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja lisäksi $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$. Tällöin voidaan tutkia yhdistetyn funktion $G(x) := F(\varphi(x))$ määräämä distribuutiota, jolle pätee kaikilla testifunktioilla f tulos

$$\begin{aligned} \Lambda_G[f] &= \int_{-\infty}^{\infty} dx F(\varphi(x)) f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi'(x) \frac{F(\varphi(x))}{\varphi'(x)} f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy F(y) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} f(\varphi^{-1}(y)) = \Lambda_F[h]. \end{aligned}$$

Yllä on tehty muuttujanvaihto $y = \varphi(x)$ ja sen avulla päädytty funktioon $h(y) := \frac{f(\varphi^{-1}(y))}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))}$. Tarkasti ottaen vaaditaan toki vielä jotain lisäehtoja, jotta myös h olisi Schwartzin funktio, mutta välivaiheet pitävät paikkansa yleisemminkin.

Tätä laskua sovelletaan usein myös δ -distribuutioon ja määritellään sen avulla distribuutio $\delta(\varphi(x))$ kaavan oikean puolen arvona, eli määrittelemällä

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(\varphi(x)) f(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(y) h(y) = h(0) = \frac{f(x_0)}{\varphi'(x_0)} = \frac{1}{\varphi'(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x),$$

jossa $x_0 = \varphi^{-1}(0)$. Koska funktio φ on tässä aidosti kasvava, löytyy arvo x_0 myös yhtälön $\varphi(x_0) = 0$ yksikäsitteisenä ratkaisuna ja voidaan lyhyesti merkitä

$$\delta(\varphi(x)) = \frac{1}{\varphi'(x_0)} \delta(x - x_0).$$

Diracin δ -distribuution tapauksessa määritelmää käytetään yleisemmillekin jatkuvasti derivoituville funktioille φ . Tällöin riittää, että jokaisen yhtälön $\varphi(x_0) = 0$ ratkaisun x_0 ympäristössä voidaan tehdä vastaavanlainen muuttujanvaihto, joka on mahdollista, jos $\varphi'(x_0) \neq 0$. Tällöin löytyy pisteen x_0 sisältävä väli, jossa φ' ei vaihda merkkiä. Voidaan siis jakaa integraali reaaliakselin yli näihin väleihin ja niiden komplementtiin, jossa $\varphi(x) \neq 0$. Komplementissa sijoitetaan $\delta(\varphi(x)) = 0$ ja jokaisella välillä tehdään muuttujanvaihto $y = \varphi(x)$. Tästä saadaan lopputulokseksi yleinen määritelmä

$$\boxed{\delta(\varphi(x)) := \sum_{x_0} \frac{1}{|\varphi'(x_0)|} \delta(x - x_0)}, \quad (9.5)$$

jossa summataan kaikkien yhtälön $\varphi(x_0) = 0$ ratkaisujen yli. Näin yleisessä tapauksessa ei ole mitään takeita, että kaavan oikea puoli määrittelee jonkin järkevän distribuution, paitsi jos nolakohtia x_0 on äärellinen määrä. Usein näin kuitenkin käy, ja lopputuloksena voi olla hyvinkin käyttökelpoinen distribuutio.

Alla on tästä muutamia esimerkkejä ja δ -distribuutioon liittyviä laskusääntöjä:

1. $\delta(-x) = \frac{1}{|-1|}\delta(x) = \delta(x)$.
2. $\delta(ax - b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(x - \frac{b}{a}\right)$, kun $a \neq 0$ ja $b \in \mathbb{R}$.
3. Kun $a > 0$, saadaan myös kaava

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{|2a|}\delta(x - a) + \frac{1}{|2(-a)|}\delta(x + a) = \frac{1}{2a}(\delta(x - a) + \delta(x + a)).$$

