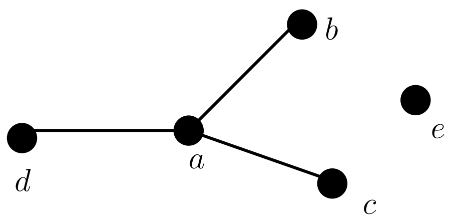
Verkot, elokuu 2014
Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Kertaustehtävät.
Ratkaisuehdotukset.

1. Luokkitele isomorfiaa vaille kaikki viiden pisteen verkot, joissa on 7 viivaa. Piirrä kuva jokaisesta mallista.

Ratkaisu: Täydellisessä viiden pisteen verkossa on $5 \cdot 4/2 = 10$ viivaa. Näin ollen, jos viiden solmun verkossa G on 7 viivaa, sen komplementissa $\tilde{G}$ on $10 - 7 = 3$ viivaa. Koska verkot G ja G' ovat isomorfisia jos ja vain jos niiden komplementit $\tilde{G}$ ja $\tilde{G}'$ ovat isomorfisia, riittää luokitella isomorfiaa vaille sellaisia viiden pisteen verkkoja H, joissa on tasan kolme viivaa.

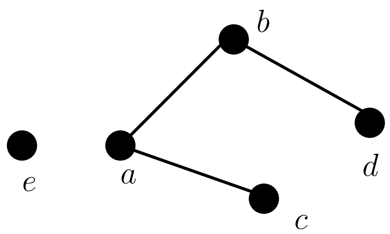
Olkoot v_1, v_2, v_3 viivat viiden pisteen verkossa H. Tällöin ne eivät voi olla "täysin erillisiä" eli ei voi olla niin, että millään kahdella niistä ei ole yhteisiä päätepisteitä. Tämä johtuu siitä, että tällöin verkossa olisi ainakin 6 *erilaista* pistettä (viivojen v_1, v_2, v_3 päätepisteet), mikä on vastoin oletusta.
Näin ollen ainakin kahdella eri viivalla on yksi yhteinen päätepiste, merkitään niitä $v_1 = \overline{ab}$ ja $v_2 = \overline{ac}$, $b \neq c$.
Tarkastellaan kolmatta viivaa v_3.

Tapaus 1: Piste a on myös viivan v_3 päätepiste, tällöin $v_3 = \overline{ad}$ ja verkko näyttää tällaiselta:



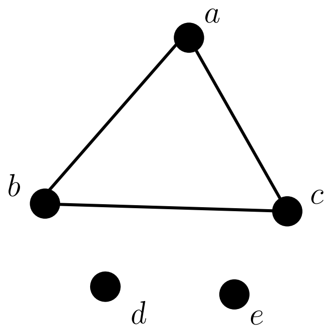
Verkko H_1

Tapaus 2: Jompikumpi pisteistä b, c on viivan v_3 päätepiste, mutta ei molemmat. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että $v_3 = \overline{bd}$. Tällöin verkko näyttää tältä:



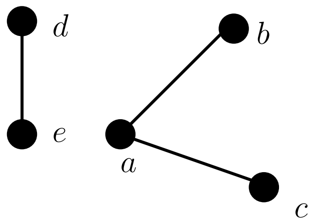
Verkko H_2

Tapaus 3: Viivat muodostavat kolmion:



Verkko H_3

Tapaus 4: Jäljellä on tapaus jossa viivalla v_3 ei ole yhteisiä päätepisteittä viivojen v_1 ja v_2 kanssa. Tällöin verkon on pakko olla tällainen:

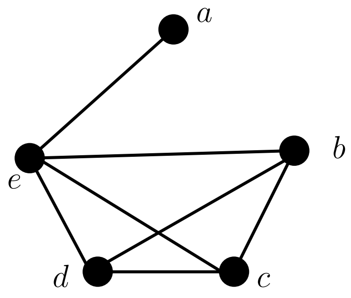


Verkko H_4

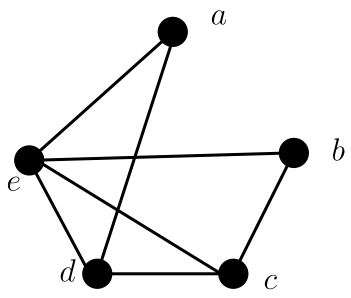
Tarkistetaan, että kaikki löydetyt verkot H_1, H_2, H_3, H_4 ovat pareittain ei-isomorfisia.
Verkossa H_1 on piste, jonka aste on kolme, kun taas verkoissa H_2, H_3 ja H_4 tällaisia pisteitä ei ole.
Verkossa H_2 on yksi eristetty piste, verkossa H_3 eristettyjä pisteitä on tasan kaksi, kun taas verkossa H_3 eristettyjä pisteitä ei ole.

Näin ollen isomorfiaa vaille on olemassa tasan neljä viiden pisteen verkkoa, joissa on kolme viivaa.
Meitä kuitenkin pyydettiin luokittelemaan isomorfiaa vaille kaikkia viiden pisten verkkoja, joissa on seitsemän viivaa, joten pitää vielä siirtyä komplementteihin. Nämä on esitetty kuvina alla.

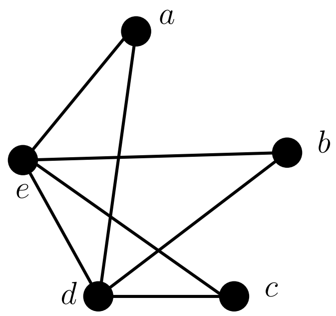
Isomorfiaa vaille kaikki erilaiset viiden pisteet verkot, joissa 7 viivaa:



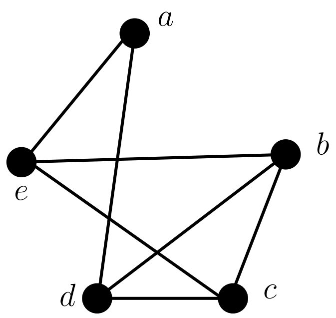
Verkko $G_1 = \tilde{H}_1$



Verkko $G_2 = \tilde{H}_2$



Verkko $G_3 = \tilde{H}_3$



Verkko $G_4 = \tilde{H}_4$

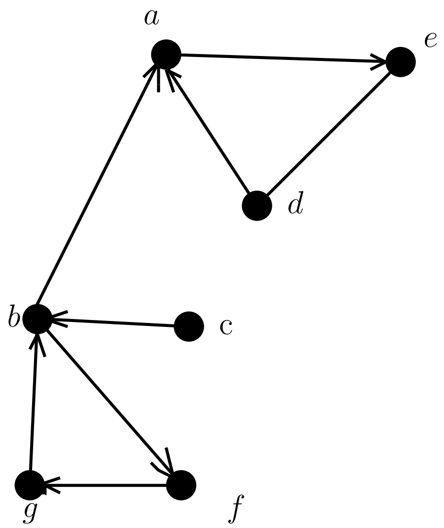
2. Olkoon suhteikon G pistejoukko $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ ja seuraajaluettelot

$$a: \ e; \ c: \ b; \ e: \ d; \ g: b;$$

$$b: \ a, f; \ d: \ a, e; \ f: \ g.$$

Määrää suhteikon G vahvasti yhtenäiset komponentit. Osoita, että suhteikossa ei ole Hamiltonin kulkua, vaikka se on yhtenäinen.

Ratkaisu: Piirretään selkeyden vuoksi ensin kuva suhteikosta:



Pisteeseen c ei saavu yhtään nuolta, joten c virittää triviaalin yhtenäisen komponentinsa $H_1 = (\{c\}, \varnothing)$. Perustelu: jos pisteen c vahvasti yhtenäiseen komponenttiin H_1 kuuluisi muita pisteitä, yksiö $\{c\}$ olisi H_1:n solmujoukon aito ja epätyhjä osajoukko, joten H_1:ssä olisi nuoli tähän joukkoon, mutta sellaista ei löydy edes koko suhteikosta G. Näin ollen H_1 pistejoukko on yksiö $\{c\}$. Tästä seuraa, että jos H_1:ssä olisi nuoli, tämän nuolen olisi pakko olla silmukka c:ssä, mutta suhteikossa ei ole sellaista nuolta. Näin ollen myös H_1:n relaation on pakko olla tyhjä.

Pisteet a, d, e muodostavat syklin (eli kierroksen) (a, e, d, a). Koska kierroksen määräämä suhteikko on vahvasti yhtenäinen, näiden pisteiden virittämä alisuhteikko H_2 on vahvasti yhtenäinen. Huomaa, että H_2 **ei ole** kierroksen (a, e, d, a) määräämä suhteikko K, koska jälkimmäisestä puuttuu nuoli $\overrightarrow{de}$, joka on H_2:ssä. Kuitenkin K on syklin määräämänä vahvasti yhtenäinen, $K < H_2$ ja $P_{H_2} = P_K$. Tiedetään, että näillä oletuksilla myös H_2:n on oltava vahvasti yhtenäinen (tai siitäkin syystä, että siinä on kierros, joka käy jokaisen pisteen kautta). Joukko-opillinen määritelmä suhteikolle H_2 on

$$H_2 = (\{a, d, e\}, \{(e, a), (e, d), (d, e), (a, d)\}),$$

mutta riittää sanoa vain, että se on pistejoukon $\{e, a, d\}$ virittämä alisuhteikko.

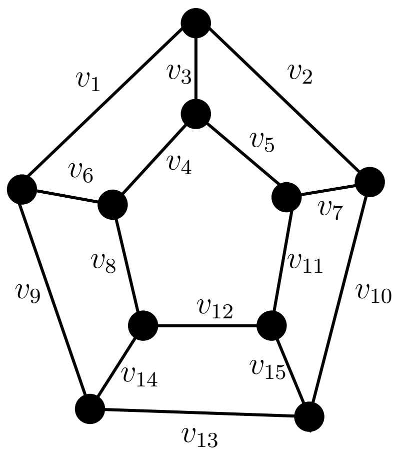
Olemme näyttäneet, että H_2 on vahvasti yhtenäinen, mutta se ei vielä riitä päättelemään, että se olisi vahvasti yhtenäinen komponentti. Näytetään, että näin kuitenkin on. Täytyy siis osoittaa, että H_2 on *maksimaalinen* vahvasti yhtenäinen alisuhteikko. Olkoon K suhteikon G vahvasti yhtenäinen alisuhteikko, $H_2 < K$. Osoitetaan ensin, että $P_{H_2} = P_K$. Tehdään vasta-oletus, tällöin P_{H_2} on joukon P_K epätyhjä ja aito osajoukko. Koska oletamme K vahvasti yhtenäiseksi, suhteikossa K on olemassa nuoli joukosta P_{H_2} ja nuoli joukkoon P_{H_2}. Mutta edes koko suhteikossa G ei ole nuolta joukosta $P_{H_2} = \{a, e, d\}$. Saatu ristiriita osoittaa, että $P_{H_2} = P_K$. Lisäksi K ei voi sisältää nuolia, jotka eivät olisi H_2:ssä, sillä H_2 on pistejoukonsa P_{H_2} virittämä alisuhteikko. Näin ollen $H_2 = K$, joten H_2 on maksimaalinen vahvasti yhtenäinen suhteikko. Olemme näyttäneet, että H_2 on vahvasti yhtenäinen komponentti.

Jäljellä olevat pisteet b, f, g virittävät oman vahvasti yhtenäisen komponentin H_3. Tarkemmin, olkoon H_3 pistejoukon $\{b, g, f\}$ virittämä G:n alisuhteikko. Tämä suhteikko on vahvasti yhtenäinen, koska siinä on kierros (b, f, g, b), joka käy jokaisessa pisteessä. Koska kaikki muut suhteikon pisteet osoitettiin jo olevan toisissa, omissa vahv. yhtenäisissä komponenteissa, H_3 on oltava komponentti.

Suhteikko G on yhtenäinen, sillä sen symmetrisessä sulkeumassa G^s on kulku $(a, e, d, a, b, c, b, f, g)$, joka käy sen jokaisessa pisteessä.
Suhteikossa G ei ole Hamiltonin kulkua. Nimittäin olkoon $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ tällainen kulku. Koska $d_+(c) = 0$, kulun pitää alkaa pisteessä $c = x_0$ ja mennä seuraavasti pisteseen $b = x_1$. Seuraavaksi kulku voi mennä joko a:han tai f:ään. Jos se menee a:han, se ei voi enää palata pisteseen f, sillä ainoa tapa päästää f:ään on b:n kautta. Jos se taas menee f:ään, seuraavaksi sen on pakko mennä g:hen ja seuraavaksi sen on pakko palata b:hen, tai loppua g:ssä. Jos se palaa b:hen, kulku ei ole yksinkertainen. Jos kulku loppuu g:hen, se ei ole vielä käynyt kaikissa pisteissä.

3. Tarkastellaan seuraavassa kuvassa esitettyä verkkoa G ja sen viivajoukkoa

$$V_G = \{v_i \mid i = 1, \ldots, 15\}.$$

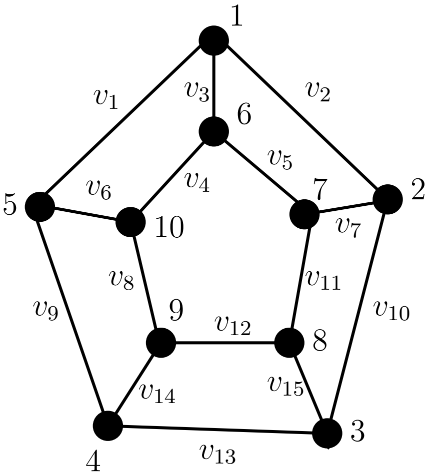


Olkoot

$$R_1 = \{v_1, v_3, v_4, v_6, v_7, v_{10}, v_{11}, v_{15}\},$$
$$R_2 = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}\},$$
$$R_3 = \{v_i \mid i = 1, \ldots, 7\}.$$

a) Osoita, että R_1 ja R_2 ovat renkaistoja, mutta R_3 ei ole.
b) Esitä $R_1 \triangle R_2$ erillisten renkkaiden yhdisteenä.

