MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaalilaskenta 2016

Tehtävät 1 L
31.10. alkavalle viikolle

Kurssilla Differentiaalilaskenta muutetaan Raja-arvot -kurssilta totuttua käytäntöä niin, että alkuviikon kotitehtäviä on kuusi ja loppuviikon yhdessä työstettäviä tehtäviä on neljä.

Alkuviikon tehtävät A1, A2; A3, A4 ja A5 Tällä ensimmäisellä viikolla ei ole alkuviikon tehtäviä.

Loppuviikon tehtävät L1, L2; L3 ja L4 Jatketaan raja-arvojen kurssin lopun asioiden miettimistä ennen varsinaisen jatkuvien funktioiden teorian aloittamista. Muistetaan jatkuvuuden ja derivaatan (derivoituvuuden) määritelmät kurssilta Raja-arvot.

Lopussa on kaksi lisätehtävää omin päin tapahtuvaa harrastamista varten. Lisätehtävän 2 asioista tullaan puhumaan myös luennoilla sopivassa kohtaa.

L1 Oletetaan, että funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on rajoitettu (ts. on olemassa $M > 0$, jolle kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $|g(x)| \leq M$.) Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yhtälöllä $f(x) = xg(x)$. Osoita, että funktio f on jatkuva kohdassa $x = 0$.

L2 (Jatkoa edelliseen)

(a) Anna esimerkki sellaisesta rajoitetusta funktiosta g, jolle edellisen tehtävän funktio f on myös derivoituva kohdassa $x = 0$. Perustelu!

(b) Anna esimerkki sellaisesta rajoitetusta funktiosta g, jolle edellisen tehtävän funktio f ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$. Perustelu!

L3 Tarkastellaan yhtälöllä

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

määriteltyä funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Osoita, että se on derivoituva kohdassa $x = 0$.

(b) Osoita, että funktion f derivaattafunktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

(Tämä on vanha ylioppilaskoetehtävä.)

L4 Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on määritelty ehdoilla $f(x) = 1$ kun x on rationaalinen ja $f(x) = 0$ kun x on irrationaalinen. Osoita, että kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}$ pätee, että f on epäjatkuva kohdassa x_0. Sovella Lisätehtävän 2 tulosta.

Lisätehtävä 1 Määritellään lukujono (x_n) yhtälöillä $x_1 = 0$ ja

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + 2).$$

Osoita, että jono suppenee ja määritä sen raja-arvo.

Lisätehtävä 2 Sanotaan, että reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ osajoukko A on *tiheä*, jos jokainen avoin väli $]a, b[$ sisältää joukon A alkion. Osoita, että rationaalilukujen joukko ja irrationaalilukujen joukko ovat tiheitä.