

YLIOPISTOMATEMATIIKKA AINEENOPETTAJAN NÄKÖKULMASTA (SYKSY 2015)

POHDINTATEHTÄVIÄ

Case 1: Yhtälönratkaisu

Mietitään seuraavaa tehtävää: "Määritä funktion $f(x) = \sqrt{5-2x} + 2x - 3$ nollakohdat". Eräässä lukion oppikirjassa esitettiin tehtävälle kaksi ratkaisutapaa. Aluksi selvitetään funktion $f(x) = \sqrt{5-2x} + 2x - 3$ määrittelyjoukko seuraavalla päättelyllä:

$$\begin{aligned} 5 - 2x &\geq 0 \\ -2x &\geq -5 && | : (-2) < 0 && \text{Epäyhtälön suunta vaihtuu.} \\ x &\leq \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Tämän jälkeen korotetaan yhtälön $\sqrt{5-2x} = 3-2x$ molemmat puolet potenssiin kaksi. Korotuksen jälkeen tarkastelu jakautuu kahteen ratkaisutapaan.

Tapa 1: tarkastamismenetelmä. Tarkastamismenetelmässä yhtälön mahdollisiksi ratkaisuehdoksi saadaan $x = 2$ tai $x = 1/2$, joiden molempien todetaan kuuluvan funktion määrittelyjoukkoon. Sijoittamalla juuret yhtälöön $\sqrt{5-2x} = 3-2x$ huomataan kuitenkin, että juuri $x = 2$ ei toteuta yhtälöä, mutta juuri $x = 1/2$ toteuttaa.

Tapa 2: neliöönkorotusehto. Toisessa selvitetään millä luvuilla x yhtälön $\sqrt{5-2x} = 3-2x$ oikea puoli on epänegatiivinen seuraavalla päättelyllä:

$$\begin{aligned} 3 - 2x &\geq 0 \\ -2x &\geq -3 && | : (-2) < 0 \\ x &\leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Näin yhtälön $\sqrt{5-2x} = 3-2x$ neliöönkorotusehdoksi saadaan $x \leq 3/2$. Saaduista juurista vain $x = 1/2$ toteuttaa neliöönkorotusehdon.

Mistä on kyse? Mihin nämä ratkaisutavat perustuvat?

Case 2: Todistusajattelu

Oona Opettajan matematiikan tunnilla mietittiin, onko totta, että kahden parillisen luvun summa on parillinen ja miten väitteen voisi osoittaa todeksi tai epätodeksi. Oonan oppilaat kehittivät muutamia erilaisia ratkaisuja ja lähes kaikki olivat sitä mieltä, että väite on totta. Suurin osa kehitti väitteelle Kaarinan tai Nellin ratkaisua muistuttavan todistuksen. Oona kysyi oppilailtaan, mistä ratkaisusta he luulisivat tulevan parhaat pisteet kokeessa. Oppilaat uskoivat, että Markon ratkaisusta tulisi parhaat pisteet kokeessa. Miksi ihmeessä Markon ratkaisua pidettiin parhaana? Mitä vahvuuksia kullakin ratkaisulla on? Mitä heikkouksia kullakin ratkaisulla on?

<p>Artturin ratkaisu:</p> <p>a on mikä tahansa kokonaisluku</p> <p>b on mikä tahansa kokonaisluku</p> <p>$2a$ ja $2b$ ovat mitä tahansa parillisia kokonaislukuja</p> <p>$2a + 2b = 2(a+b)$</p>	<p>Markon ratkaisu:</p> <p>Olkoon x mikä tahansa kokonaisluku ja y mikä tahansa kokonaisluku.</p> <p>$x+y = z$</p> <p>$z-x = y$</p> <p>$z-y = x$</p> <p>$z+z - (x+y) = x+y = 2z$</p>
<p>Vivianin ratkaisu:</p> <p>Parilliset luvut ovat sellaisia, jotka voidaan jakaa kahdella. Jos lasketaan yhteen luvut joilla on jokin yhteinen tekijä -- tässä tapauksessa luku 2 -- saadaan tuloksena luku, jolla on myöskin tekijänä kyseinen luku.</p>	<p>Kaarinan ratkaisu:</p> <p>Parilliset luvut loppuvat aina numeroon 0,2,4,6 tai 8. Jos näitä lasketaan yhteen, vastauksena saatu luku loppuu myöskin numeroon 0,2,4,6 tai 8.</p>
<p>Nellin ratkaisu:</p> <p>$2+2 = 4, 2+4=6, 2+6 = 8$</p> <p>$4+2 = 6, 4+4 = 8, 4+6 = 10$</p>	<p>Taavin ratkaisu:</p> <p>..... + =</p>