Ratkaisu: Nimitetään ensin solmut:



a) Olkoot

$$V_1 = \{v_1, v_3, v_4, v_6\},$$

$$V_2 = \{v_7, v_{10}, v_{11}, v_{15}\}.$$

Tällöin V_1 ja V_2 ovat molemmat renkaita, koska V_1 on sykliin $(1, 6, 10, 5, 1)$ liittyvä viivajoukko ja V_2 on sykliin $(2, 3, 8, 7, 2)$ liittyvä viivajoukko. Lisäksi $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Näin ollen $R_1 = V_1 \cup V_2$ on kahden renkaan erillinen yhdiste, joten se on rengas.

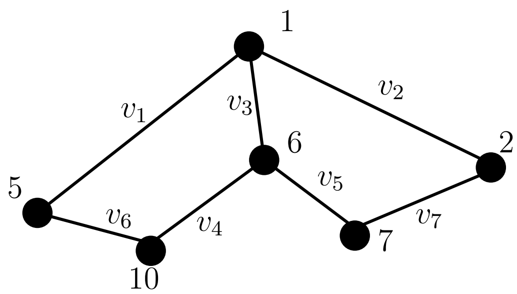
Vastaavasti, jos määritellään

$$W_1 = \{v_1, v_2, v_9, v_{10}, v_{13}\},$$

$$W_2 = \{v_4, v_5, v_8, v_{11}, v_{12}\},$$

niin W_1 ja W_2 ovat molemmat renkaita, koska W_1 on sykliin $(1, 2, 3, 4, 5, 1)$ liittyvä viivajoukko ja W_2 on sykliin $(6, 7, 8, 9, 10, 6)$ liittyvä viivajoukko. Lisäksi $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Näin ollen $R_2 = W_1 \cup W_2$ on kahden renkaan erillinen yhdiste, joten se on rengas.

Tarkastellaan viivajoukon R_3 virittämää aliverkkoa:



Tässä verkossa on olemassa paritonasteisia pisteitä (pisteet 1 ja 6). Näin ollen Lauseen III 2.3 nojalla R_3 ei voi olla renkaisto.

Huomautus: Vaikka R_3 on helposti esitettävissä kahden ei-erillisen renkaan yhdisteenä, tämä ei vielä siinänsä takaa sen, että se ei voisi olla renkaisto.

b) Määritelmän mukaan

$$R_1 \triangle R_2 = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{12}, v_{13}, v_{15}\}.$$

Tämä joukko on renkkaiden

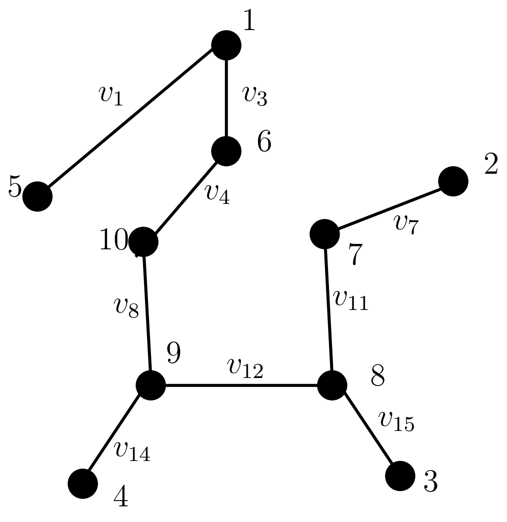
$$Z_1 = \{v_2, v_3, v_5, v_7\} \text{ ja}$$

$$Z_2 = \{v_6, v_8, v_9, v_{12}, v_{13}, v_{15}\}$$

erillinen yhdiste. Z_1 on rengas, koska se on sykliin $(1, 2, 7, 6, 1)$ määräämä viivajoukko. Z_2 on rengas, koska se on sykliin $(3, 4, 5, 10, 9, 8, 3)$ määräämä viivajoukko.

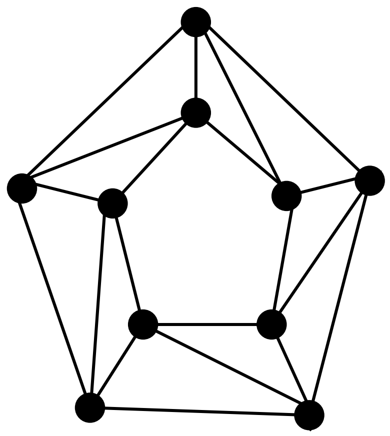
4. Olkoon verkko kuten edellisessä tehtävässä. Määritä verkolle jokin virittävä puu T, joka sisältää viivat v_1, v_3, v_4 ja v_{11}. Kuinka monta lehteä konstruoimallasi puulla T on?

Ratkaisu: Koska verkossa G on 10 pistettä, sen virittävässä puussa on oltava $10 - 1 = 9$ viivaa.
Viivojen v_1, v_3, v_4, v_{11} virittämä aliverkko on renkaaton, joten se voidaan täydentää virittäväksi puuksi, esimerkiksi ahneella algoritmilla (tai kokeilemalla). Saadaan (esimerkiksi) seuraava virittävä puu T:

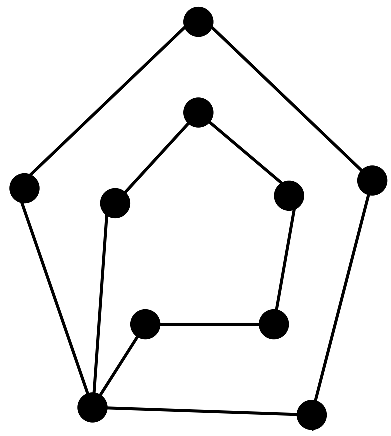


Tällä puulla on 4 lehteä. Tämä on tietysti vain yksi esimerkki puusta, joka toteuttaa tehtävänannon.

5. Tutki kummankin kuvassa alla esitetyn verkon G, G' kohdalla löytyykö verkosta a) Hamiltonin kierros, b) Eulerin kierros.
Myönteisessä tapauksessa esitä kierros.

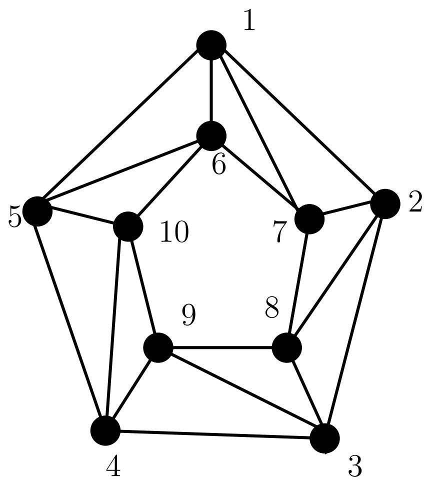


Verkko G

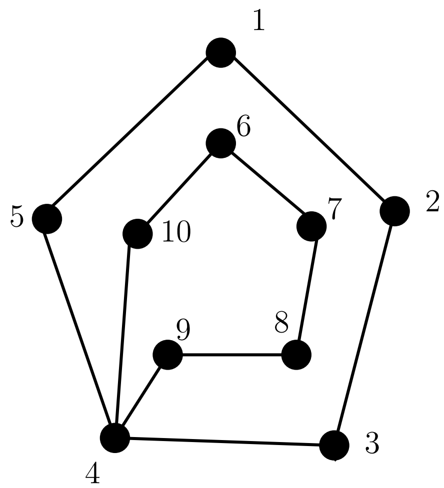


Verkko G'

Ratkaisu: Aloitetaan nimeämällä verkkojen pisteitä:



Verkko G



Verkko G'

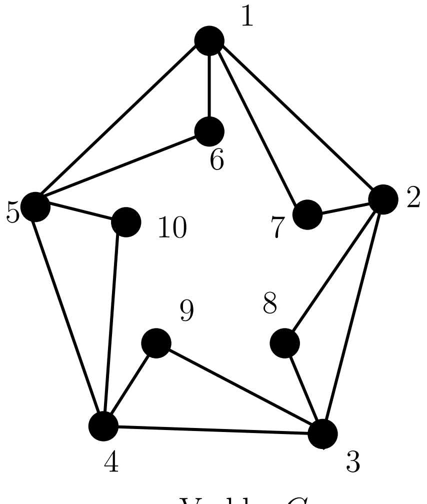
a) Verkossa G on Hamiltonin kierros, joka ei ole vaikeata keksiä - esimerkiksi kierros $(1, 2, 3, 4, 5, 10, 9, 8, 7, 6, 1)$.

Verkossa G' ei ole Hamiltonin kierrosta. Nimittäin, verkon G' kaikkien pisteiden aste on tasan kaksi, paitsi pisteen 4 aste on neljä. Tunnetusti kun Hamiltonin kierros kulkee sellaisen pisteen x kautta, jolle pätee $d(x) = 2$, sen on pakko kulkea molempia x:ään liittyviä viivoja pitkin. Koska verkon *jokaisella* viivalla on päätepiste, jonka aste on kaksi, tästä seuraa, että verkon jokaisen viivan on pakko esiintyä Hamiltonin kierroksessa. Erityisesti kaikki pisteeseen 4 liityvät viivat, joita on 4, ovat Hamiltonin kierroksessa. Tämä on kuitenkin vastoin kierroksen yksinkertaisuutta - jokaisessa yksinkertaisessa kulussa $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ voi jokaiseen kulussa esiintyvän pisteen x_i liityvistä viivoista esiintyä korkeintaan kaksi - viiva $\overline{x_{i-1}x_i}$ ja viiva $\overline{x_i x_{i+1}}$. Saatu ristiriita osoittaa sen, että Hamiltonin kierros verkossa G' on mahdoton.

b) Lauseen III 3.4 nojalla yhtenäisessä verkossa on olemassa Eulerin kierros jos ja vain jos verkon jokaisen pisteen aste on parillinen. Helposti nähdään, että molemmat verkot G, G' toteuttavat tämän ehdon (ja ovat selvästi yhtenäisiä). Näin ollen kummassakin on Eulerin kierros.

Yksi tapa löytää itse kierros on tietysti yksinkertaisesti kokeilemalla. Jos se ei kuitenkaan onnistu, voidaan soveltaa käytännössä samaa menetelmää, joka on käytetty Lemmassa III 3.3 sen osoittamiseksi, että parillisasteisessa (yhtenäisessä) verkossa on Eulerin kierros. Nimittäin esitetään tarkasteltavan verkon K viivajoukko V_K renkaistoina eli n renkkaan $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}, R_n$ *erillisenä* yhdisteenä. Poistetaan verkosta K renkkaan R_n viivat (säilytetään kaikki pisteet!), jolloin saadaan verkko K', jonka viivajoukko on $(n-1)$:n renkkaan $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ erillinen yhdiste. Oletetaan induktiivisesti, että olemme löytäneet K':ssä Eulerin kierros $\bar{x}$. Yhtenäisyyden nojalla viivajoukon R_n virittämällä aliverkolla ja kierroksella $\bar{x}$ on oltava yhteinen piste, voidaan olettaa, että se on piste x_0 (perustelu sille, miksi näin on löytyy Lemman III 3.4 todistuksessa). Yhdistämällä kulku $\bar{x}$ ja renkaaseen R_n liityvä yksinkertainen kierros, joka alkaa pisteessä x_0, saadaan Eulerin kulku verkossa G.
Eulerin kulku verkossa K' voidaan löytää samalla tavalla vähentämällä renkkaiden määrä. Alussa kun $n = 1$ rengas R_1 antaa Eulerin kierroksen sen virittämässä aliverkossa.

Käytännössä siis voidaan tehdä seuraavasti - löydetään verkossa jokin rengas, poistetaan se ja yritetään löytää näin saadussa pienemmässä verkossa Eulerin kierros. Tarvittaessa temppu toistetaan pienemmässä verkossa. Esimerkiksi verkossa G voidaan havaita kierros $(6, 7, 8, 9, 10, 6)$ (”sisäpisteiden” muodostama). Poistamalla se verkosta saadaan seuraava verkko G_1:



Verkko G_1

Riittää löytää tässä verkossa Eulerin kulku, joka alkaa esimerkiksi pisteessä 6. Jos sellainen ei löydy muuten, menetelmä voidaan toistaa verkolle G_1. Havaitaan, että verkon ”ulkopisteet” muodostavat kierroksen $\bar{x}_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 1)$, joka määrää yhden verkon renkaan

$$R_1 = \{\overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{45}, \overline{51}\}.$$

Jos tämä rengas poistetaan verkosta G_1, jäljellä on tasan yksi rengas

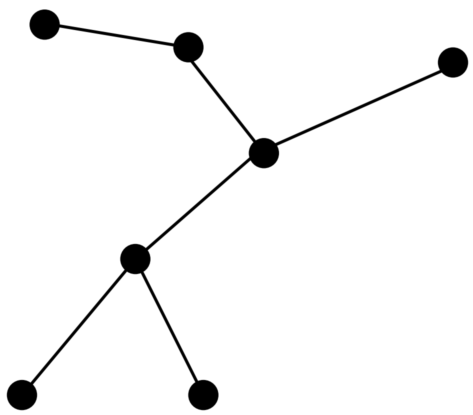
$$R_2 = \{\overline{16}, \overline{65}, \overline{5,10}, \overline{10,4}, \overline{49}, \overline{93}, \overline{38}, \overline{82}, \overline{27}, \overline{71}\},$$

joka on kierroksen $\bar{x}_2 = (1, 6, 5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1)$ määräämä. "Sovittamalla" kierrokset $\bar{x}_1$ ja $\bar{x}_2$ saadaan Eulerin kierros $(1, 2, 3, 4, 5, 1, 6, 5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1)$ verkossa G_1.
Nyt palataan takaisin verkkoon G ja "lisätään" tähän kierroksen poistettu kierros $(6, 7, 8, 9, 10, 6)$. Tämä voidaan tehdä esimerkiksi "lisäämällä" se pisteen 6 kohdalla, jolloin saadaan seuraava Eulerin kierros verkossa G:

$$(1, 2, 3, 4, 5, 1, 6, 7, 8, 9, 10, 6, 5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1).$$

Vastaavalla tavalla nähdään, että verkossa G' kierrokset $(4, 5, 1, 2, 3, 4)$ ja $(4, 9, 8, 7, 6, 10, 4)$ ovat "viivavieraita" eli määräävät erillisiä renkaita, joiden yhdiste on verkon viivajoukko. Yhdistämällä niitä saadaan Eulerin kierros $(4, 5, 1, 2, 3, 4, 9, 8, 7, 6, 10, 4)$.

