

# MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

## Differentiaalilaskenta 2016

### Tehtävät 3 A ja L

14.11. alkavalle viikolle

Opiskellaan funktion jatkuvuuteen ja raja-avoihin liittyviä asioita. Lisäksi osassa tehtäviä harjoitellaan matematiikan lukemista.

### Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5

**A1** Tarkastellaan funktiota  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , joka on määritelty ehdoilla  $f(x) = \frac{1}{x}$  kun  $x \neq 0$  ja  $f(0) = 0$ . Osoita, että  $f$  saa kaikki reaaliarvot.

**A2** Ratkaise yhtälö  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

**A3** Oletetaan, että  $A \subset \mathbb{R}$  ja  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ . Oletetaan, että

$$m = \sup\{f(x) \mid x \in A\}.$$

Oletetaan lisäksi, että kaikilla  $x \in A$  pätee  $f(x) < m$ . Osoita, että lausekkeella

$$g(x) = \frac{1}{m - f(x)}$$

määritelty funktio ei ole ylhäältä rajoitettu joukossa  $A$ .

**A4** Oletetaan, että kasvava funktio  $f$  on määritelty ainakin kun  $x \in ]a, b[$ . Oletetaan, että  $x_0 \in ]a, b[$ .

(a) Osoita, että toispuoleiset raja-arvot  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  ja  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  ovat olemassa.

(b) Osoita, että  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ .

Tutki kirjastamme lausetta 3.3.4 sivulta 68!

**A5** Kurssin Raja-arvot kotisivulle on linkitetty Ritva Hurri Syrjäsen materiaali ”Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1” kursseihin Raja-arvot ja Differentiaalilaskenta. Materiaalin sivulla 85 annetaan sini- ja kosinifunktiolle viisi aksiomia, joissa on lueteltu joitakin näiden funktioiden koulusta tuttuja ominaisuuksia. Muut ominaisuudet ovat johdettavissa näiden aksiomien pohjalta.

Osoita näiden aksiomien avulla, että sini ja kosini ovat jatkuvia kohdassa  $x = 0$ . Todistus on hahmoteltu tekstin sivulla 86. Saat tietysti käyttää tätä esitystä ratkaisusi pohjana.

**A6** (Jatkoa edelliseen)

Osoita, että sini ja kosini ovat jatkuvia koko reaalilukujen joukossa.

**Loppuviikon tehtävät L1, L2, L3 ja L4.** Lopussa on kaksi lisätehtävää omin päin tapahtuvaa harrastamista varten.

**L1** Ratkaise haarukoimalla yhtälö  $x^7 + x^3 = 1$  kolmen desimaalin tarkkuudella.

**L2** Tarkastellaan funktiota  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , jolle pätee  $f(0) = 0$  ja

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty,$$

ja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

Oletetaan lisäksi, että  $f$  on jatkuva kohdissa  $x_0 \neq 0$ . Osoita, että  $f$  saa kaikki reaaliarvot. Vertaa tulosta tehtävään A1.

**L3** Oletetaan, että funktio  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva ja että kaikilla  $x$  pätee  $0 \leq f(x) \leq 3$ . Määritellään funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  yhtälöllä

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^2 + 1}.$$

Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita funktio  $f$  saa on suurin arvo.

**L4** (Jatkoa tehtävälle A6) Osoita, että sinin derivaatta on kosini. Voit tutkailla Hurri-Syrjäsen materiaalia sivuilta 86-87. Huomaa, että tekijälle on siellä tullut pieni lipsahdus. Mikä?

**Lisätehtävä 1** Oletetaan, että funktio  $f: ]0, 2[ \rightarrow \mathbb{R}$  on derivoituva kohdassa  $x = 1$ , että  $f(1) = 7$ , ja että  $f'(1) = 3$ . Osoita, että on olemassa

sellainen  $r > 0$ , että kaikille  $x \in ]1, 1 + r[$  pätee

$$7 + (3 - 10^{-100})(x - 1) < f(x) < 7 + (3 + 10^{-100})(x - 1).$$

Vihje: Muista, että derivaatta on erotusosamäärän raja-arvo. Muokkaa ehtoa

$$\left| \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - 3 \right| < 10^{-100}.$$

Entä kohdan  $x = 1$  vasemmalla puolella?

**Lisätehtävä 2** Mieti, miten voisit kehittää haarukoimisen idean pohjalta todistuksen Bolzanon lauseelle!