Verkot, syksy 2015
Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Laskuharjoitus 7
Ratkaisuehdotukset

1. Olkoot T ja T' (epätyhjiä) puita, joilla ei ole yhteisiä viivoja (mutta yhteisiä pisteitä saattaa olla). Näytä, että yhdiste $T \bigvee T'$ on puu jos ja vain jos puilla T ja T' on täsmälleen yksi yhteinen piste.

Ratkaisu: Jos puilla T ja T' ei ole yhteisiä pisteitä, aliverkot T ja T' ovat niiden yhdisteen $T \bigvee T'$ yhtenäiset komponentit, erityisesti $T \bigvee T'$ ei ole tällöin yhtenäinen.

Oletetaan, että $P_T \cap P_{T'}$ on epätyhjä ja osoitetaan, että $T \bigvee T'$ on tällöin puu jos ja vain jos $|P_T \cap P_{T'}| = 1$. Aloitetaan näyttämällä, että tässä tapauksessa verkko $T \bigvee T'$ on yhtenäinen. Olkoon $x \in P_T \cap P_{T'}$. Koska T on yhtenäinen, jokaisella $y \in P_T$ verkossa $T \bigvee T'$ (jopa jo aliverkossa T) on olemassa kulku y:stä x:ään. Koska T' on yhtenäinen, jokaisella $y \in P_{T'}$ verkossa $T \bigvee T'$ (jopa jo aliverkossa T') on olemassa kulku y:stä x:ään. Jokaisesta verkon $T \bigvee T'$ pisteestä pääsee siis kulkua pitkin pisteeseen x, joten jokainen verkon piste on pisteen x yht. komponentissa. Tästä seuraa, että tämä komponentti on koko verkko, toisin sanoen verkko $T \bigvee T'$ on yhtenäinen.

Korollaarin IV 1.10. sekä Lauseen IV.1.3. nojalla yhtenäinen epätyhjä verkko G on puu jos ja vain jos $v_G = p_G - 1$. Koska verkoilla T ja T' ei ole yhteisiä viivoja ja koska kumpikin on puu, pätee

$$v_{T \bigvee T'} = v_T + v_{T'} = p_T + p_{T'} - 2.$$

Toisaalta äärellisten joukkojen yhdisteen summa-ja erotusperiaatteen nojalla (kts. materiaali ”Relaatiot ja äärelliset joukot”, sivu 7) pätee

$$p_{T \bigvee T'} = |P_{T \bigvee T'}| = |P_T| + |P_{T'}| - |P_T \cap P_{T'}| = p_T + p_{T'} - |P_T \cap P_{T'}|.$$

Näistä seuraa, että yhtälö

$$v_{T \bigvee T'} = p_{T \bigvee T'} - 1$$

pätee jos ja vain jos $|P_T \cap P_{T'}| = 1$ eli jos ja vain jos puilla T ja T' on täsmälleen yksi yhteinen piste.

Huomautus: Ei ole vaikeata myöskään osoittaa, että verkosta $T \bigvee T'$ löytyy rengas kun verkoilla T ja T' on ainakin kaksi yhteistä pistettä x, y. Nimittäin puussa T on olemassa yksinkertainen kulku $\bar{x}$ pisteestä x pisteeseen y (yhtenäisyyden nojalla), samoin puussa T' on olemassa yksinkeratinan kulku $\bar{y}$ pisteestä y pisteeseen x. Koska verkoilla T ja T' ei ole yhteisiä viivoja, mikään viiva ei esiinny kummassakin kulussa, erityisesti kyse on eri kuluista. Lauseen III 2.7. nojalla tästä seuraa, että $T \bigvee T'$:ssä on ainakin yksi rengas.

2. Olkoon G (epätyhjä) yhtenäinen verkko, jolle pätee $v_G = p_G$. Osoita, että G:llä on tasan yksi rengas. Kuinka monta renkaistoa verkolla G on?

Ratkaisu: Yksinkertaisin tapa on huomata, että Korollaarin IV 2.11 nojalla epätyhjässä yhtenäisessä verkossa, jolle pätee $v_G = p_G$, on tasan

$$2^{v_G - p_G + 1} = 2^1 = 2$$

renkaistoa. Näistä yksi on tyhjä joukko (joka on renkaisto jokaisessa verkossa), joten ainoan toisen täytyy olla rengas (ei voi olla epätyhjää renkaistoa, jos ei ole olemassa ainakin yhtä rengasta). Lisäksi tällöin tämä rengas on ainoa, koska muuten renkaistoja olisi ainakin kolme (toinen rengas olisi jo kolmas renkaisto).