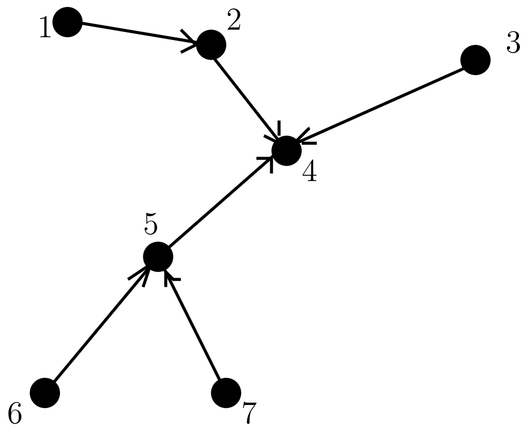
6. Olkoon T kuvassa alla esitetty puu. Keksi puulle sellainen yksisuuntaistus $\overrightarrow{T}$ jonka jokaisen kulun pituus on korkeintaan kaksi ja jossa on ainakin kolme erilaista kulkua, joiden pituus on kaksi. Riittää antaa piirros suhteikosta $\overrightarrow{T}$ ja esittää sen kolme erilaista kulkua, joiden pituus on kaksi.



puu T

Ratkaisu:

Esimerkiksi tällainen yksisuuntaistus käy ratkaisuksi:



$(1, 2, 4)$, $(6, 5, 4)$ ja $(7, 5, 4)$ ovat tämän suhteikon erilaisia kulkuja, joiden pituus on kaksi.
Huomaa erityisesti, että kulkujen *erilaisuus* ei edellytä sitä, että ne olisivat "pistevieraita", kunhan ne eivät ole pistejonoina aivan samat.
Edellä mainitut kulut ovat itse asiassa ratkaisuna annetun puun ainoat 2-kulut.

7. Jatkoa edelliselle tehtävälle. Määrää konstruoimasi yksisuuntaistuksen $\overrightarrow{T}$ vahvasti yhtenäiset komponentit. Onko suhteikolla $\overrightarrow{T}$ juuri? Jos on, onko se yksikäsitteinen?

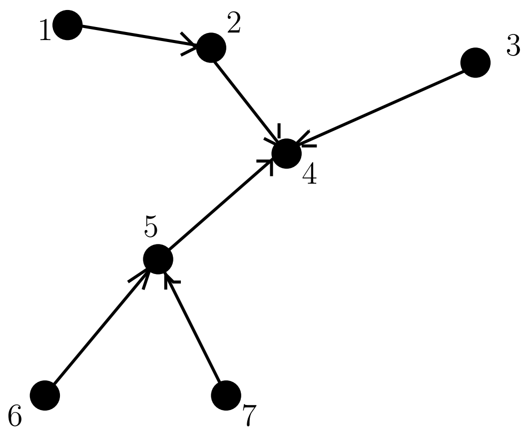
Ratkaisu: Voidaan käyttää edellisen tehtävän ratkaisuna annettua yksisuuntaistusta $\overrightarrow{T}$, mutta itse asiassa sillä ei ole mitään väliä, sillä yleisesti pätee seuraava väite:
Olkoon S yksisuuntainen suhteikko, jonka symmetrinen sulkeuma S^s on puu. Tällöin suhteikon S vahvasti yhtenäiset komponentit ovat yksiöiden virittämiä triviaaleja alisuhteikkoja $H_x = (\{x\}, \emptyset)$, $x \in P_S$.

Osoitetaan tämä väite. Olkoon H suhteikon S vahvasti yhtenäinen alisuhteikko. Osoitetaan, että H ei voi sisältää kahta erilaista pistettä x, y, $x \neq y$. Tehdään vasta-oletus: $x, y \in H$, $x \neq y$. Tällöin, koska H on vahvasti yhtenäinen, on olemassa yksinkertainen kulku $\bar{x} = (x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y)$ pisteestä x pisteseen y suhteikossa S ja on olemassa yksikertainen kulku $\bar{y} = (y_0 = y, y_1, \ldots, y_m = x)$ pisteestä x pisteseen y suhteikossa S. Koska pisteet x ja y ovat erilaisia, kummankin kulun pituus on vähintään yksi, joten $x_1 \neq x_0 = x$.

Kulku $\bar{x} = (x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y)$ on yhtä hyvin yksinkertainen kulku pisteestä x pisteseen y symmetrisessä sulkeumassa S^s. "Kääntämällä" tämän kulun kulkusuuntaa (tätähän ei voi tehdä suhteikossa S!) verkossa S^s, saadaan kulku $\bar{y}' = (x_n = y, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0 = x)$ pisteestä y pisteseen x verkossa S^s. Toisaalta myös kulku $\bar{y} = (y_0 = y, y_1, \ldots, y_m = x)$ on yksikertainen kulku pisteestä y pisteseen x verkossa S^s. Oletusten mukaan S on puu ja puussa yksinkertainen kulku kahden pisteen välillä on yksikäsitteinen. Toisin sanoen on pakko olla $\bar{y} = \bar{y}'$ eli $n = m$, $x_i = y_{n-i}$ kaikilla $i = 0, \ldots, n$.
Koska $\bar{x} = (x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y)$ on kulku suhteikossa S, jälkimmäisessä on nuoli $\overrightarrow{x_0 x_1}$. Toisaalta, koska $\bar{y}'$ on myös kulku suhteikossa S, myös $\overrightarrow{x_1 x_0}$ on (sen eräänä askeltena) suhteikon S nuoli. Kuitenkin $x_0 \neq x_1$ ja S on yksisuuntainen suhteikko,

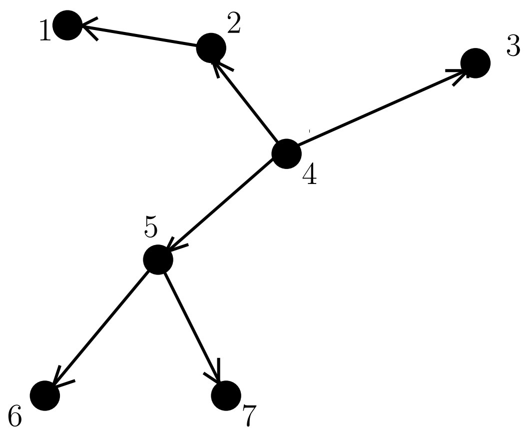
joten ei se voi sisältää molempia nuolia $\overrightarrow{x_0x_1}$ ja $\overrightarrow{x_1x_0}$.
Saatu ristiriita osoittaa sen, että vahvasti yhtenäinen alisuhteikko $H < S$ ei voi sisältää kahta erilaista pistettä.
Erityisesti jokaisen komponentin on pakko olla yksiön virittämä (huom, epätyhjän suhteikon vahv. yhtenäisen komponentin pistejoukko ei voi olla tyhjä). Koska S ei sisällä silmukoita (sillä S^s on verkko), tästä seuraa, että mikä tahansa vahvasti yhtenäinen komponentti ei sisällä nuolia lainkaan. Väite on osoitettu.

Edellisen tehtävän ratkaisun yhteydessä annetulla suhteikolla ei ole juuria. Tässä on kuva suhteikosta:



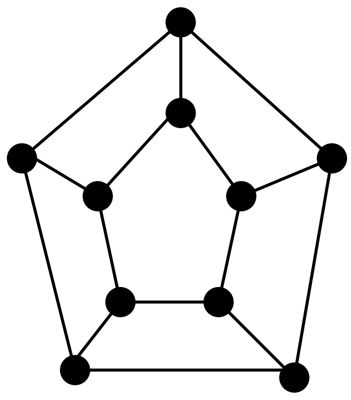
Kuvasta nähdään, että suhteikolla on paljon pisteitä, joille $d_+(x) = 0$, esimerkiksi 1 ja 3. Jos suhteikolla olisi juuri, ainoastaan juurella olisi voinut olla ominaisuus $d_+(x) = 0$. Näin ollen suhteikolla ei ole juurta.

Jos sen sijaan kaikki suhteikon nuolet "käännetään", saadaan edellisen tehtävän ratkaisuksi kelpaava suhteikko, jolla on ainoana juurena piste 4:

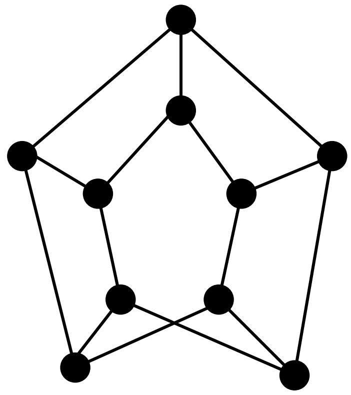


Näin ollen, riippuen edellisen tehtävän ratkaisusta juuria voi olla nolla tai yksi. Enemmän kuin yhtä juurta ei voi olla, sillä puun yksisuuntaistuksella voi olla korkeintaan yksi juuri.

8. Tutki ovatko kuvassa alla esitetyt verkot G, G' isomorfisia.



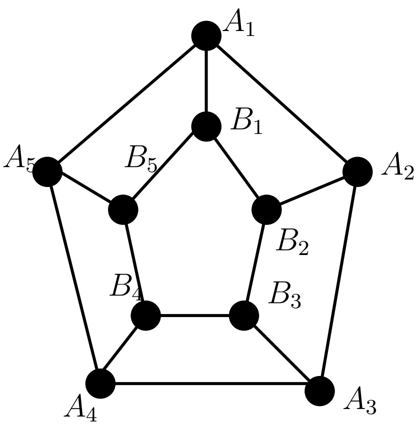
Verkko G



Verkko G'

Ratkaisu: Verkot eivät ole isomorfisia. Yksi tapa todistaa tämän on käyttää kulkuetäisyyksiä. Ennen sitä huomataan kuitenkin, että verkko G on "symmetrinen". Tarkemmin sanottuna olkoot $x, y \in P_G$. Tällöin on olemassa automorfismi $f\colon G \to G$ siten, että $f(x) = y$.

Osoitetaan tämä väite täsmällisesti. Merkitään verkon G "ulkopisteitä" $A_1, A_2, \ldots, A_5$ ja "sisäpisteitä" $B_1, \ldots, B_5$ kuten seuraavassa kuvassa:



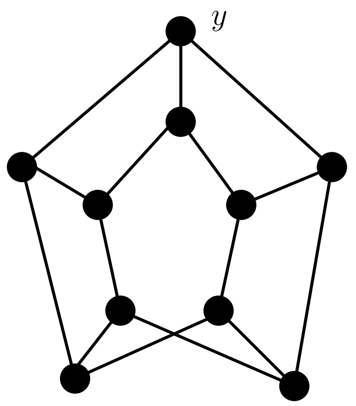
Verkko G

Tällöin verkon G viivat voidaan jakaa kolmeen (erilliseen) luokkaan - viivat muotoa $\overline{A_iA_{i+1}}$, missä $i = 1, \ldots, 5$ ja tulkitaan $A_6 = A_1$ (lasketaan mod 5), viivat muotoa $\overline{B_iB_{i+1}}$, missä $i = 1, \ldots, 5$ ja tulkitaan $B_6 = B_1$, ja viivat muotoa $\overline{A_iB_i}$.

Olkoon $i = 1, \ldots, 5$. Osoitetaan, että on olemassa isomorfismi $f_i\colon G \to G$ siten, että $f(A_1) = f(A_i)$ ja $f(B_1) = f(B_i)$. Määritellään $f_i(A_j) = A_{i+j}$, $f_i(B_j) = B_{i+j}$, missä lasketaan tarvittaessa mod 5. Tällöin f_i on isomorfismi, mikä nähdään helposti käyttämällä yllä mainittua kuvausta verkon G viivoille. Sen käänteiskuvaus $f_i^{-1}\colon G \to G$ on isomorfismi, jolle pätee $f_i^{-1}(A_i) = A_1$ ja $f_i^{-1}(B_i) = B_1$. Yhdistämällä kuvauksia f_i^{-1} ja f_k saadaan isomorfismi $g_{i,k} = f_k \circ f_i^{-1}\colon G \to G$ jolle $g_{i,k}(A_i) = A_k$, $g_{i,k}(B_i) = B_k$. Erityisesti siis jos x ja y ovat molemmat "ulkopisteitä" tai molemmat "sisäpisteitä", on olemassa isomorfismi $f\colon G \to G$ jolle $f(x) = y$.

Jäljellä on tapaus jossa x on ”ulkopiste” ja y on ”sisäpiste” (tai toisinpäin). Hoidetaan ensin tapaus $x = A_1$, $y = B_1$. Kuvaus $h\colon G \to G$, $h(A_i = B_i)$, $h(B_i) = A_i$ (”peilaus”), $i = 1, \dots, 5$ on selvästi isomorfismi ja $h(A_1) = B_1$. Yhdistämällä h sopivasti aikaisemmin konstruoittujen isomorfismien $f_{i,k}$ kanssa voidaan määritellä isomorfismi $f_j\colon h\colon f_i^{-1}\colon G \to G$, joka kuvaa solmu A_i solmulle B_j. Vastaavasti kuvaus $f_j^{-1}\colon h \to f_i\colon G \to G$ kuvaa solmu B_i solmulle A_j. Väite on todistettu.