4. Kun $a = 0$, ei yllä oleva lasku tuota distribuutiota. Muodollisesti pitäisi olla

$$\delta(x^2) = \frac{1}{2|x|}\delta(x) = \infty \cdot \delta(x) = ?$$

9.5 (Lisä) Distribuutioiden ”kertominen” keskenään

Yleisesti ottaen distribuutioita *ei* voi suoraan kertoa keskenään. Esimerkiksi mitä tarkoittaisi $\delta(x)\delta(x) = \delta(0)\delta(x) = \infty \cdot \delta(x)$? Se sijaan niistä voi usein ottaa *konvoluutioita*. Esimerkiksi δ -distribuutiolle määritellään distribuutioiden δ_{x_1} ja δ_{x_2} konvoluutio seuraavan muodollisen laskun kautta: kun f on jokin testifunktio, asetetaan

$$\begin{aligned} (\delta_{x_1} * \delta_{x_2})[f] &= \int_{\mathbb{R}} dy_1 \delta(y_1 - x_1) \left(\int_{\mathbb{R}} dy_2 \delta(y_2 - x_2) f(y_1 + y_2) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dy_1 \delta(y_1 - x_1) f(y_1 + x_2) = f(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Tässä tapauksessa saadaan siis takaisin δ -distribuutio, $\delta_{x_1} * \delta_{x_2} = \delta_{x_1+x_2}$.

Yleisemmin konvoluution ottaminen kuitenkin silottaa myös distribuutioita. Itse asiassa testifunktioiden kanssa otetuista konvoluutioista pystyy aina muodostamaan Luvun 9.2 tavalla kyseistä distribuutiota kohti suppenevan approksimaatiojonon, jossa käytetään pelkästään ns. sileitä funktioita. (Funktio f on sileä, jos sillä on olemassa jokaisessa pisteessä kaikkien kertalukujen derivaatat.) Tarkemmin, jos Λ on jokin distribuutio, löytyy jono (F_n) sileitä funktioita, jolla pätee

$$\Lambda[f] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{r} F_n(\mathbf{r}) f(\mathbf{r})$$

kaikille testifunktiolle f (ks. [4, Lause 6.32]).

Vaikka distribuutioita ei saakaan yleisesti kertoa keskenään, on joskus kätevää käyttää lyhenysmerkintöjä, jotka muistuttavat distribuutioiden tuloa. Esimerkiksi kolmiulotteinen δ -funktio voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\delta_{\mathbf{0}}(\mathbf{r}) = \delta(r_1)\delta(r_2)\delta(r_3), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3.$$

Tässä distribuutioiden tulo onnistuu, sillä vasemman puolen distribuutio vaatii kolmiulotteisen testifunktion, ja oikean puolen ”tulossa” kukin distribuutioista vaatii vain yksiulotteisen testifunktion. Oikea puoli tarkoittaa seuraavaa iteroitua määritelmää, kun $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ on testifunktio:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} dr_1 \delta(r_1) \int_{\mathbb{R}} dr_2 \delta(r_2) \int_{\mathbb{R}} dr_3 \delta(r_3) f(r_1, r_2, r_3) &= \int_{\mathbb{R}} dr_1 \delta(r_1) \int_{\mathbb{R}} dr_2 \delta(r_2) f(r_1, r_2, 0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} dr_1 \delta(r_1) f(r_1, 0, 0) = f(0, 0, 0) = f(\mathbf{0}) = \delta_{\mathbf{0}}[f]. \end{aligned}$$

Kun $\mathbf{r}_0 \neq \mathbf{0}$, voi δ -distribuution esittää myös pallokoordinaateissa samankaltaisena tulona. Kirjoitetaan ensin annettu vektori pallokoordinaateissa, $\mathbf{r}_0 := r_0(\cos \varphi_0 \sin \theta_0, \sin \varphi_0 \sin \theta_0, \cos \theta_0)$. Kuten kohta osoitetaan, tällöin voidaan kirjoittaa

$$d^3\mathbf{r} \delta_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = dr d\theta d\varphi r^2 \sin \theta \frac{1}{r_0^2} \delta(r - r_0) \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0).$$

