Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 3, 31.10.2016

Tehtävissä 1-3 on selvitettävä, kuuluuko annettu kertymäfunktio F tyypin I, II tai III vaikutuspiiriin maksimin suhteen. Myönteisessä tapauksessa on etsittävä myös (yksinkertaiset) skaalausjonot (a_n) ja (b_n).

1. Cauchyn jakauma:

$$F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Log-normaalijakauma:

$$F(x) = \mathbb{P}\left(e^{\xi} \leq x\right),$$

missä ξ on $N(0,1)$-jakautunut. Tehtävässä oletetaan tunnetuksi, että ξ kuuluu Gumbelin jakauman vaikutuspiiriin maksimin suhteen skaalausjonoilla

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\log n}}, \quad b_n = \sqrt{2\log n} - \frac{\log\log n + \log(4\pi)}{2\sqrt{2\log n}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

3. Beta-jakauma: $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ ja

$$F'(x) = \frac{\Gamma(a+b)x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \quad x \in (0,1),$$

missä a ja b ovat positiivisia vakioita ja

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1}e^{-x}dx.$$

4. Olkoon X geometrisesti jakautunut,

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-c)c^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

missä $c \in (0,1)$ on vakio. Osoita, että X ei kuulu Gumbelin jakauman vaikutuspiiriin maksimin suhteen.

5. (jatkoa) Osoita, että X ei kuulu minkään jakauman vaikutuspiiriin maksimin suhteen.