MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaalilaskenta 2016

Tehtävät 6 A ja L
5.12. alkavalle viikolle

Kertaillaan differentiaalilaskentaa: derivaatan määritelmää, väliarvolausetta jne. Tehtävissä A3, A4 ja L4 on tarkoitus käyttää väliarvolausetta erotusosamäärän osoittajassa. Tehtävässä A3 selviää, ettei derivaattafunktiolla voi olla hyppykohtia. Tehtävissä L5 ja L6 puolestaan selviää, ettei derivaattafuktio ole välttämättä jatkuva (tai edes rajoitettu suljetulla välillä.) Lopuksi kurkistetaan transkendenttisten alekisfunktioiden maailmaan.

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3 ja A4

A1 Tarkastellaan yhtälöillä $f(x) = x + 2\sin x$ ja $g(x) = x + \sin x$ koko reaalulukujen joukossa määriteltyjä funktioita.
a) Selvitä funktion f lokaalit ääriarvot.
b) Selvitä funktion g lokaalit ääriarvot.

A2 Kirjan tehtävä 5.3.20.

A3 Oletetaan, että funktio $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ on derivoituva koko määrittelyvälillä. Oletetaan, että toispuoleiset raja-arvot

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) \text{ ja } \lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

ovat olemassa. Osoita, että tällöin pätee

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0).$$

A4 Oletetaan, että funktio $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ on derivoituva ainakin välillä $]0,1[$. Oletetaan, että

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \infty.$$

Osoita, että f ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

Loppuviikon tehtävät L1, L2, L3, L4, L4 ja L6.

L1 Tarkastellaan funktiota $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[1,3]$ ja derivoituva välillä $]1,3[$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in]1,3[$ pätee, että $2 \leq f'(x) \leq 4$. Oletetaan, että $f(1) = 5$. Mitä voidaan päätellä arvosta $f(3)$?

L2 Tarkastellaan funktiota $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$. Oletetaan, että f on jatkuva välillä $[1,3]$ ja derivoituva välillä $]1,3[$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in]1,3[$ pätee, että $2 \leq f'(x) \leq 4$. Oletetaan, että $f(3) = 5$. Mitä voidaan päätellä arvosta $f(1)$?

L3 Oletetaan, että funktio $f\colon]1,3[\to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdon $f'(2) = 5$. Selvitä

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+5h) - f(2-7h)}{3h}.$$

Vihje: Muokkaa tutkittavaa lauseketta niin, että saat näkyville erotusosamäärän muodot

$$\frac{f(2+5h) - f(2)}{5h} \text{ ja } \frac{f(2-7h) - f(2)}{-7h}.$$

L4 Oletetaan, että funktio $f\colon]-1,1[\to \mathbb{R}$ on derivoituva ainakin väleillä $]-1,0[$ ja $]0,1[$ ja jatkuva kohdassa $x = 0$. Oletetaan, että

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x).$$

Osoita, että f on derivoituva kohdassa $x = 0$ ja että

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0).$$

L5 Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(0) = 0$ ja

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Osoita, että funktio f on derivoituva koko reaalilukujen joukossa.

L6 Osoita, ettei edellisen tehtävän funktion derivaattafunktio ole rajoitettu välillä $[-1,1]$ eikä siksi voi olla jatkuva tällä suljetulla välillä.