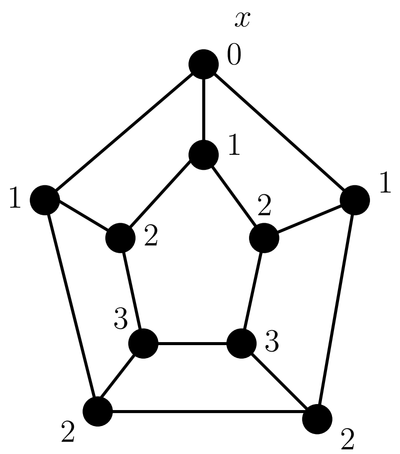
Merkitään $x = A_1$ ja olkoon y seuraava verkon G' piste:



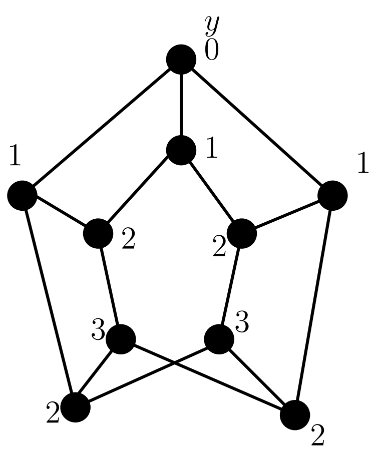
Verkko G'

Oletetaan, että on olemassa isomorfismi $f\colon G \to G'$. Olkoon $z \in P_G$ sellainen, että $f(z) = y$. Edellisen nojalla on olemassa ismorfismi (automorfismi) $g\colon G \to G$ jolle $g(x) = z$. Nyt $h = f \circ g$ on isomorfismi $G \to G'$ jolle $h(x) = y$.
Näin ollen, jos on ylipäätän olemassa isomorfismi $G \to G'$, voidaan olettaa, että se kuvaa x y:lle (juuri tätä varten olemme ensin osoittaneet, että G on ”täysin symmetrinen”).

Lasketaan kulkuetäisyyksiä pisteestä x verkossa G ja pisteestä y verkossa G'. Saadaan seuraavia tuloksia, etäisyydet merkitty kuvaan solmun viereen:



Verkko G



Verkko G'

Huomataan, että verkossa G ainoat kaksi pistettä, joiden etäisyys x:stä on kolme, ovat naapureita. Verkossa G' taas on myös olemassa tasan kaksi pistettä, joiden etäisyys x:stä on tasan kolme, mutta nämä pisteet eivät ole toistensa naapureita. Näin ollen G ja G' eivät voi olla isomorfisia.

9. Puussa on yksi 5-asteinen piste ja kaksi 2-asteista. Muut pisteet ovat lehtiä. Kuinka monta lehteä puulla on?

Ratkaisu: Olkoon lehtien lukumäärä l. Tällöin puussa on $p_T = l + 3$ pistettä. Sijoittamalla arvot yhtälöön

$$\sum_{x \in P_T} d(x) = 2v_G = 2p_T - 2,$$

saadaan yhtälö

$$l + 9 = 2l + 4.$$

Tästä saadaan $l = 5$. Lehtiä on siis viisi.

10. Shakkiturnauksen jokainen osanottaja pelaa yhden pelin jokaisen muun osanottajan kanssa. Osoita, että tulosluettelo voidaan järjestää niin, että jokainen on voittanut listassa seuraavan tai pelannut tämän kanssa tasapelin.

Ratkaisu: Määritellään suhteikko G jonka solmut ovat turnauksen osanottajat ja nuoli $\overline{xy}$ on suhteikossa jos ja vain jos x on voittanut y:n tai x ja y ovat pelanneet tasapelin.

Tällöin G on täydellinen suhteikko. Huom, G ei välttämättä ole suhteikkona turnaus, sillä jos on olemassa x ja y jotka ovat pelanneet tasapelin, niin suhteikossa on sekä nuoli $\overline{xy}$, että nuoli $\overline{yx}$.

Lauseen II 5.4 nojalla suhteikossa G on Hamiltonin kierros. Tämä kierros määrää solmujen järjestyksen, joka toteuttaa vaaditut ehdot.

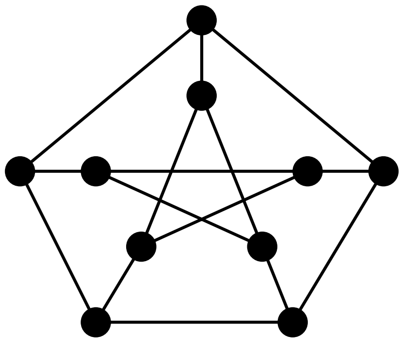
11. Olkoot $k, n \in \mathbb{N}$, $0 < k \leqslant n$. Merkinnällä $\mathbf{P}_k(n)$ tarkoitamme joukon $[n]$ k-alkioisten osajoukkojen muodostamaa joukkoa,

$$\mathbf{P}_k(n) = \{A \subset [n] \mid |A| = k\}.$$

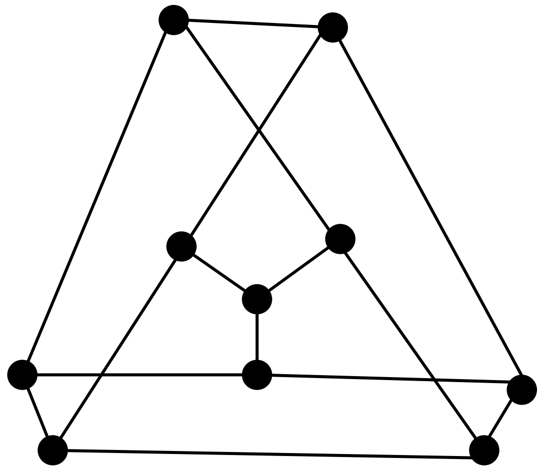
Määritellään joukossa $\mathbf{P}_k(n)$ relaatio

$$R = \{(A, B) \mid A \cap B = \varnothing\}.$$

a) Totea, että $G_k(n) = (\mathbf{P}_k(n), R)$ on verkko.
b) Piirrä kuvat verkoista $G_2(5)$ ja $G_3(5)$ sekä niiden komplementeista. Ovatko nämä verkot yhtenäisiä?
c) Osoita, että verkko $G_2(5)$ on isomorfinen seuraavien verkkojen G, G' kanssa:



Verkko G



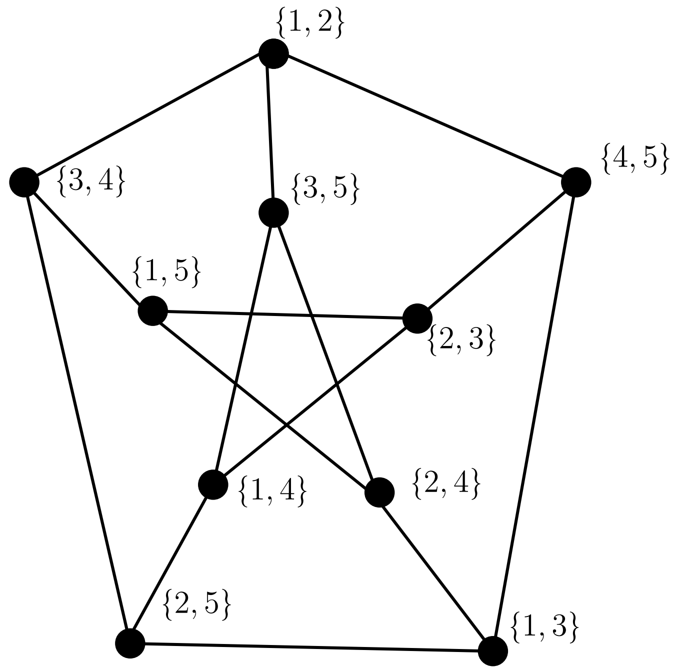
Verkko G'

Sopivat kuvat (esimerkiksi piirros verkosta $G_2(5)$, joka näyttää täsmälleen samalta kuin verkkoa G tai verkkoa G' esittävä kaavio) tai pelkkä isomorfismi riittävät.

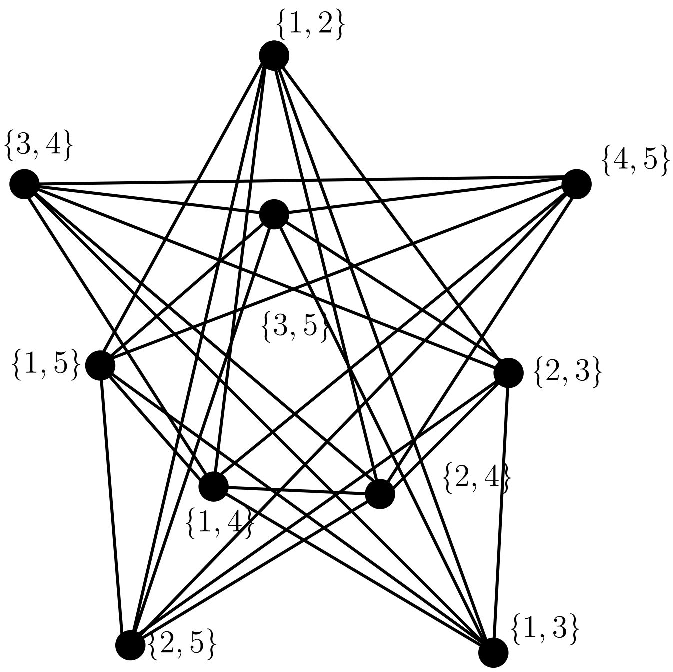
Ratkaisu: a) Joukko $\mathbf{P}_k(n)$ on äärellinen, sillä äärellisellä joukolla on äärellinen määrä osajoukkoja.

Relaatio R on symmetrinen, sillä $A \cap B = B \cap A$ kaikilla joukoilla A, B. Se on myös irrefleksiivinen, sillä $A \cap A = \emptyset$ jos ja vai jos $A = \emptyset$, mutta oletusten mukaan $k \neq 0$, joten joukko $\mathbf{P}_k(n)$ ei sisällä tyhjää joukkoa. Näin ollen suhteikko $G_k(n) = (\mathbf{P}_k(n), R)$ on verkko.

b) Verkko $G_2(5)$ ja sen komplementti geometrisen kaavion muodossa:



Verkko $G_2(5)$



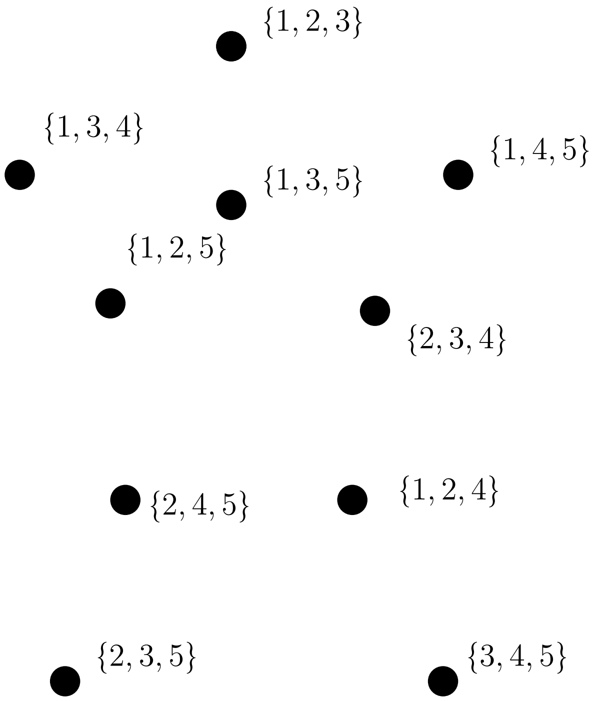
Verkon $G_2(5)$ komplementti

Molemmat verkot ovat yhtenäisiä. Verkon $G_2(5)$ kohdalla tämä on suhtellisen selvä kuvasta. Sen komplementit kohdalla piirros on jo pikkusen sekava, koska siinä on paljon nuolia, joten parempi tarkistaa asia kunnolla. Helposti nähdään kuvan avulla, että kulku

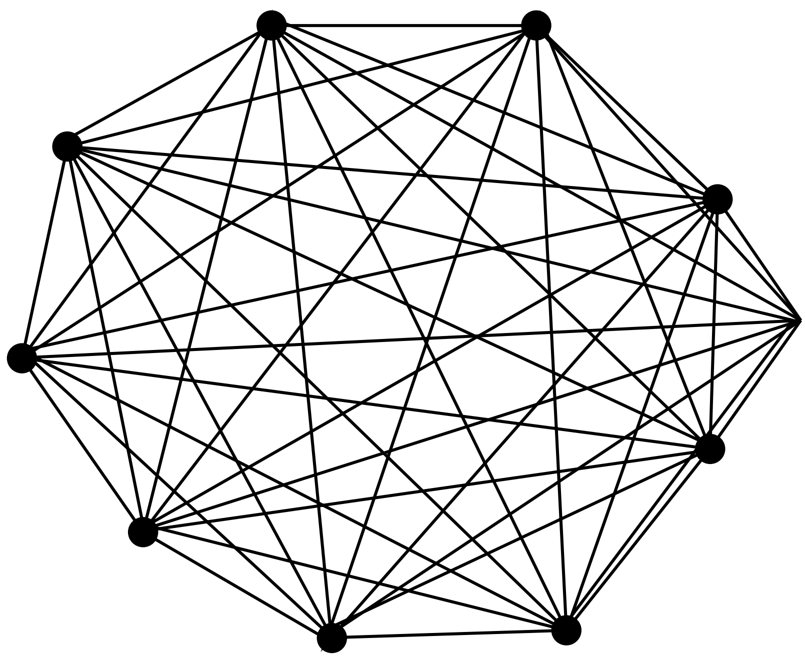
$$(\{1,2\},\{1,5\},\{2,5\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\})$$

käy verkon $\widetilde{G_2(5)}$ jokaisessa pisteessä, joten verkko on yhtenäinen. Tämä kulku on jopa Hamiltonin. Itse asiassa tämän verkon jokaisen pisteen aste on $6 > 5 = 10/2$, missä $10 = p_G$ on verkon solmujen lukumäärä, joten, Korollaarin II 5.8 nojalla tässä verkossa on jopa Hamiltonin kierros (mistä yhtenäisyys tietysti voidaan johtaa myöskin).

Verkossa $G_3(5)$ ei ole viivoja, sen jokainen piste on eristetty. Tämä johtuu siitä, että jos kahdelle 3-alkioiselle joukn [5] osajoukolle A, B pätisi $A \cap B = \emptyset$, niin yhdisteessä $A \cup B$ olisi kuusi alkiota, mikä on mahdotonta, sillä $A \cup B$ on joukon [5] osajoukko ja joukossa [5] on vain viisi alkiota.
Tästä seuraa, että komplementti $\widetilde{G_3(5)}$ on täydellinen verkko. Koska viiden alkion joukolla on $\binom{5}{3} = 10$ kolmealkioista osajoukkoa, komplementti on 10:n solmun täydellinen verkko.



