MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaalilaskenta 2016

Tehtävät 5 A ja L
28.11. alkavalle viikolle

Opiskellaan differentiaalilaskentaa: differentioituvuutta, yhdistettyjä funktioita ja käänteisfunktioita. Lopuksi kurkistetaan väliarvolauseen maailmaan.

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3 ja A4

A1 Derivoi potenssin ja käänteisfunktion derivointisääntöjen avulla lausekkeella $f(x) = \sqrt[3]{x}$ määritelty funktio.

A2 Derivoi potenssin, käänteisfunktion ja yhdistetyn funktion derivointisääntöjen avulla lausekkeella $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ määritelty funktio.

A3 Osoita, että yhtälöllä $f(x) = x + x^3 + x^5$ määritellyllä funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on käänteisfunktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on aidosti kasvava, jatkuva ja derivoituva. Määritä $g'(3)$.

A4 Tarkastellaan yhtälöllä $f(x) = x^3$ määriteltyä funktiota välillä $[0, 1]$. Osoita, että väliarvolausetta voidaan soveltaa. Määritä (joku) väliarvolauseessa mainittu kohta ξ. Voidaanko tuloksesta päätellä, että väliarvolauseen todistuksessa tarvitaan välttämättä reaalilukujen joukon täydellisyyttä?

Loppuviikon tehtävät L1, L2, L3, L4, L4 ja L6.

L1 Osoita potenssin (eksponenttina kokonaisluku) ja juuren (kertalukuna kokonaisluku) määritelmien perusteella, että murtopotenssin $2^{\frac{3}{5}}$ kaksi määritelmää

$$2^{\frac{3}{5}} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^3$$

ja

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$$

johtavat samaan tulokseen.

L2 Derivoi potenssin ja käänteisfunktion derivointisääntöjen avulla lausekkeella $f(x) = \sqrt[5]{x}$ määritelty funktio.

L3 Derivoi funktiot, jotka on määritelty lausekkeella
(a) $f(x) = \cos(3x)$;
(b) $g(x) = (\cos(3x))^2 + 1$;
(c) $h(x) = \sqrt{(\cos(3x))^2 + 1}$.

L4 Johda (uudestaan) tulon derivointisääntö lauseiden 5.2.9 ja 5.2.10 avulla. Vihje: kerro puolittain keskenään mainittuihin lauseisiin liittyvät yhtälöt

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + hu(h)$$

ja

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)h + hv(h).$$

(Asiaa käsiteltiin lyhyesti tiistain 22.11. luennolla.)

L5 (Kirjan tehtävä 5.3.17) Osoita väliarvolauseen avulla, että

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$$

kaikilla $x > 0$.

L6 (Tehtävä 5.3.24) Oletetaan, että a, b ja c ovat reaalilukuja ja että $a > 0$. Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yhtälöllä

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c.$$

Osoita, että funktiolla f on enintään kaksi erisuurta nollakohtaa.