

Liite 1

Liitteessä tarkastellaan hitaasti vaihtelevien
funktionien ominaisuuksia. Tulokset vaaditaan
tekstissä, mutta todistuksia ei.

Lähde: Bingham et al. (1987) Regular
variation. Cambridge University Press.

Lause 1.1. Ollon L hitaasti vaihteleva mitallinen
funktio. Silloin

$$\frac{L(t+x)}{L(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1 \text{ tasaisesti}$$

jokaisessa kompaktissa joukossa $K \subseteq (0, \infty)$.

Todistus. Kirjotetaan $H(x) = \log L(e^x)$. Riittää
näyttää että

$$H(t+x) - H(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \text{ tasaisesti}$$

jokaisessa joukossa $[0, A]$, $A > 0$.

Ollon $c \in (0, A)$ ja $\varepsilon > 0$ pieni. Mieli valittaiselle
 $x > 0$ kirjotetaan

$$\begin{cases} I_x = [x, x+2A], \\ E_x = \{t \in I_x : |H(t) - H(x)| \geq \varepsilon\}, \\ E_x^* = \{t \in [0, 2A] : |H(t+x) - H(x)| \geq \varepsilon\}. \end{cases}$$

Tällöin $m(E_x) = m(E_x^*)$, missä m tarkoittaa
Lebesgue-mittaa. Koska $H(t+x) - H(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$,
niin

$$m(E_x^*) \rightarrow 0, \text{ kun } x \rightarrow \infty,$$

Ollon x_0 sellainen, että $m(E_x) < \varepsilon$, kun $x > x_0$.

Jos $c \in [0, A]$, niin

$$m(I_x \cap I_{x+c}) = m([x+c, x+2A]) = 2A - c \geq A.$$

Toisaalta

$$m(E_x \cup E_{x+c}) \leq m(E_x^*) + m(E_{x+c}^*) < 2\varepsilon.$$

Valitsemalla ε pieneksi päästään tilanteeseen, jossa

$$m((I_x \cap I_{x+c}) \setminus (E_x \cup E_{x+c})) > 0.$$

Jos $x_0 \in (I_x \cap I_{x+c}) \setminus (E_x \cup E_{x+c})$, niin

$$|H(x_0) - H(x)| < \varepsilon$$

ja

$$|H(x_0) - H(x+c)| < \varepsilon,$$

Sis kaikilla $c \in [0, A]$ ja $x > x_0$,

$$|H(x+c) - H(x)| < 2\varepsilon. \quad \square$$

Seuraava L2. Jos L on hitaasti vaihteleva mitallinen funktio, niin on olemassa $x_0 > 0$ siten, että

$$\sup_{x \in [x_0, T]} L(x) < \infty$$

kaikilla $T > x_0$.

Todistus. Olkoon $H(x) = \log L(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Lauseen L1 nojalla voidaan määritellä sellainen x_0 ,
että

$$|H(x+u) - H(x)| < 1$$

kaikilla $u \in [0, 1]$, $x \geq x_0$. Sits

$$|H(x)| \leq 1 + |H(x_0)|$$

kaikilla $x \in [x_0, x_0 + 1]$. Induktioilla nähdään, että

$$|H(x)| \leq n + |H(x_0)|$$

kaikilla $x \in [x_0, x_0 + n]$. Saman tyyppinen
tulos pätee luonnollisesti funktiolle L . \square

Lause L3, Mitallinen funktio $L: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ on hitaasti vaihteleva, jos ja vain jos se on muotoa

$$L(x) = c(x) \exp\left(\int_a^x \frac{\varepsilon(u)}{u} du\right)$$

kaikilla $x \geq a$ eäälle $a > 0$, missä c ja ε ovat mitallisia, $c(x) \rightarrow c \in (0, \infty)$ ja $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, kun $x \rightarrow \infty$,

Toadistus. Olkoon L hitaasti vaihteleva ja

$$H(x) = \log L(e^x)$$

kuuten aiemminkin, Senanksen $L2$ nojalla

$$\int_{x_0}^T H(t) dt < \infty$$

kaikilla $T > x_0$ eäälle $x_0 > 0$. Jos x on suuri, niin

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_x^{x+1} (H(x) - H(t)) dt \\ &+ \int_{x_0}^x (H(t+1) - H(t)) dt \\ &+ \int_{x_0}^{x_0+1} H(t) dt. \end{aligned}$$

Selvästi

$$H(x+1) - H(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

ja

$$\begin{aligned} &\int_x^{x+1} (H(x) - H(t)) dt \\ &= \int_0^1 (H(x) - H(x+t)) dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

dominoivan konvergenssin ja lauseen $L1$ nojalla.

Sis

$$H(x) = d(x) + \int_{x_0}^x e(t) dt,$$

mistä

$$e(t) = H(t+1) - H(t)$$

$$d(x) = \int_{x_0}^{x_0+1} H(t) dt + \int_0^1 (H(x) - H(x+t)) dt.$$

Edellä saadun tuloksen nojalla $e(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$,
ja

$$\left\{ \begin{array}{l} d(x) = c + \int_0^1 (H(x) - H(x+t)) dt \rightarrow c, x \rightarrow \infty, \\ c = \int_{x_0}^{x_0+1} H(t) dt. \end{array} \right.$$

Sisäpä

$$\begin{aligned} L(x) &= e^{H(\log x)} \\ &= e^{d(\log x)} e^{\int_{x_0}^{\log x} e(t) dt} \\ &= c(x) e^{\int_a^x \frac{e(t)}{t} dt}, \end{aligned}$$

mistä $a = e^{x_0}$, $c(x) = e^{d(\log x)}$, $e(t) = e(\log t)$.

Saadusta tuloksesta seuraa väädiän esitys.

Kääntäisen tuloksen todistaminen on suoraviivainen. \square

Samaus L4. Lauseen L3 oletuksiin

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)^{-1} \log L(x) = 0.$$

Todistus. Suoraviivainen. \square