Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, harj. 2, 10.10.-16

1. $\mathbb{P}(M_n \le x) = z \iff (1-e^{-x})^n = z \iff x = -\log(1-z^{\frac{1}{n}})$

$\therefore \mathbb{P}(M_n \in (-\log(1-0.05^{\frac{1}{n}}), -\log(1-0.95^{\frac{1}{n}}))) = 0.9, \ \forall n$

n	(x_1, x_2)
10	(1.4, 5.3)
100	(3.5, 7.6)
1000	(5.8, 9.9)

2. Otetaan Lauseessa 2.3 $u_n = x + \log n$. Tällöin

$$n\bar{F}(u_n) = n e^{-(x+\log n)} = e^{-x}, \quad \forall n.$$

Lauseen nojalla $\mathbb{P}(M_n \le x + \log n) \to e^{-e^{-x}}$, $n \to \infty$.

Vaaditaan $\mathbb{P}(M_n \le x_1) = 0.05$ eli

$$0.05 = \mathbb{P}(M_n \le (x_1 - \log n) + \log n) \approx e^{-e^{-(x_1 - \log n)}}$$

Siispä $x_1 \approx \log n - \log(-\log 0.05) \approx -1.097 + \log n$.

Samoin $x_2 \approx \log n - \log(-\log 0.95) \approx 2.970 + \log n$

n	(x_1, x_2)
10	(1.2, 5.3)
100	(3.5, 7.6)
1000	(5.8, 9.9).

Tehtävän 1 todennäköisyydet ovat likimain

$$\mathbb{P}(M_n \in (x_1, x_2)) = \mathbb{P}(M_n \le x_2 - \log n + \log n) - \mathbb{P}(M_n \le x_1 - \log n + \log n)$$

$$\approx e^{-e^{-(x_2-\log n)}} - e^{-e^{-(x_1-\log n)}}$$

≈ 0.866, kun $n=10$, 0.902, kun $n=100$, 0.903, kun $n=1000$.

3. Olkoon $H(x) \in (0,1)$. Ilmeisesti $a_n x + b_n \to x_F-$ (jos $\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}x + b_{n_k}) = z < x_F$, niin $F^{n_k}(a_{n_k}x+b_{n_k}) \to 0$).

L2.3. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\bar{G}(a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n x+b_n) \cdot \dfrac{\bar{G}(a_n x + b_n)}{\bar{F}(a_n x + b_n)} = -\log H(x)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} G^n(a_n x + b_n) = H(x).$$

Tämä pätee myös, kun $H(x) = 0$ tai 1, koska H on jatkuva (L. 2.6)

4. L 2.3.1 $\Rightarrow$ riittää näyttää, että $\lim n\bar{F}(u_n)$ on olemassa ja on positiivinen ja äärellinen. Olkoon

$$\lim_{k\to\infty} n_k \bar{F}(u_{n_k}) = a \in [0,\infty].$$

Nyt

$$\mathbb{P}(M_n^{(2)} \le u_n) = \mathbb{P}(M_n \le u_n) + \mathbb{P}(\text{tasan } 1\ Z_j > u_n,\ j \in \{1,\dots,n\})$$

$$= F(u_n)^n + n\bar{F}(u_n)F(u_n)^{n-1} = F(u_n)^n\left(1 + \frac{n\bar{F}(u_n)}{F(u_n)}\right)$$

$$= e^{n\log(1-\bar{F}(u_n))}\left(1+\frac{n\bar{F}(u_n)}{F(u_n)}\right).$$

Jos $F(u_{n_k}) \to 0$, niin

$$\mathbb{P}(M_{n_k}^{(2)} \le u_{n_k}) \le F(u_{n_k})^{n_k-1}(1+n_k) = O(1)\frac{1+n_k}{2^{n_k}} \to 0 \ \lightning.$$

Siis $F(u_n) \ge 1-\varepsilon$, $\forall n > n_\varepsilon$, missä $\varepsilon > 0$. Jos $\bar{F}(u_{n_k}) \to a$, $a \neq 0$, niin

$$\mathbb{P}(M_{n_k}^{(2)} \le u_{n_k}) \le e^{-n_k\varepsilon}\, O(n_k) \to 0,\ \lightning.$$

Siis $\bar{F}(u_n) \to 0$, ja

$$\mathbb{P}(M_n^{(2)} \le u_n) = e^{-n\bar{F}(u_n)(1+o(1))}\left(1+n\bar{F}(u_n)(1+o(1))\right)$$

$$\Rightarrow c = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(M_{n_k}^{(2)} \le u_{n_k}) = e^{-a}(1+a), \text{ jos } \lim n_k\bar{F}(u_{n_k}) = a.$$

$\Rightarrow a \in (0,\infty)$. Kuvaus $x \mapsto e^{-x}(1+x)$ on aidosti vähenevä välillä $(0,\infty)$, joten a ei riipu osajonon valinnasta.

5. $$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} F_n(a_n x + b_n) = G(x) \\ \lim\limits_{n\to\infty} F_n(a_{nk} x + b_{nk}) = G^{1/k}(x). \end{cases}$$

L. 2.1 $\Rightarrow$ $\exists\ \alpha_k > 0,\ \beta_k$: $\quad G(\alpha_k x + \beta_k) = G^{1/k}(x)$

$\Rightarrow$ $G^k(\alpha_k x + \beta_k) = G(x), \ \forall\ x \in \mathbb{R}$.