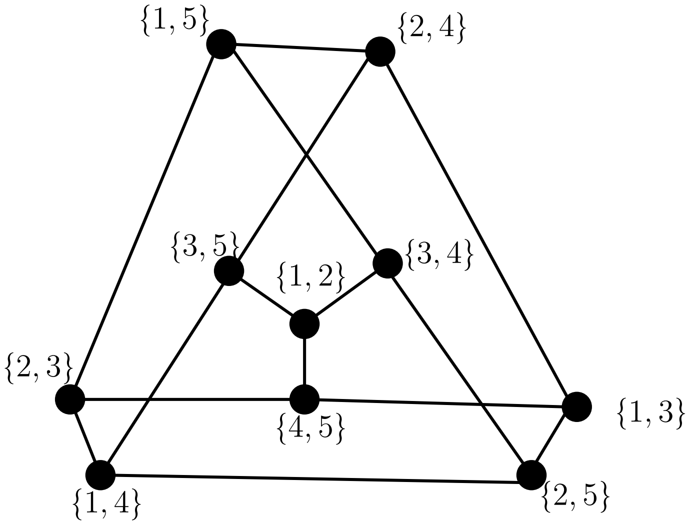
Verkko $G_3(5)$



Verkon $G_3(5)$ komplementti

Verkko $G_3(5)$ ei tietystikään ole yhtenäinen, sen komplementti taas selvästi on.

c) Yllä on jo piirretty verkon $G_2(5)$ geometrinen kaavio, joka näyttää samalta kuin verkoa G esittävä kaavio. Piirretään verkosta $G_2(5)$ vielä kaavio, joka näyttää samalta kuin verkon G' kaavio:

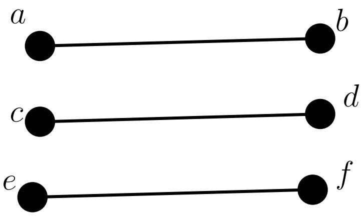


12. Luokkitele isomorfiaa vaille kaikki kuuden pisteen verkot, joissa on 12 viivaa. Piirrä kuva jokaisesta mallista.

Ratkaisu: Kuuden pisteen täydellisessä verkossa on $6 \cdot 5/2 = 15$ viivaa. Näin ollen verkossa G on 12 viivaa jos ja vain jos sen komplementissa on $15 - 12 = 3$ viivaa. Koska verkot G ja G' ovat isomorfisia jos ja vai jos niiden komplementit $\tilde{G}$ ja $\tilde{G}'$ ovat isomorfisia, riittää luokitella isomorfiaa vaille sellaisia kuuden pisteen verkkoja H, joissa on tasan kolme viivaa.

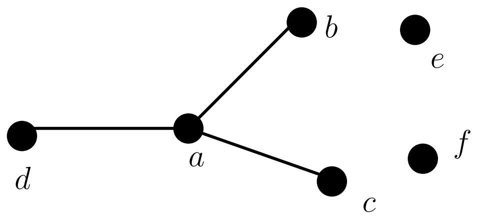
Olkoot v_1, v_2, v_3 viivat kuuden pisteen verkossa H.

Tapaus 1: Viivat ovat "täysin erillisiä", eli millään kahdella niistä ei ole yhteistä päätepistettä. Koska verkossa on vain kuusi pistettä, verkon on oltava seuraavan näköinen:



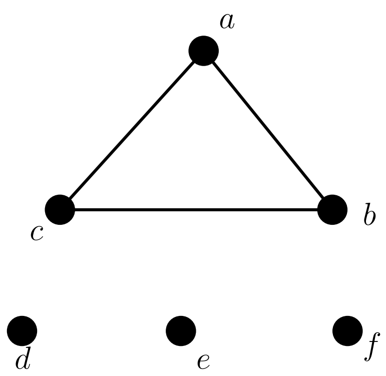
Verkko H_1

Tapaus 2: Kaikilla kolmella viivalla on sama yhteinen päätepiste. Tällöin verkko on välttämättä seuraavan näköinen:



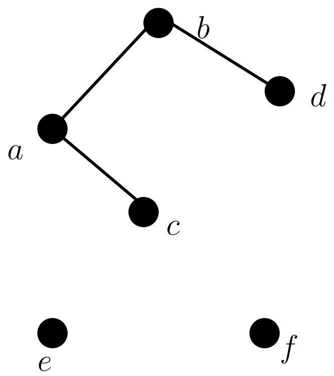
Verkko H_2

Tapaus 3: Viivat muodostavat kolmion:



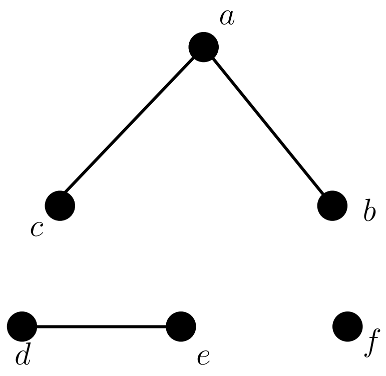
Verkko H_3

Tapaus 4: Viivoilla v_1, v_2 on yksi yhteinen piste a, viivoilla v_2, v_3 toinen yhteinen piste $b \neq a$, muita yhteisiä päätepisteitä ei ole:



Verkko H_4

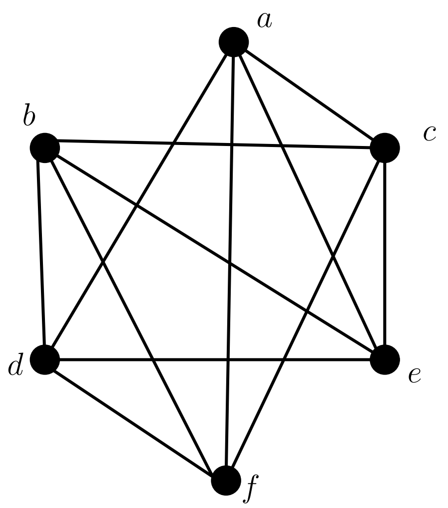
Tapaus 5: Viivoilla v_1, v_2 yhteinen päätepiste, viiva v_3 ”erilleen” muista viivoista:



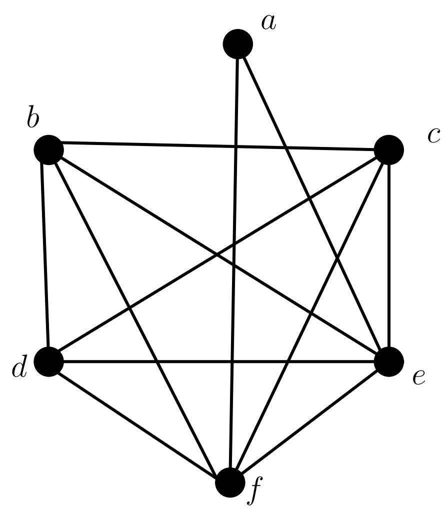
Verkko H_5

Tarkistetaan vielä, että kaikki löydetyt verkot H_1, H_2, H_3, H_4 ovat pareittain ei-isomorfisia.
Verkko H_1 on näistä ainoa, joilla ei ole eristettyjä pisteita. Verkko H_3 on ainoa, joilla on kolme eristettyä pistettä, verkko H_5 on ainoa, joilla on tasan yksi eristetty piste. Verkoilla H_2 ja H_4 molemmilla kaksi eristettyä pistettä, mutta ne eivät ole isomorfisia, sillä H_2:lla on piste, jonka aste on kolme, H_4:sä tällaista pistettä ei ole.

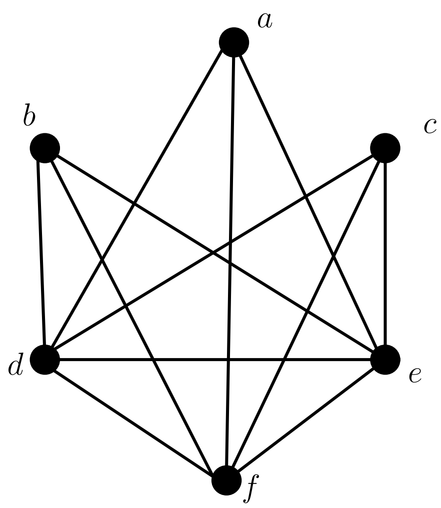
Näin ollen isomorfiaa vaille on olemassa tasan viisi kuuden pisteen verkkoa, joissa on kolme viivaa.
Meitä kuitenkin pyydettiin luokittelemaan isomorfiaa vaille kaikkia kuuden pisten verkkoja, joissa on kaksitoista viivaa, joten pitää vielä siirtyä komplementteihin. Nämä esitetään kuvina seuraavalla sivulla.



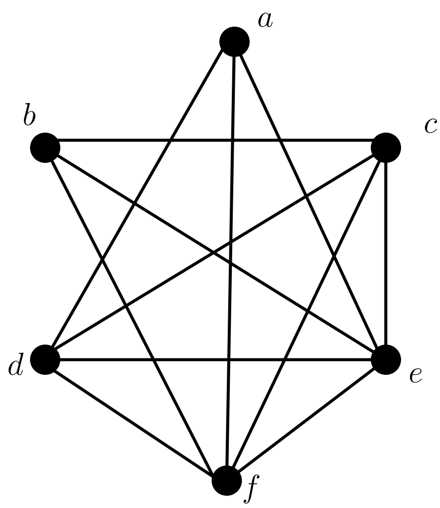
Verkko $G_1 = \tilde{H}_1$



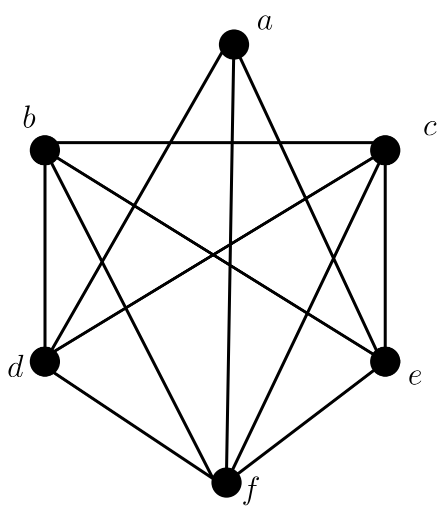
Verkko $G_2 = \tilde{H}_2$



Verkko $G_3 = \tilde{H}_3$



Verkko $G_4 = \tilde{H}_4$



Verkko $G_5 = \tilde{H}_5$

13. Olkoon G kaksijakoinen verkko. Osoita, että

$$v_G \leqslant \frac{p_G^2}{4}$$

Ratkaisu: Olkoon A kaksijakoisen verkon G ”mustien” pisteiden joukko ja B ”punaisten” pisteiden joukko. Merkitään $m = |A|$, tällöin $|B| = n - m$, missä $n = p_G$. Kaikki verkon G viivat ovat muotoa $\overline{xy}$, missä $x \in A$ ja $y \in B$, joten niitä on korkeintaan niin paljon kuin pareja (x, y), missä $x \in A$, $y \in B$. Tällaisia pareja on taas tasan $|A| \cdot |B|$ kappaletta. Toisin sanoen

$$v_G \leqslant |A||B| = m(n - m).$$

Tässä $0 \leqslant m \leqslant n = p_G$. Tarkastellaan toisen asteen funktiota
$x \mapsto x(n - x) = -x^2 + nx$. Tämän kuvaaja on ”alaspäin aukeava parabeeli”, joten se saavuttaa maksiminsa huipussaan, joka on funktion nollakohtien $x_0 = 0$, $x_1 = n$ välissä, eli pisteessä $x_h = n/2$. Toisin sanoen

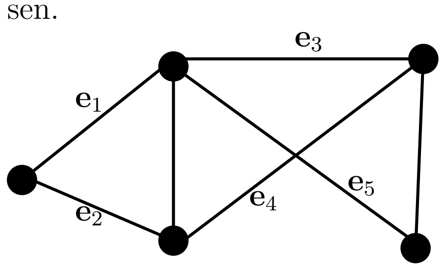
$$x(n-x) \leqslant \frac{n}{2} \cdot (n - \frac{n}{2}) = \frac{n^2}{4} = \frac{p_G^2}{4}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Erityisesti

$$v_G \leqslant f(m) \leqslant \frac{p_G^2}{4}.$$

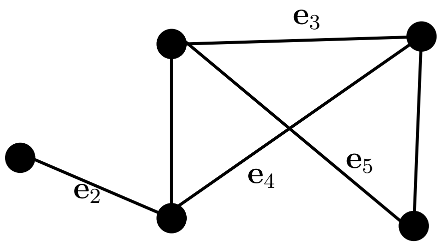
14. Olkoon $G = (X, R)$ verkko ja olkoon $B \subset V_G$ jokin kokoelma sen viivoja. Symbolilla $G - B$ merkitään verkkoa H, joka saadaan G:stä poistamalla kaikki joukon B viivat. Toisin sanoen $P_H = P_G$ ja $V_H = V_G \backslash B$.
Sanomme, että joukko $B \subset V_G$ muodostaa *yhtenäisen* verkon G *leikkauksen*, jos kaikilla $A \subset B, A \neq B$ verkko $G - A$ on yhtenäinen, mutta joukko $G - B$ on epäyhtenäinen.

Osoita, että kuvan 1 verkossa G joukko $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ muodostaa verkon G leikkauksen.