(Tähän on kirjoitettu mukaan myös muuttujanvaihdon Jacobin determinantti väärinkäsitysten välttämiseksi.) Nimittäin, jos f on kolmiulotteinen testifunktio, sen ”integraali” yhtälön oikean puolen kanssa antaa

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta \frac{1}{r_0^2} \delta(r - r_0) \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \\ & \quad \times f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) \\ &= \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \frac{r^2}{r_0^2} \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) \\ &= \frac{r_0^2 \sin \theta_0}{r_0^2 \sin \theta_0} f(r_0 \cos \varphi_0 \sin \theta_0, r_0 \sin \varphi_0 \sin \theta_0, r_0 \cos \theta_0) \\ &= f(\mathbf{r}_0) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Tässä laskussa on käytetty tietoa siitä, että yhtälöllä $\cos \theta = \cos \theta_0$ on tasan yksi ratkaisu $\theta \in [0, \pi]$, joka saadaan, kun $\theta = \theta_0$. Näin ollen kaavan (9.5) mukaan yllä olevassa integraalissa voidaan sijoittaa

$$\delta(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{1}{|-\sin \theta_0|} \delta(\theta - \theta_0) = \frac{1}{\sin \theta_0} \delta(\theta - \theta_0),$$

sillä $\sin \theta_0 \geq 0$.

9.6 (MAT) Liite: Muita distribuutiotyyppejä ja testifunktioavaruuksia

Tässä monisteessa distribuutiolla tarkoitetaan yllä määriteltyjä hillittyjä distribuutioita. Alla on listattu muita yleisesti käytettyjä testifunktioavaruuksia ja muutamia niiden ominaisuuksia.

1. Schwartzin funktioiden sijaan voidaan testifunktioavaruutena käyttää myös sen osajoukkoa

$$\mathcal{D}_d := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid f(\mathbf{r}) = 0 \text{ jonkin pallon ulkopuolella}\},$$

jossa $f \in C^\infty(\Omega)$ tarkoittaa avoimessa joukossa Ω määriteltyjä funktioita, joilla on kaikkien kertalukujen derivaatat kaikissa sen pisteissä. Tällöin saadaan ns. **tavallisten distribuutioiden** avaruus \mathcal{D}'_d . Kaikki hillityt distribuutiot määrittelevät aina myös tavallisen distribuution, mutta toisin päin tämän ei tarvitse olla totta. Käykin niin, että tavallisella distribuutiolla ei välttämättä ole enää olemassa Fourier'n muunnosta.

2. Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ on avoin, on yleensä pakko turvautua juuri tavallisiin distribuutioihin $\mathcal{D}(\Omega)$, jotka tällöin määritellään käyttäen testifunktioita

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid f(\mathbf{r}) = 0 \text{ jonkin } \Omega\text{:n kompaktin joukon ulkopuolella}\}.$$

Näillekään distribuutioille ei yleensä voi käyttää Fourier'n muunnosta.

3. Jos Fourier'n muunnoksen lisäksi voidaan luopua myös distribuution derivaatoista, voidaan käyttää testifunktiojoukkona suurempaa kokoelmaa

$$C_c(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ on jatkuva ja } f(\mathbf{r}) = 0 \text{ jonkin pallon ulkopuolella}\}.$$

Tällöin vastaavat distribuutiot osoittautuvat kaikki ns. Radonin mittojen määräämiksi. Esimerkiksi δ -distribuutio vastaa näin yksikäsitteistä Radonin mittaa joukossa \mathbb{R} .

Kirjallisuutta

- [1] Juha Honkonen. *Fysiikan matemaattiset menetelmät I*. Limes ry, 2005. 2. painos.
- [2] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier Academic, 6th edition, 2005.
- [3] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1987.
- [4] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New Delhi, 2nd edition, 1991.
- [5] Jussi Väisälä. *Topologia I*. Limes ry, 2007. 4. painos.
- [6] Jussi Väisälä. *Topologia II*. Limes ry, 2004. 2. painos.
- [7] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*. Springer, Berlin, 1990.