Differentiaalilaskenta: kurssikoe 22.12.2016

Ratkaisuehdotuksia (H-O.Tylli) (Huom.: EI korjaajan pisteytysmalli)
viittaukset [HKK] ovat kurssikirjaan Harjulehto, Klén & Koskenoja.

1. Osoita, että

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \infty.$$

Ratkaisuehdotus: jos $M > 0$ on mielivaltainen ja $x > 2$, niin

$$\frac{x+2}{x-2} \geq \frac{2}{x-2} > M$$

aina kun $0 < x - 2 < \frac{2}{M}$. Voidaan siis määritelmässä valita $\delta = \frac{2}{M}$, vrt. [HKK, tehtävä 3.2.12].

2. Tarkastellaan yhtälöllä $f(x) = x^5 + x^7$ määriteltyä funktiota $f\colon [0,2] \to [0,160]$. Osoita, että funktiolla f on aidosti kasvava jatkuva käänteisfunktio $g\colon [0,160] \to [0,2]$, joka on derivoituva välillä $]0,160[$. Määritä $g'(2)$.

Ratkaisuehdotus: polynomi $f(x) = x^5 + x^7$ on jatkuvasti derivoituva ja $f'(x) = 5x^4 + 7x^6 > 0$ kaikilla $x > 0$. Teorian nojalla [HKK, 5.3.12] funktio f on aidosti kasvava välillä $[0,2]$, missä $f(0) = 0$ ja $f(2) = 160$. Bolzanon lauseen perusteella (tai [HKK, 4.2.3]) saadaan kuvaksi $f([0,2]) = [0,160]$, joten f on bijektio $[0,2] \to [0,160]$. Olkoon $g = f^{-1}$ käänteiskuvaus $[0,160] \to [0,2]$, joka on aidosti kasvava välillä $[0,160]$.

Koska $f'(x) > 0$ kun $x > 0$, niin käänteiskuvauksen derivoimissäännön mukaan [HKK, 5.2.13] käänteiskuvaus g on derivoituva välillä $(0,160)$. Lisäksi, koska $f(1) = 1 + 1 = 2$ niin $g(2) = 1$ ja

$$g'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{12}.$$

3. Osoita, että yhtälöllä $f(x) = |x^2 - 2x|$ määritelty funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = 2$.

Ratkaisuehdotus: funktion $f(x) = |x^2 - 2x| = |x| \cdot |x - 2|$ määritelmä muuttuu kohdassa $x = 2$, joten tutkimme oikean- ja vasemmanpuoleisia derivaattoja $f'_+(2)$ ja $f'_-(2)$. Jos $h > 0$ niin

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2 + h,$$

joten

$$f'_+(2) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 2.$$

Jos taas $h < 0$ on sellainen että $2+h > 0$, niin

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{|2+h|\cdot|h|}{h} = -(2+h),$$

joten

$$f'_-(2) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = -2.$$

Koska $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ niin f ei ole derivoituva kohdassa $x = 2$, vrt. [HKK, 5.1.8 ja 5.1.9].

4. Tarkastellaan yhtälöllä

$$f(x) = \frac{x^2 \sin(e^{x^2})}{(x^4+1)e^{\sin x}}$$

määriteltyä funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Osoita, että on olemassa reaaliluku $a \in \mathbb{R}$, jolle kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $f(x) \leq f(a)$.

Huom.: Tässä tehtävässä ei kannata tarkastella derivaattaa!

Ratkaisuehdotus: arvo $c = f(1) = \frac{\sin(e)}{2e^{\sin(1)}} > 0$ koska $\frac{\pi}{2} < e < \pi$ ja $\sin(x) > 0$ kun $x \in (0,\pi)$. Lisäksi havaitaan, että

$$|f(x)| = \frac{x^2|\sin(e^{x^2})|}{(x^4+1)e^{\sin x}} \leq e \cdot \frac{x^2}{x^4+1} \leq \frac{e}{x^2}$$

aina kun x toteuttaa $|x| \geq 1$. Edellä käytimme tietoa $|\sin(t)| \leq 1$ kaikilla t, joten $e^{\sin x} \geq e^{-1}$ kaikilla x. Edellisestä arviosta seuraa, että $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Nimittäin, jos $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, niin

$$|f(x)| \leq \frac{e}{x^2} = \frac{e}{|x|^2} < \varepsilon$$

kun $|x| > \sqrt{\frac{e}{\varepsilon}}$ (ja $|x| > 1$).

Lukua $c = f(1) > 0$ vastaa siis $M > 1$ jolle $|f(x)| < c$ aina kun $|x| > M$. Koska f on jatkuva kuvaus koko joukossa $\mathbb{R}$ (perustele!), niin min-max-lauseen [HKK,4.3.3] mukaan on olemassa sellainen $a \in [-M, M]$ että

$$f(x) \leq f(a)$$

kaikilla $x \in [-M, M]$. Jos taas $|x| > M$ niin

$$f(x) < c = f(1) \leq f(a)$$

koska $1 \in [-M, M]$. Yhdistämällä saadaan $f(x) \leq f(a)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Varoitus: funktion f monimutkaisen kaavan takia **ei** kannata lähteä etsimään funktion suurinta arvoa joukossa $\mathbb{R}$ derivoimalla ja tutkimalla $f'(x) = 0$, vaan yleisen teorian kautta.