Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 4, 14.11.2016

1. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia ja $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(Y > 0) = 1$. Osoita, että

a) $X + Y$ on paksuhäntäinen, jos joko X tai Y on paksuhäntäinen,

b) XY on paksuhäntäinen, jos joko X tai Y on paksuhäntäinen.

2. Olkoot Y_1 ja Y_2 riippumattomia ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Oletetaan, että Y_1 on rajoitettu eli että $\mathbb{P}(Y_1 \leq M) = 1$ eräälle $M \in \mathbb{R}$. Oletetaan lisäksi, että Y_2 on *pitkähäntäinen* eli että $\mathbb{P}(Y_2 > x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_2 > x - y)}{\mathbb{P}(Y_2 > x)} = 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 > x)}{\mathbb{P}(Y_2 > x)} = 1.$$

3. Olkoot X ja Y riippumattomia geometrisesti jakautuneita satunnaismuuttujia,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = (1 - c)c^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

missä $c \in (0, 1)$ on vakio. Osoita, että X on kevythäntäinen ja XY paksuhäntäinen.

4. Olkoot $X, X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Olkoon F yhteinen kertymäfunktio ja $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Olkoon $\overline{F}$ säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-\alpha$, missä $\alpha \geq 0$. Osoita, että kiinteällä $n \geq 2$ muuttujan M_n häntä on myös säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-\alpha$.

5. Olkoot ξ_1, ξ_2 ja ξ_3 riippumattomia ja samoin jakautuneita ei-negatiivisia satunnaismuuttujia. Olkoon yhteinen kertymäfunktio F. Oletetaan, että $\overline{F} \in R_{-\alpha}$, missä $\alpha > 0$. Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 > x, \xi_2 + \xi_3 > x)}{\overline{F}(x)} = 1.$$