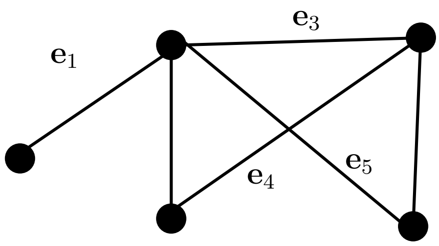


Kuva 1

Ratkaisu: Kun verkosta poistetaan viiva $\mathbf{e}_1$ tai viiva $\mathbf{e}_2$, tuloksena on vielä yhtenäinen verkko:

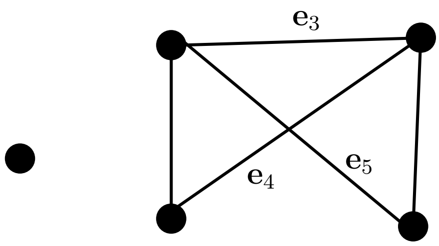


Verkko $G - \mathbf{e}_1$



Verkko $G - \mathbf{e}_2$

Kuitenkin, sen jälkeen kun molemmat viivat on poistettu, tuloksena on epäyhtenäinen verkko:



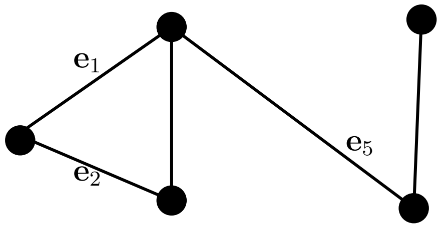
Verkko $G - B$

Näin ollen B on leikkausjoukko.

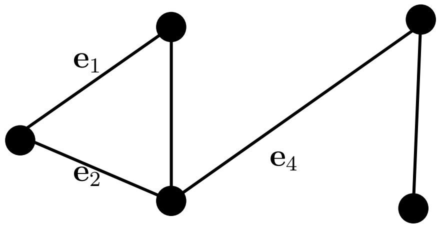
15. Jatkoa edelliselle tehtävälle. Osoita, että verkon G joukko $C = \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ muodostaa verkon G leikkauksen.

Ratkaisu: Riittää osoittaa, että joukon C kahden viivan poisto ei tee verkosta epäyhtenäisen, mutta kaiken kolmen poisto - tekee. Tyydytään kuviin.

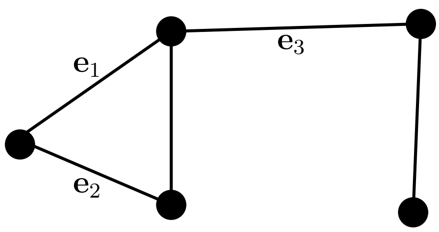
Kahden viivan poisto:



$G - \{e_3, e_4\}$

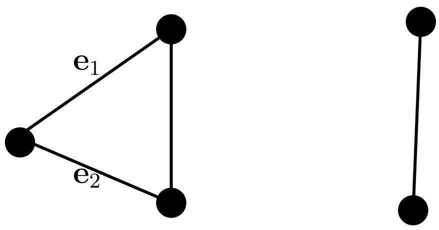


$G - \{e_3, e_5\}$



$G - \{e_4, e_5\}$

Kaikkien kolmen poisto:



$G - C$

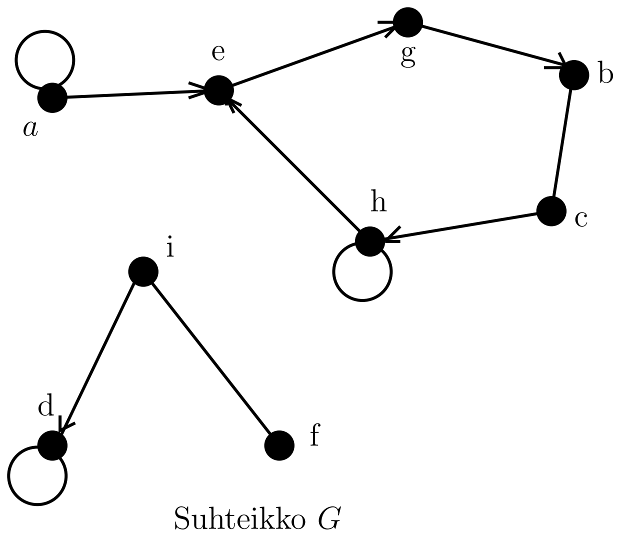
16. Olkoon suhteikon G pistejoukko $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ ja seuraajaluettelot

$$a \ : \ a, e; b \ : \ c; c \ : \ b, h; d \ : \ d; e \ : \ g;$$

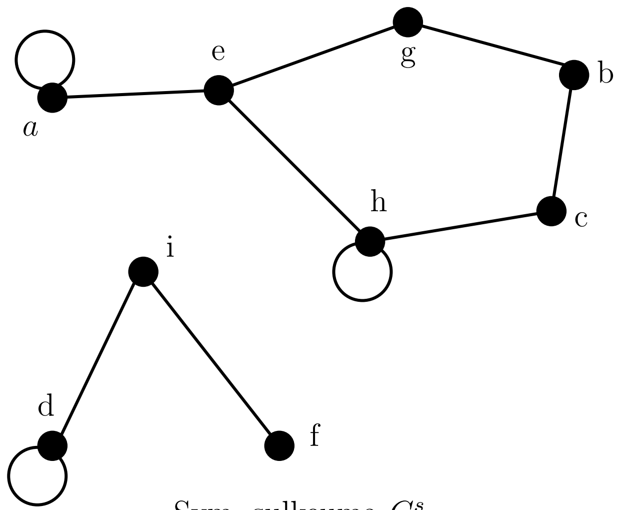
$$f \ : \ i; g \ : \ b; h \ : \ e, h; i \ : \ d, f.$$

Määrää suhteikon G yhtenäiset ja vahvasti yhtenäiset komponentit.

Ratkaisu: Piirretään ensin kuva suhteikosta G ja sen symmetrisestä sulkeumasta:



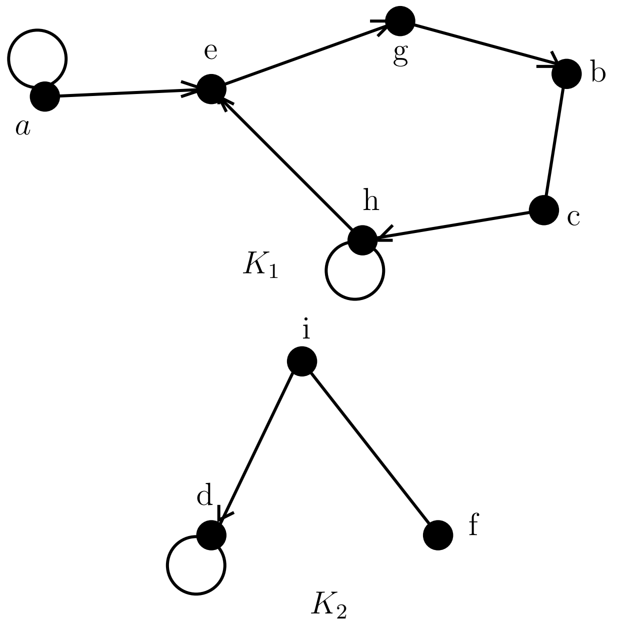
Suhteikko G



Sym. sulkeuma G^s

Suhteikon G pisteet x, y ovat samassa yhtenäisessä komponentissa jos ja vain jos ne ovat samassa yhtenäisessä komponentissa symmetrisessä sulkeumassa G^s. Selvästi G^s:llä on kaksi yhtenäistä komponenttia - pistejoukon $\{a, e, g, b, c, h\}$ virittämä aliverko ja pistejoukon $\{d, e, f\}$ virittämä aliverkko. Näin ollen G:llä on kaksi yhtenäistä komponenttia - pistejoukon $\{a, e, g, b, c, h\}$ virittämä alisuhteikko K_1 ja pistejoukon $\{d, e, f\}$ virittämä alisuhteikko K_2.

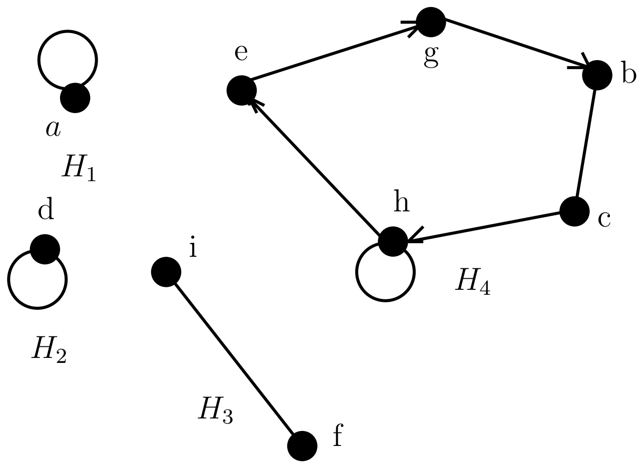
Edellisen väitteen täsmällinen perustelu voisi mennä esimeriksi seuraavaasti - alisuhteikot K_1 ja K_2 ovat yhtenäisiä, koska niiden symmetriset sulkeumat ovat yhtenäisiä. Tämä taas voidaan perustella kulkujen avulla - verkossa K_1^s on kulku (a, e, g, b, c, h), joka käy sen jokaisessa pisteessä (tämä on itse asiassa kulku jopa suhteikossa K_1), verkossa K_2^s on kulku (d, i, f), joka käy sen jokaisessa pisteessä.
Täytyy vielä perustella, että K_1 ja K_2 ovat maksimaalisia yhtenäisiä alisuhteikkoja. Suhteikossa G ei ole yhtään nuolta joukosta P_{K_1} tai joukkoon P_{K_1}, mistä seuraa, että mikään K_1:tä sisältävä alisuhteikko ei voi sisältää lisää pisteitä. Koska K_1 on pistejoukonsa virittämä, tästä seuraa myös mikään K_1:tä sisältävä alisuhteikko ei voi sisältää lisää nuolia. Näin ollen K_1 on maksimaalinen yhtenäinen alisuhteikko. Alisuhteikon K_2 maksimaalisuus yhtenäisenä suhteikkona perustellaan samalla tavalla.



Seuraavaksi tutkitaan vahvasti yhtenäisiä komponentteja. Pisteseen a saapuu suhteikossa vain silmukka $\overline{aa}$, mistä seuraa, että a:n vahvasti yhtenäinen komponentti $H1$ ei voi sisältää muita pisteitä a:n lisäksi. Toisin sanoen H_1 on yksiön a virittämä alisuhteikko $H_1 = (\{a\}, \{(a, a)\}$ (huom, silmukka a:ssa kuuluu komponenttiin H_1). Samanlaisesta syystä pisteen d vahv. yhtenäinen komponentti H_2 on yksiön $\{d\}$ virittämä (sisältää myös silmukan $\overline{dd}$) - pisteestä d ei lähde yhtään nuolta, paitsi silmukka.

Pisteet i ja f ovat samassa vahv. yhtenäisessä komponentissa H_3, koska suhteikossa on olemassa viiva $\overline{if}$ (jokainen viiva ja sen päätepisteet kuuluvat johonkin vahv. yhtenäiseen komponenttiin). Muita pisteitä tässä komponentissa ei ole, koska joukkoon $\{d, f\}$ ei saavu yhtään nuolta sen ulkopuolelta. Näin ollen H_2 on pistejoukon $\{i, f\}$ virittämä alisuhteikko.

Jäljellä olevat pisteet e, g, b, c, h muodostavat suhteikossa G kierroksen, joten ovat samassa yhtenäisessä komponentissa H_4. Koska muista pisteiden vahv. yhtenäiset komponentit on jo selvitetty, H_3:n on pakko olla pistejoukon $\{e, g, b, c, h\}$ virittämä alisuhteikko.



17. Olkoon A äärellinen joukko ja olkoon G ehtojen

$$P_G = \mathbf{P}(A) \text{ ja },$$

$$V_G = \{\overline{BC} \mid B, C \subset A, |B \backslash C| = |C \backslash B| = 1\}$$

määräämä verkko. Osoita, että solmut $B, C \in P_G$ ovat verkon G samassa yhtenäisessä komponentissa jos ja vain jos $|B| = |C|$.
Tässä $\mathbf{P}(A)$ on joukon A potenssijoukko, eli sen kaikkien osajoukkojen joukko.

Ratkaisu:
Olkoon $\overline{BC}$ jokin verkon G viiva. Oletuksen mukaan on olemassa $x, y \in A$ siten, että $B \backslash C = \{x\}$ ja $C \backslash B = \{y\}$. Tällöin välttämättä $x \neq y$. Olkoon $a_1, \ldots, a_{n-1}$ joukon $B \cap C$ alkiot. Tällöin

$$B = \{a_1, \ldots, a_{n-1}, x\},$$

$$C = \{a_1, \ldots, a_{n-1}, y\}.$$

Erityisesti nähdään, että $|B| = |C|$.

Olkoot nyt B ja C samassa verkon yhtenäisessä komponentissa. Tällöin verkossa G on olemassa kulku $B_0 = B, B_1, \ldots, B_m = C$. Edellisen nojalla $|B_i| = |B_{i-1}|$ jokaisella $i = 1, \ldots, m$. Näin ollen

$$|B| = |B_0| = |B_1| = \ldots = |B_{m-1}| = |B_m| = |C|.$$

Kääntäen oletetaan, että $|B| = |C|$ ja esitetään B ja C muodoissa

$$B = \{a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\},$$

$$C = \{a_1, \ldots, a_k, c_{k+1}, \ldots, c_n\},$$

missä $B \Cap C = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Pisteestä B pääsee pisteseen C kulkua pitkin "vaihtamalla yksi B:n piste yhdeksi C:n pisteeksi kerralla". Tarkemmin määritellään

$$B_1 = \{a_1, \ldots, a_k, c_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_n\},$$

ja yleisemmin jokaisella $i = 1, \ldots, n-k$

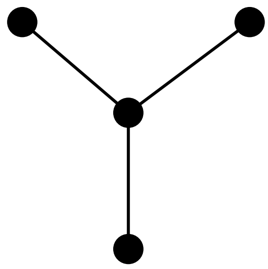
$$B_i = \{a_1, \ldots, a_k, c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_{k+i}, b_{k+i+1}, \ldots, b_n\}.$$

Tällöin $\overline{B_{i-1}B_i} \in V_G$ jokaisella $i = 1, \ldots, n-k$, joten $(B = B_0, B_1, \ldots, B_{n-k} = C)$ on kulku G:ssä. Näin ollen B ja C ovat samassa verkon G yhtenäisessä komponentissa.

