Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 5, 28.11.2016

Tehtävissä 2-5 $X, X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumattomia F-jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ja $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Lisäksi $\mu \in (0, \infty)$ on X:n odotusarvo.

1. Oletetaan, että $X_1, X_2, \ldots$ ovat riippumatomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia siten, että muuttujan X_i tiheysfunktio alueessa $z > 0$ on f_i,

$$f_i(z) = \mu_i e^{-\mu_i z}.$$

Parametrit $\mu_1, \mu_2, \ldots$ ovat positiivisia vakioita. Oletetaan lisäksi, että

$$\lim_{i \to \infty} \mu_i = \mu,$$

missä $\mu \in (0, \infty)$. Olkoon $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$. Osoita, että $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(Y_n/n \in (\mu^{-1} - \varepsilon, \mu^{-1} + \varepsilon)) = 1.$$

2. Oletetaan, että $\overline{F} \in R_{-\alpha}$, missä $\alpha > 1$. Olkoon $\mu < a < b$, missä a ja b ovat kiinteitä. Osoita, että

$$\mathbb{P}\left(S_n/n \in (a, b)\right) = (1 + o(1)) n \overline{F}(n(a - \mu)) \left(1 - \frac{(a-\mu)^\alpha}{(b-\mu)^\alpha}\right), \quad n \to \infty.$$

3. Olkoon F kuten edellisessä tehtävässä ja $x > 1$ kiinteä. Osoita, että

$$\liminf_{n \to \infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(S_n > n^x) \geq 1 - \alpha x.$$

4. Olkoon F kuten edellisessä tehtävässä ja $a > \mu$ ja $b \in (0, a - \mu)$. Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(S_n + M_n > n(a + b) \,|\, S_n > na) = 1.$$

5. Olkoon $a > \mu$ ja $b \in (0, a - \mu)$. Oletetaan, että X on kevythäntäinen ja että $c'(s_a) = a$ eräälle $s_a > 0$ (c on X:n kumulantit generoiva funktio). Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(S_n + M_n > n(a + b) \,|\, S_n > na) = 0.$$