MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaalilaskenta 2016

Tehtävät 4 A ja L
21.11. alkavalle viikolle

Opiskelijapalautteen kannustamana siirrytään näistä harjoituksista alkaen sellaiseen käytäntöön, että alkuviikolla on neljä paikan päällä yhdessä mietittävää tehtävää ja että loppuviikolla on kuusi kotitehtävää.

Opiskellaan funktion jatkuvuuteen ja derivaattoihin liittyviä asioita. Lisäksi osassa tehtäviä harjoitellaan matematiikan lukemista.

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5

A1 Kevään 2016 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä 4. Tämä kuvallinen tehtävä löytyy esim YLE:n Abitreeneistä. Saat käyttää koulusta tuttuja derivaattaa koskevia tietoja.

A2 Osoita, että funktio f on jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ ja kaikilla $x \in [a, b]$ on olemassa $\delta > 0$, jolle kaikilla $t \in [a, b]$ pätee: jos $|x - t| < \delta$, niin $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$.

A3 Tutustu kirjan kohdissa 5.2.9 ja 5.2.10 käsiteltyyn differentiaalihajotelmaan. Päättele tämän perusteella suoraan yhtälöstä

$$(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

funktion $f(x) = x^3$ derivointisääntö käyttämättä erotusosamääriä. Vihje: ”tunnista”differentiaalihajotelman osat yllä olevasta yhtälöstä.

A4 Tutustu kirjan kohdassa 4.4.1 määriteltyyn tasaiseen jatkuvuuteen ja osoita, ettei yhtälöllä $f(x) = \frac{1}{x}$ määritelty funktio $f\colon]0, 1[\to \mathbb{R}$ ole tasaisesti jatkuva. Mitä eroa tasaisen jatkuvuuden määritelmällä ja tehtävässä A2 olevalla ehdolla on? (Tasaista jatkuvuutta ei käsitellä tämän enempää tällä syksyn kurssilla. Keväällä sitä ja lausetta 4.4.5 tarvitaan osoitettaessa, että määrätty (Riemannin) integraali on määritelty kaikille jatkuville funktioille.

Loppuviikon tehtävät L1, L2, L3 ja L4.

L1 Hahmottele kuvaaja jollekin funktiolle, jonka derivaattafunktion kuvaaja voisi olla esitettynä kevään 2016 pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävässä 4. (Periaatteellinen ratkaisu riittää.)

L2 Oletetaan, että funktio f on määritelty ainakin jollain välillä $]x_0 - r, x_0 + r[$ mahdollisesti kohtaa x_0 lukuun ottamatta. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.
(a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, ja
(b) $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = a$.

L3 Oletetaan, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Oletetaan lisäksi, että $f(x) \to 0$ kun $x \to -\infty$ ja kun $x \to \infty$. Osoita, että on olemassa sellainen c, että toinen seuraavista pätee.
(a) Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $f(x) \leq f(c)$.
(b) Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $f(x) \geq f(c)$.

L4 Oletetaan, että $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja, että kaikilla $x \in [0,1]$ pätee $0 \leq f(x) \leq 1$. Osoita, että on olemassa $x \in [0,1]$, jolle pätee $f(x) = x$.

L5 Päättele kirjan kohdissa 5.2.9 ja 5.2.10 käsitellyn differentiaalihajotelman avulla suoraan yhtälöstä

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^3$$

funktion $f(x) = x^4$ derivointisääntö käyttämättä erotusosamääriä. Vihje: ”tunnista” differentiaalihajotelman osat yllä olevasta yhtälöstä.

L6 Tarkastellaan yhtälöllä $f(x) = x^2$ määriteltyä funktiota. Oletetaan, että $x \in \mathbb{R}$. Määritä lauseke $\alpha(h)$, että kaikilla $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, pätee

$$(x+h)^2 = x^2 + 5xh + h\alpha(h).$$

Miksei tulos ole ristiriidassa kirjan kohtien 5.2.9 ja 5.2.10 kanssa?