18. Luokittele isomorfiaa vaille kaikki sellaiset puut, joissa on yhdeksän solmua, joista tasan viisi ovat lehtiä. Neljän pisteen puiden luokittelua, jota käyttiin läpi luentomateriaalissa, saa olettaa tunnetuksi.

Ratkaisu: Olkoon T puu, jossa on 9 pistettä, joista tasan 5 lehtiä. Poistamalla lehdet saadaan neljän pisteen puu S. Luentomateriaalin ”Puut” mukaan (Esimerkki 8, sivu 6) isomorfiaa vaille on olemassa tasan kaksi erilaista neljän pisteen puuta:

Verkko S_1



Verkko S_2

Vaihtoehto 1: $S = S_1$. Kiinnitetään poistetut lehdet takaisin. Tiedetään, että molemmat S:n lehdet a, d saavat tällöin tasan kaksi uutta lehti-naapuria. Sen jälkeen jäljellä on kolme lehtiä. Tarkastellaan eri tapoja kiinnittää niitä puun S pisteisiin.

Ensin tarkastellaan tapauksia, joissa kaikki T:n lehdet kiinnitetään ainoastaan S:n lehtiin a, d.

Tapaus 1.1: Toinen lehdistä a, d saa kaikki jäljellä olevat kolme lehtiä, toinen ei saa yhtään. Selvästi tapaukset, joissa kiinnitetään a:han tai d:hen ovat symmetrisiä, joten voidaan olettaa, että a saa kaikki jäljellä olevat kolmea lehteä. Merkitään näin saatua verkkoa T_1:llä.

Tapaus 1.2: Toinen lehdistä a, d saa jäljellä olevista kolmesta lehdestä kaksi, toinen - vain yhden. Tapaukset ovat taasn symmetrisiä, joten voidaan olettaa, että a saa kaksi lehteä, d - saa yhden. Merkitään näin saatua verkkoa T_2:llä.

Seuraavaksi tarkastellaan tapauksia, joissa yksi ei-lehdistä (eli b tai c) saa jäljellä olevista kolmesta T:n lehdistä naapureita ja toinen ei saa.

Tapaus 1.3: Yksi ei-lehdistä saa yhden uuden naapurin, jolloin jäljellä on kaksi ja niitä jaetaan lehtien a, d kesken. Tällöin tapaus jossa b saa yhden naapurin on symmetrinen tapauksen jossa c saa yhden naapurin, joten voidaan olettaa, että b

saa yhden naapurin. Merkitään näin saatua verkkoa T_3:llä.

Tapaus 1.4: Yksi ei-lehdistä saa yhden uuden naapurin, jolloin jäljellä on kaksi ja niitä molempia annetaan toiselle lehdistä a, d. Oletetaan, että b saa yhden naapurin. Tällöin saadaan kaksi alitapausta riippuen siitä kiinnitetäänko samalla kaksi jäljellä olevaa lehteä a:han vai d:hen. Huomaa, että tapaukset eivät ole symmetrisiä. Toinen tapauksesta antaa verkon T_4 ja toinen antaa verkon T_5.

Tapaus 1.5: Yksi ei-lehdistä saa kaksi uuden naapurin, jolloin jäljellä on yksi ja se kiinnitään jommallekummalle lehdistä a, d. Taas oletetaan, että b saa kaksi uutta naapuria. Tällöin saadaan kaksi alitapausta riippuen siitä kiinnitetäänko jäljellä oleva lehti a:han vai d:hen. Huomaa, että tapaukset eivät ole symmetrisiä. Toinen tapauksesta antaa verkon T_6 ja toinen antaa verkon T_7.

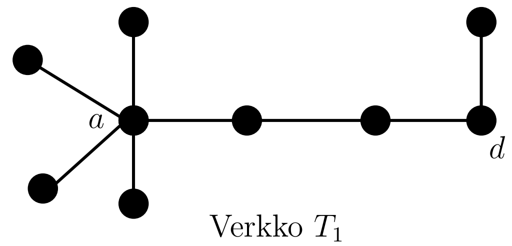
Tapaus 1.6: Yksi ei-lehdistä saa kaikki kolme jäljellä olevaa T:n lehtiä naapureiksi. Tapaukset, joissa tämä ei-lehti on b tai on c ovat symmetrisiä. Merkitään näin saatua verkkoa T_8:llä.

Seuraavaksi tarkastellaan tapauksia, joissa molemmat S_1:n ei-lehdet b ja c saavat uusia naapureita jäljellä olevista kolmesta T:n lehdistä naapureita.

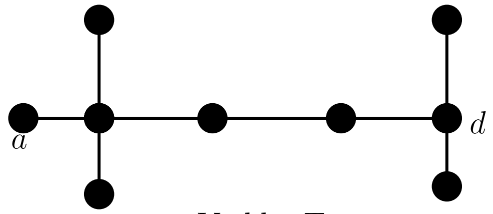
Tapaus 1.7: Molemmat b ja c saavat tasan yhden uuden naapurin. Tällöin jää vielä yksi, joka kiinitetään joko lehteen a tai lehteen d. Nämä vaihtoehdot ovat symmetrisiä, joten saadaan vain yksi verkko, merkitään sitä T_9:llä.

Tapaus 1.7: Toinen solmuista b, c saa kaksi uutta naapuria, toinen saa yhden. Tapaukset ovat symmetrisiä, voidaan olettaa, että b saa kaksi naapuria, c saa yhden. Saatua verkkoa merkitään T_{10}:llä.

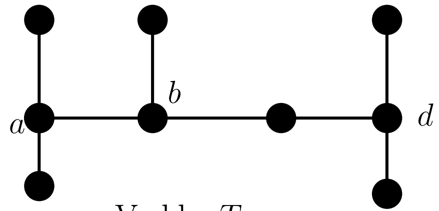
Kaikki vaihtoehdossa 1 (kun $S = S_1$) löydetyt puut esitetään seuraavassa kuvassa. Kuvaan on myös merkitty jokaisen puun kohdalla sen astejono, josta on poistettu lehtien eli 1-asteisten solmujen asteet yksinkertaisuuden vuoksi. Tarkistetaan heti samalla, että kaikki 10 löydettyä mallia ovat pareittain ei-isomorfisia. Selvästi tämä riittää tarkistaa vain sellaisten mallien kohdalla, joilla on sama astejono.



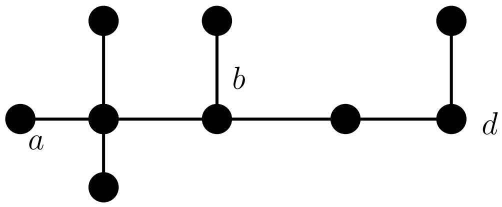
Verkko T_1
$(5, 2, 2, 2)$



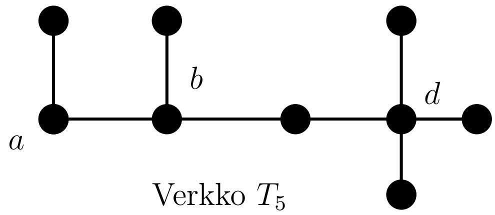
Verkko T_2
$(4, 3, 2, 2)$



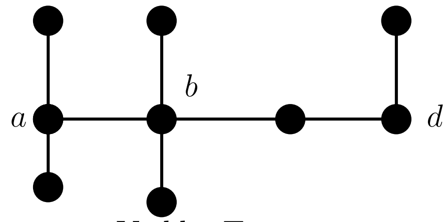
Verkko T_3
$(3, 3, 3, 2)$



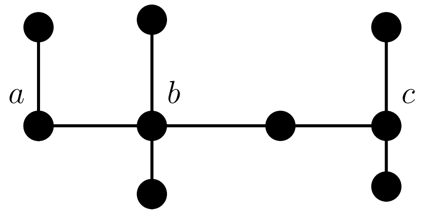
Verkko T_4
$(4, 3, 2, 2)$



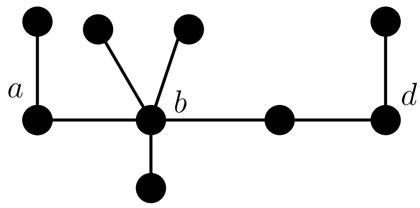
Verkko T_5
$(4, 3, 3, 2)$



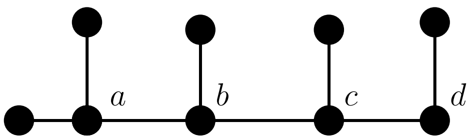
Verkko T_6
$(4, 3, 2, 2)$



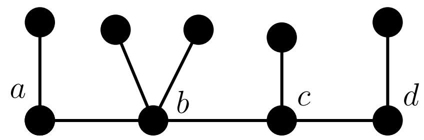
Verkko T_7
$(4, 3, 2, 2)$



Verkko T_8
$(5, 2, 2, 2)$



Verkko T_9
$(3, 3, 3, 2)$



Verkko T_{10}
$(4, 3, 2, 2)$

Verkot T_1 ja T_8 (joilla sama astejono $(5, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$) eivät ole isomorfisia, sillä verkon T_1 ainoalla 5-asteisella pisteellä on neljä lehtinaapuria, kun taas verkossa T_8 vastaavalla pisteellä on kolme lehtinaapuria.

Verkoilla $T_2, T_4, T_5, T_6, T_7, T_{10}$ on sama astejono $(4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$. Tarkastellaan ensin jokaisessa verkossa 4- ja 3-asteisia pisteitä x, y. Verkoissa T_2, T_5, T_7 nämä pisteet eivät ole naapureita. Verkoissa T_4, T_6, T_{10} nämä pisteet eivät ole naapureita. Verkossa T_2 pisteiden x, y välinen kulkuetäisyys on kolme, verkoissa T_5 ja T_7 se on kaksi. Verkossa T_5 3-asteisella pisteellä on yksi lehtinaapuri, verkossa T_7 niitä on kaksi. Näin ollen verkoista T_2, T_5, T_7 mitkään kaksi eivät ole isomorfisia. Seuraavaksi tarkastellaan verkkoja T_4, T_6, T_{10}. Verkossa T_4 4-asteisella pisteellä on kolme lehtinaapuria, mikä ei pidä paikkaansa verkoissa T_6 ja T_{10}. Verkossa T_6 3-asteisella pisteellä on kaksi lehtinaapuria, verkossa T_{10} 3-asteisellä pisteellä on yksi lehtinaapuri. Näin ollen myös verkoista T_4, T_6, T_{10} mitkään kaksi eivät ole isomorfisia.

Jäljellä verkot T_3 ja T_9, joiden astejono on $(3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$. Verkossa T_3 ainoalla 2-asteisella pisteellä ei ole lehtinaapureita, verkossa T_9 tällaisella pisteellä on taas yksi lehtinaapuri.

Näin ollen kaikki vaihtoehdossa 1 löydetyt 10 puuta ovat kaikki eri isomorfialuokissa.

Vaihtoehto 2: $S = S_2$. Tällöin puulla S on kolme lehtiä, joita mertkitään symboleilla a, b, c. Jokaiseen niistä on liitettävä ainakin yksi T:n viidestä lehdestä. Sen jälkeen kun jokainen S:n lehti on "peitetty" yhdellä T:n lehdellä, jäljellä on kaksi T:n lehtiä.

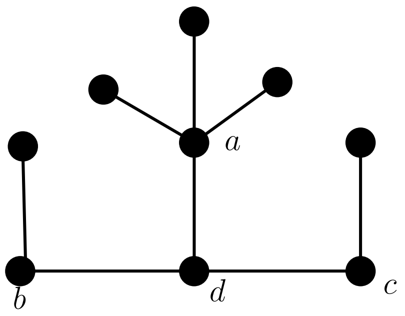
Tapaus 2.1: Molemmat jäljellä olevat lehdet liitetään johonkin S:n lehteen. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että se on lehti a. Saadaan puu T_{11}.

Tapaus 2.2: Molemmat jäljellä olevat lehdet liitetään ainoaan S:n solmuun, joka ei ole lehti (solmu d). Saadaan puu T_{12}.

Tapaus 2.3: Toinen jäljellä oleva solmu liitetään toiseen S:n lehteen, toinen - toiseen. Voidaan olettaa, että uusia naapureita saavat lehdet a, b. Saadaan puu T_{13}.

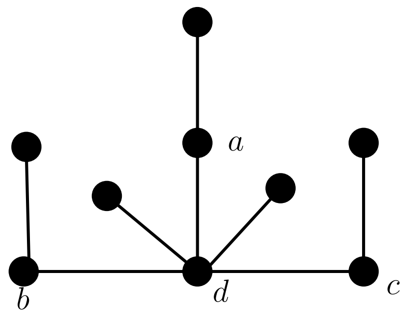
Tapaus 2.4: Toinen jäljellä oleva solmu liitetään johonkin S:n lehteen, toinen - ainoaan ei-lehteen, eli d:hen. Voidaan olettaa, että uuden naapurin saa lehti a. Saadaan puu T_{14}.

Kuvassa alla on esitetty kaikki vaihtoehdossa 2 löydetut puut $T_{11} - T_{14}$ astejonojensa kera. Astejonoissa on jätetty kirjoittamatta 1-asteisten eli lehtien asteita.

