Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, harj. 1, 26.9.-16

1. $$\lim_{t\to\infty} \frac{(1+\log tx)^q}{(1+\log t)^q} = \lim \left(\frac{1+\log t + \log x}{1+\log t}\right)^q = 1, \ \forall x > 0$$

Olkoon $x = \frac{1}{2}$, $t = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Silloin

$$\frac{\sin tx + 2}{\sin t + 2} = \frac{\sin\frac{k\pi}{2} + 2}{2} = \begin{cases} 1, & k = 2, 4, 6, \ldots \\ \frac{3}{2}, & k = 1, 5, 9, \ldots \end{cases}$$

Raja-arvo $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t\cdot\frac{1}{2})}{f(t)}$ ei täis ole olemassa

2. Olkoon f säännöllisesti vaihteleva indeksillä α. Kirjoitetaan

$$f(x) = \frac{f(x)}{x^\alpha} x^\alpha = L(x) x^\alpha, \quad L(x) = \frac{f(x)}{x^\alpha}.$$

Silloin

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{(tx)^\alpha} \cdot \frac{t^\alpha}{f(t)}$$

$$= \frac{1}{x^\alpha} \lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = 1 \Rightarrow L \text{ h.v.}$$

Olkoon $f(x) = L(x) x^\alpha$, L h.v. Silloin

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{L(tx)(tx)^\alpha}{L(t)t^\alpha} = x^\alpha \Rightarrow f \text{ s.v., ind} = \alpha.$$

3. $$\lim_{t\to\infty} \frac{\bar F(tx)}{\bar F(t)} = x^\alpha.$$ Jos $x > 1$, on o.p. > 1, jos $\alpha > 0$

Tämä on mahdotonta, koska $\bar F(tx) \le \bar F(t)$, $\forall t > 0$.

Jos $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1 - \frac{1}{\log x}, & x \ge 2 \end{cases}$$

niin F on kf ja $\bar F$ on h.v (tehtävä 1).

4. Jos $\varepsilon \in (0,\beta)$ on annettu, niin näille $x_\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} f(x) \in (e^{-(\beta+\varepsilon)x}, e^{-(\beta-\varepsilon)x}) \\ f(2x) \in (e^{-2(\beta+\varepsilon)x}, e^{-2(\beta-\varepsilon)x}), \end{cases}$$

kunhan $x > x_\varepsilon$. Ottamalla ε riittävän pieneksi nähdään, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 0.$$

5. Jos f on s.v. indeksillä α, niin lemmaan 2 nojalla

$$f(x) = x^\alpha L(x), \quad L \text{ h.v.}$$

Tällöin olisi

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \log L(x) = \lim x^{-1} \log f(x) = -\beta.$$

Edellisen tehtävän nojalla tämä on mahdotonta ↯.