Bayes-päättely, 4. harjoitukset (15.–16.2.2017)

1. Olkoon $Y \sim \text{Poisson}(\theta)$. Osoita, että parametrin θ Jeffreyn priori

$$p(\theta) \propto \sqrt{i(\theta)},$$

missä $i(\theta)$ on mallin Fisherin informaatio, on ei-kunnollinen gammajakauma Gamma$(0.5, 0)$.

2. Normaalimalli yleisellä konjugaattipriorilla. Oletetaan satunnaisotos $Y_1, \ldots, Y_n$ normaalijakaumasta $N(\mu, \sigma^2)$. Määritellään parametrin (μ, σ^2) priorijakauma hierarkkisesti:

$$\begin{aligned} \mu \,|\, \sigma^2 &\sim N(\mu_0, \sigma^2/\kappa_0), \\ \sigma^2 &\sim \text{Inv-}\chi^2(\nu_0, \sigma_0^2), \end{aligned}$$

eli varianssi noudattaa skaalattua käänteistä khiin neliön jakaumaa, ja odotusarvo ehdolla varianssi noudattaa normaalijakaumaa.

(a) Osoita, että näin määritelty priori on muotoa

$$p(\mu, \sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-(\nu_0+3)/2} \exp\left\{ -\frac{\nu_0\sigma_0^2 + \kappa_0(\mu_0 - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

(b) Merkitään tätä kaksiulotteista jakaumaa seuraavasti:

$$(\mu, \sigma^2) \sim N\text{-Inv-}\chi^2(\mu_0, \sigma_0^2/\kappa_0, \nu_0, \sigma_0^2).$$

Osoita, että posteriorijakauma $p(\mu, \sigma^2|\mathbf{y})$ on samaa muotoa, eli

$$(\mu, \sigma^2) \sim N\text{-Inv-}\chi^2(\mu_n, \sigma_n^2/\kappa_n, \nu_n, \sigma_n^2),$$

missä

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{\kappa_0\mu_0 + n\bar{y}}{\kappa_0 + n} \\ \kappa_n &= \kappa_0 + n \\ \nu_n &= \nu_0 + n \\ \nu_n\sigma_n^2 &= \nu_0\sigma_0^2 + (n-1)s^2 + \frac{\kappa_0 n}{\kappa_0 + n}(\bar{y} - \mu_0)^2. \end{aligned}$$

3. Jatkoa edelliseen tehtävään. Osoita, että

$$p(\mu|y) \propto \left(1 + \frac{\kappa_n(\mu - \mu_n)^2}{\nu_n\sigma_n^2}\right)^{-(\nu_n+1)/2},$$

eli että parametrin μ reunaposteriorijakauma on (ei-standardi) t:n jakauma $t_{\nu_n}(\mu_n, \sigma_0^2/\kappa_n)$.

4. Lämmittelytehtävä stanin käyttöön. Havaitaan aineisto `y = (3 1 8 2 6 4 4 8 10 4)`.

(a) Estimoi tälle aineistolle seuraava malli stanilla:

$$\begin{aligned} &Y_1, \ldots, Y_{10} \perp\!\!\!\perp \,|\, \theta, \quad Y_i \sim \text{Poisson}(\theta) \quad \text{kaikille } i = 1, \ldots, 10, \\ &\theta \sim \text{Gamma}(0.001, 0.001). \end{aligned}$$

Piirrä parametrin θ simuloidun posteriorijakauman histogrammi.

(b) Osaamme ratkaista tämän konjugaattimallin posteriorijakauman myös suljetussa muodossa, joten piirrä todellisen posteriorijakauman kuvaaja histogrammin päälle.

(c) Laske simuloidun posteriorijakauman perusteella todennäköisyys $P(\theta > 6 \mid \mathbf{y})$, eli että parametrin todellinen arvo on yli 6. Laske tarkka arvo todennäköisyydelle oikeasta posteriorijakaumasta, ja vertaa tuloksia. Jos eroa on paljon, niin lisää simulaation otoskokoa, ja katso mitä tapahtuu.