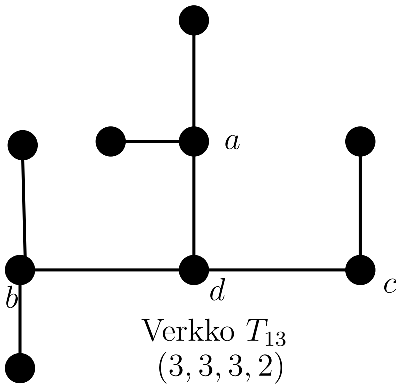


Verkko T_{11}

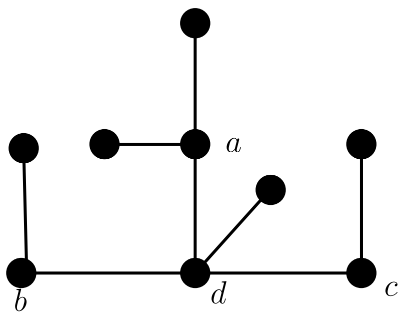
$(4, 3, 2, 2)$



Verkko T_{12}
$(5, 2, 2, 2)$



Verkko T_{13}
$(3, 3, 3, 2)$



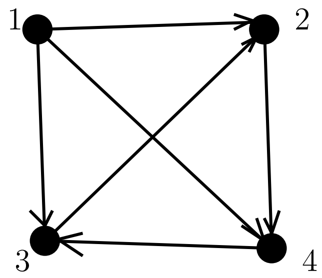
Verkko T_{14}
$(4, 3, 2, 2)$

Nähdään, että verkoista ainoastaan verkoilla T_{11} ja T_{14} on sama astejono. Ne eivät kuitenkaan ole isomorfisia, esimerkiksi koska verkossa T_{11} ainoalla 4-asteisella pisteellä ei ole lehtinaapureita, kun taas verkossa T_{14} vastaavalla pisteellä on jopa kaksi lehtinaapureita.

Kaikki puut on löydetty. Huomaa, että mitkään kaksi vaihtoehdosta 1 ja vaihtoehdosta 2 tulevat puut eivät voi olla isomorfisia keskenään, koska niistä tulee ei-isomorfisia kun niistä poistetaan lehdet. Näin ollen isomorfiaa vaille on olemassa tasan 14 yhdeksän solmun puuta, joissa 5 lehteä.

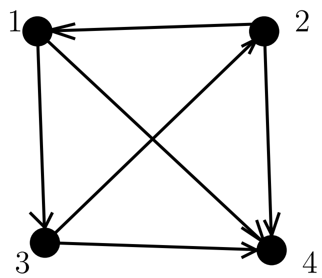
19. a) Anna esimerkki täydellisen verkon K_4 yksisuuntaisuudesta, jonka ainoa juuri on solmu 1.
b) Anna esimerkki täydellisen verkon K_4 yksisuuntaisuudesta, jonka juuret ovat täsmälleen solmut $1, 2, 3$.

Ratkaisu: a) Esimerkki:



Pisteestä 1 selvästi pääsee yksisuuntaisuudessa kaikkiin muihin pisteisiin, joten se on juuri. Toisaalta sen tuloaste on nolla, joten mistään muusta pisteestä ei voi päästää siihen.

b) Esimerkki:



Koska pisteet $1, 2, 3$ muodostavat syklin, riittää varmistaa, että 1 on juuri, jolloin nuoli $\overrightarrow{14}$ riittää. 4 ei ole juuri, koska siitä ei edes lähde yhtäkään nuolta.

20. Dominopalikan kummassakin päässä on $0-6$ pistettä. Käytämme dominopalikasta, jonka toisessa päässä on x pistettä ja toisessa y pistettä, merkintää (x, y). Käytössäsi on seuraavat dominopalikat: $(1, 2)$, $(1, 6)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(6, 5)$, $(4, 5)$. Tutki voidaanko nämä palikat asettaa umpinaiseksi renkaaksi, jossa palikoiden toisiaan koskettavissa päissä on sama pisteluku.

Ratkaisu: Tarkastellaan verkkoa G, jonka pisteet ovat luvut $0, 1, \ldots, 6$ ja jonka viivajoukko on

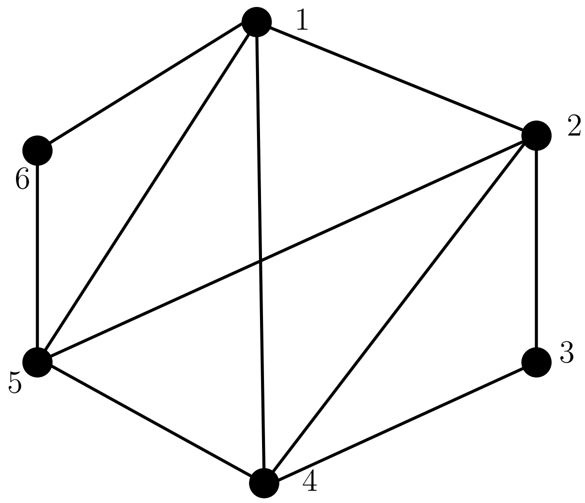
$$V_G = \{\overline{12}, \overline{16}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{34}, \overline{65}, \overline{45}\}.$$

Palikat voidaan asettaa umpinaiseksi renkaaksi jos ja vain jos tässä verkossa on Eulerin kulku.

Tiedetään, että verkossa G on Eulerin kulku jos ja vain jos se on eristettyjä pisteitä vaille yhtenäinen ja jokaisen sen pisteen aste on parillinen. Lasketaan ensin asteet:

$$d(0) = 0, d(1) = 4, d(2) = 4, d(3) = 2, d(4) = 4, d(5) = 4, d(6) = 2.$$

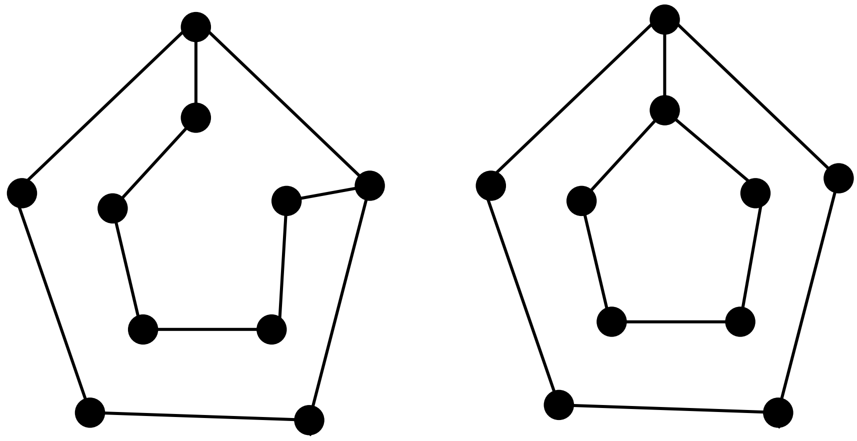
Verkossa on yksi eristetty piste, poistetaan se tarkastelusta. Jokaisen pisteen aste on parillinen. Näin ollen riittää vielä tarkistaa onko verkko, joka on saatu G:stä poistamalla eristetty piste 0 yhtenäinen. Piirretään verkko:



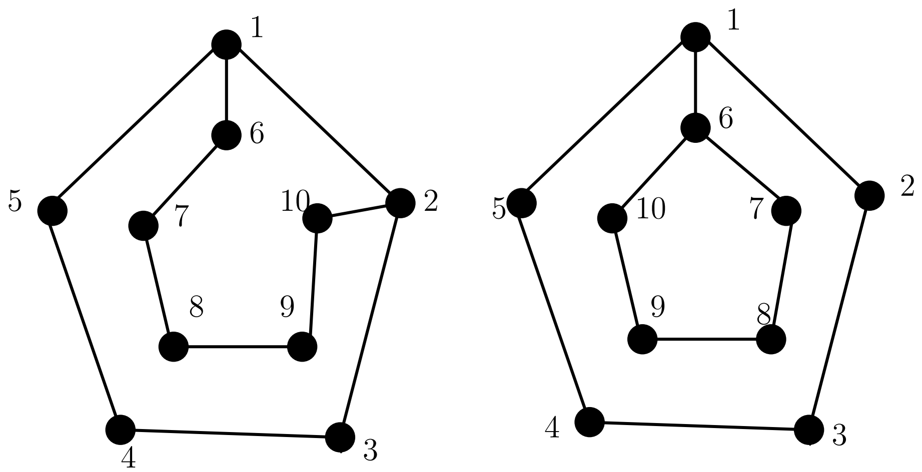
Tämä verkko on "selvästi" yhtenäinen. Itse asiassa $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ on sen kulku, joka käy jokaisessa pisteessä.

Näin ollen verkossa on Eulerin kulku, joten palikat voidaan asettaa umpinaiseksi renkaaksi.

21. Tutki kummankin kuvassa alla esitetyn verkon G, G' kohdalla löytyykö verkosta a) Hamiltonin kierros, b) Eulerin kierros.
Myönteisessä tapauksessa esitä kierros.



Ratkaisu: Nimitetään verkkojen solmut:



a) Verkossa G on Hamiltonin kierros $(1, 6, 7, 8, 9, 10, 2, 3, 4, 5, 1)$. Verkossa G' ei ole Hamiltonin kierrosta, sillä sen "sisäpisteiden" joukkoa $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ ja "ulkopisteiden" joukkoa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ yhdistää tasan yksi viiva $\overline{16}$. Hamiltonin kulussa tällaisia viivoja esiintyy aina parillinen määrä, ainakin kaksi.

b) Kummassakin verkossa ei ole Eulerin kierrosta, sillä kummassakin verkossa on pisteitä, joiden aste on pariton.

22. Kuinka monta erilaista virittävää puuta täydellisellä kaksijakoisella verkolla $K_{2,n}$ on, $n \in \mathbb{N}$? (Neuvo: tarkastele ensin erikoistapauksia pienillä n).

Ratkaisu: Kun $n = 0$ verkko $K_{2,n}$ ei ole yhtenäinen, joten sillä ei ole virittäviä puita. Oletetaan $n > 0$. Olkoon $A = \{x, y\}$ verkon $K_{2,n}$ "mustien" pisteiden joukko (joita oletetaan olevan tasan kaksi kappaletta) ja $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ verkon $K_{2,n}$ "punaisten" pisteiden joukko (joita oletetaan olevan tasan kaksi kappaletta).

Olkoon T verkon $K_{2,n}$ virittävä puu. Olkoon B_x niiden punaisten pisteiden b_i joukko, joille viiva $\overline{xb_i}$ on puussa T.
Vastaavasti B_y:llä merkitään niiden punaisten pisteiden b_j joukkoa, joille viiva $\overline{yb_i}$ on puussa T.
Koska x on verkossa $K_{2,n}$ yhteydessä vain joukon B pisteisiin, joukko B_x ei voi olla tyhjä (muuten puu T ei olisi yhtenäinen). Samanlaisesta syystä joukko B_y ei ole tyhjä.
Jokaisella $i = 1, \ldots, n$ piste b_i on verkossa $K_{2,n}$ yhteydessä vain pisteisiin x ja y, joten jommankumman viivoista $\overline{xb_i}$, $\overline{yb_i}$ on esiintyvää puussa T (muuten se ei ole yhtenäinen). Näin ollen jokainen joukon B piste on joko B_x:ssä tai B_y:ssä, toisin sanoen $B_x \cup B_y = B$.

Seuraavasti tutkitaan joukkojen B_x, B_y leikkausta $B_x \cap B_y$. Osoitetaan, että tämä leikkaus on yksiö.
Jos leikkaus olisi tyhjä joukko $x \cup B_x$ virittäisi T:ssä yhden komponentin ja joukko $y \cup B_y$ toisen. Tämä on taas vastoin puun T yhtenäisyyttä.

Oletetaan, että on olemassa kaksi eri indeksiä i, j joilla $b_i, b_j \in B_x \cap B_y$. Tällöin puussa T on sykli (x, b_i, y, b_j, x), mikä on mahdotonta, sillä T on renkaaton.

Näin ollen joukko $B_x \cap B_y$ on yksiö eli on olemassa yksi ja tasan yksi $b_i \in B$ joka on puussa T yhteydessä sekä x:ään, että y:hyn. Loput $(n-1)$ B:n alkiota ovat yhteydessä vain x:ään tai vain y:hyn.

Toisin sanoen puu T saadaan valitsemalla yksi alkio $b \in B$ ja osajoukko $C \subset B\backslash\{b\}$. Tällöin puun viivat ovat $\overline{xb}$, $\overline{yb}$, $\overline{xc}$, $c \in C$, $\overline{yd}$, $d \in B\backslash C$, $d \neq b$.

Kääntäen mikä tahansa tällainen valinta synnyttää virittävän puun. Nimittäin tällöin T on yhtenäinen - b:stä pääsee x:ään ja y:hyn suoraan yhtä viivaa pitkin ja kaikkiin muihin joukon B alkioihin x:n tai y:n kautta. Lasketana T:n viivojen lukumäärä. Se on $1 + 1 + (n-1) = n + 1$, kun taas koko verkossa on $2 + 100 = 102$ alkiota. Näin ollen T on yhtenäinen verkko, jolle pätee $v_T = p_T - 1$. Olemme näyttäneet, että T on puu.

Alkio $b \in B$ voidaan valita n tavalla. Sen jälkeen joukon C valinta voidaan tehdä 2^{n-1}:llä tavalla, sillä juuri näin paljon osajoukkoja on joukolla $B\backslash\{b\}$, jossa on $(n-1)$ alkiota.

Näin ollen T voidaan valita $n2^{n-1}$. Juuri näin paljon erilaisia virittäviä puita on verkolla $K_{2,n}$.

23. Oletetaan, että verkon G jokaisen pisten asteelle pätee on

$$d(x) \geqslant \frac{1}{2}(p_G - 1).$$

Osoita, että G on yhtenäinen.

Ratkaisu: Tehdään vasta-oletus: G ei ole yhtenäinen. Tällöin sillä on ainakin kaksi eri komponenttiä H_1 ja H_2. Olkoon $x \in H_1$. Tällöin oletuksen mukaan solmulla x on vähintään $\frac{1}{2}(p_G - 1)$ eri naapuria. Luonnollisesti jokainen niistä on myös H_1:n alkio. Koska x ei voi olla itseensä naapuri, tästä seuraa, että komplementissa H_1 on vähintään

$$\frac{1}{2}(p_G - 1) + 1 = \frac{1}{2}p_G + \frac{1}{2}$$

solmua.
Samalla tavalla nähdään, että H_2:ssä on vähintään $\frac{1}{2}p_G + \frac{1}{2}$ solmua.

Koska komplementtien H_1 ja H_2 pistejoukot eivät leika, tästä seuraa, että verkossa on ainakin

$$\frac{1}{2}p_G + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_G + \frac{1}{2} = p_G + 1$$

alkiota, mikä on vastoin luvun p_G määritelmää. Saatu ristiriita osoittaa väitteen.