Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 2, 10.10.2016

1. Olkoot $X_1, X_2, \ldots$ riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia odotusarvona $\mu = 1$. Olkoon $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Määrää sellaiset x_1 ja x_2, että

$$\mathbb{P}(M_n \in (x_1, x_2)) = 0.9 \text{ ja } \mathbb{P}(M_n \leq x_1) = \mathbb{P}(M_n \geq x_2),$$

kun $n = 10, 100, 1000$.

2. (jatkoa) Perustele lauseen 2.3 avulla approksimaatiota

$$\mathbb{P}(M_n \leq x + \log n) \sim e^{-e^{-x}}, \quad n \to \infty.$$

Määrää tämän avulla sellaiset x_1 ja x_2, että edellisen tehtävän vaatimukset toteutuvat likimäärin.

3. Olkoon F kertymäfunktio ja

$$x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} | F(x) < 1\} \in (-\infty, \infty].$$

Oletetaan, että F kuuluu jakauman H vaikutuspiiriin maksimin suhteen. Olkoon G sellainen kertymäfunktio, että

$$\lim_{x \to x_F -} \overline{G}(x)/\overline{F}(x) = 1.$$

Tällöin myös G kuuluu jakauman H vaikutuspiiriin maksimin suhteen. Todista tulos tapauksessa $x_F = \infty$.

4. Oletetaan lauseen 2.3.1 merkinnöin, että

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(M_n^{(2)} \leq u_n\right) = c \in (0, 1).$$

Osoita, että raja-arvo

$$\lim_{n \to \infty} n\overline{F}(u_n) \doteq \tau$$

on olemassa ja että $c = e^{-\tau} + \tau e^{-\tau}$.

5. Olkoon $F_1, F_2, \ldots$ jono kertymäfunktioita, G ei-degeneroitunut kertymäfunktio, $a_n > 0$ ja $b_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Oletetaan, että

$$F_n\left(a_{nk}x + b_{nk}\right) \xrightarrow{d} G^{1/k}(x),$$

kaikilla $k = 1, 2, \ldots$. Osoita, että G on stabiili maksimin suhteen.