MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaalilaskenta 2016

Tehtävät 2 A ja L
7.11. alkavalle viikolle

Kurssilla Differentiaalilaskenta muutetaan Raja-arvot -kurssilta totuttua käytäntöä niin, että alkuviikon kotitehtäviä on kuusi ja loppuviikon yhdessä työstettäviä tehtäviä on neljä.

Lopussa on teoreettinen lisätehtävä omin päin tapahtuvaksi harrastamiseksi moisista pohdinnoista kiinnostuneita varten. Sitä ei ole tarkoitus käsitellä harjoituksissa. Luennoitsijalta voi pyytää neuvoa.

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5

A1 Selvitä kurssin tietojen avulla

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x^2+2}.$$

Saat käyttää tietoja vakiofunktion ja identtisen funktion $f(x) = x$ raja-arvoista. (Osaathan varmasti todistaa ne raja-arvon määritelmän avulla?) Muista lauseen 5.1.11. ”jos ..., niin ...” -rakenne.

A2 Osoita suoraan raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien avulla, että yhtälöllä $f(x) = |x|$ määritelty funktio on jatkuva koko reaalilukujen joukossa.

A3 Osoita suoraan raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien avulla, että yhtälöllä $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ määritelty funktio on jatkuva koko reaalilukujen joukossa.

A4 Oletetaan, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kaikkialla jatkuva. Osoita suoraan määritelmien perusteella, että myös yhtälöllä $g(x) = f(x)^2$ määritelty funktio on kaikkialla jatkuva.

A5 Osoita, että

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1.$$

A6 Osoita, että
$$\lim_{x\to 1+} \frac{x^2+2}{x-1} = \infty.$$

Loppuviikon tehtävät L1, L2; L3 ja L4

L1 Oletetaan, että kaikkialla jatkuva funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ saa vain arvoja ≥ 0. Osoita suoraan määritelmien perusteella, että myös yhtälöllä $g(x) = \sqrt{f(x)}$ määritelty funktio on kaikkialla jatkuva.

L2 Oletetaan, että $r > 0$ ja että reaaliarvoinen funktio f on määritelty ainakin kun $0 < |x - x_0| < r$. Oletetaan, että $f(x) \to a$ kun $x \to x_0$. Osoita, että on olemassa $\delta > 0$, jolle pätee kaikilla x, että jos $0 < |x - x_0| < \delta$, niin $|f(x)| < |a| + 1$.

L3 Oletetaan, että $r > 0$ ja että reaaliarvoinen funktio f on määritelty ainakin kun $0 < |x - x_0| < r$. Oletetaan, että $f(x) \to a$ kun $x \to x_0$. Oletetaan lisäksi, että $a > 0$. Osoita, että on olemassa $\delta > 0$, jolle pätee kaikilla x, että jos $0 < |x - x_0| < \delta$, niin $f(x) > \frac{a}{2}$. (Osaatko muotoilla vastaavan tuloksen tapauksessa $a < 0$? Entä miten on tapauksen $a = 0$ laita?)

L4 Oletetaan, että reaaliarvoinen funktio f on määritelty ainakin kun $0 < |x| < 1$. Oletetaan, että
$$\frac{f(x)}{x} \to 42$$
kun $x \to 0$. Osoita, että funktio f on jatkuva kohdassa $x = 0$. Vihje: sovella tehtävän L2 tulosta.

Lisätehtävä 1 Kehitä tehtävän L4 ratkaisusta todistus sille, että derivoituvuudesta seuraa jatkuvuus?

Lisätehtävä 2 Oletetaan, että funktio $f\colon]x_0, x_0 + 1[\to \mathbb{R}$ toteuttaa seuraavan ehdon. Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, jolle kaikilla reaaliluvuilla x ja t pätee: jos $0 < x - x_0 < \delta$ ja $0 < t - x_0 < \delta$, niin $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$. Osoita, että tällöin on olemassa toispuoleinen raja-arvo $\lim_{x\to x_0+} f(x)$. Vihje: Osoita ensin, että lukujono $(f(x_0 + \frac{1}{n}))$ on Cauchy-jono ja siksi suppenee.