Äärimmäisten ilmiöiden teoriaa, laskuharjoitus 1, 26.9.2016

1. Funktio $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ on *hitaasti vaihteleva*, jos on olemassa sellainen $x_0 > 0$, että $f(x) > 0$ kaikilla $x \geq x_0$ ja

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = 1 \quad \text{kaikilla } x > 0. \tag{$*$}$$

Jos kaavan $(*)$ sijaan on olemassa sellainen $\alpha \in (-\infty,\infty)$, että

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^{\alpha} \quad \text{kaikilla } x > 0,$$

niin f on *säännöllisesti vaihteleva indeksillä* α.

Olkoon $q \neq 0$ mielivaltainen. Osoita, että

$$f(x) = (1 + \log(x+1))^q$$

määrittelee hitaasti vaihtelevan funktion ja että

$$f : f(x) = (\sin x + 2)^q,$$

ei ole säännöllisesti vaihteleva millään indeksillä.

2. Osoita, että f on säännöllisesti vaihteleva indeksillä α, jos ja vain jos f on muotoa

$$f(x) = L(x)x^{\alpha},$$

missä L on hitaasti vaihteleva.

3. Olkoon F kertymäfunktio ja $\bar{F}$ säännöllisesti vaihteleva indeksillä α. Osoita, että $\alpha \leq 0$. Esitä esimerkki kertymäfunktiosta, jonka häntä $\bar{F}$ on hitaasti vaihteleva.

4. Olkoon $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ sellainen, että

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} \log f(x) = -\beta,$$

missä $\beta \in (0,\infty)$. Osoita, että f ei ole hitaasti vaihteleva.

5. (jatkoa) Osoita, että f ei ole säännöllisesti vaihteleva millään indeksillä.