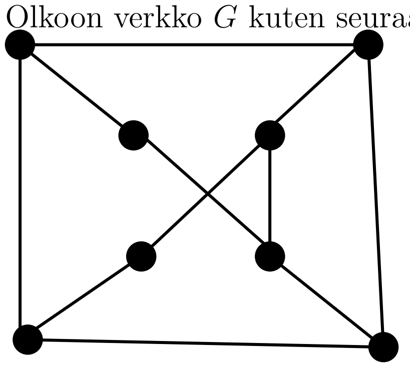
Toinen, ”alkeellisempi” tapa: Olkoon G yhtenäinen verkko, jolle pätee $v_G = p_G$. Lauseen III 1.3 mukaan verkossa G on ainakin yksi rengas R. Osoitetaan, että muita renkaita ei ole. Tehdään vasta-oletus: olkoon R' toinen rengas. Koska $R \neq R'$ on olemassa viiva $v = \overline{xy} \in V_G$, joka on toisessa renkaista R, R', mutta ei ole toisessa. Voidaan olettaa, että $v \notin R'$.

Muodostetaan verkko $H = G - v$, joka saadaan verkosta G poistamalla siitä viiva v. Koska G on yhtenäinen ja v kuuluu renkaaseen R, Lauseen III 1.1 nojalla verkko H on yhtenäinen. Lisäksi sille pätee

$$v_H = v_G - 1 = p_G - 1 = p_H - 1.$$

Korollaarin IV 1.10 nojalla tästä seuraa, että H on puu, erityisesti renkaaton. Kuitenkin, koska $v \notin R'$, pätee myös $R' \subset V_H$. Toisin sanoen puu H sisältää renkaan R', mikä on mahdotonta (puu on renkaaton). Näin ollen vasta-oletus johti ristiriitaan, joten G:llä on vain yksi rengas.

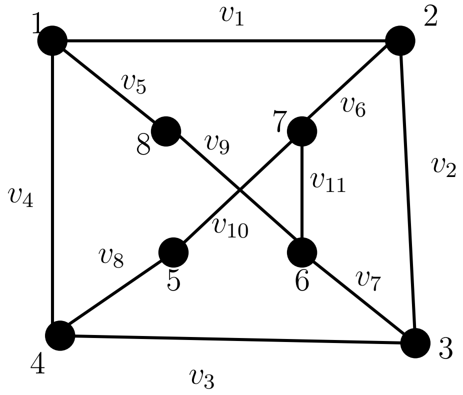
3. Olkoon verkko G kuten seuraavassa kuvassa:



a) Määritä jokin G:n virittävä puu T *jollakin kurssimateriaalissa esitetyllä menetelmällä*. Selosta selkeästi menetelmän käytön välivaiheet.
b) Laske verkon perusrenkaat a)-kohdassa löydetyn puun T suhteen.

Ratkaisu: Materiaalissa ”Puut” on esitetty kolme erilaista menetelmää, joilla voidaan konstruoida virittävä puu. Esitetään tässä tehtävälle kaksi ratkaisua - menetelmällä 1 saatu ratkaisu ja vastaavasti menetelmällä 2 laskettu ratkaisu.

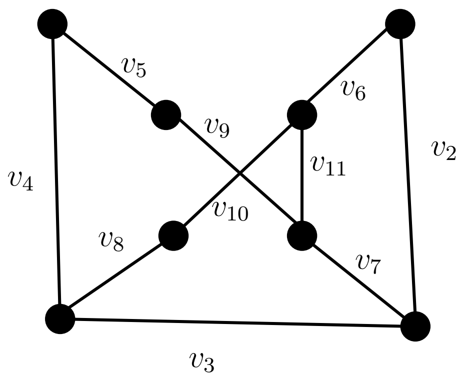
Nimitetään verkon viivat ja pisteet:



Puussa on 11 viivaa ja 8 pistettä. Verkko on selvästi yhtenäinen (varmista, että osaisit tarvittaessa perustella miksi), joten sillä on virittävä puu (Lause IV 2.3). Virittävässä puussa T on kaikki 8 verkon G pistettä ja $8 - 1 = 7$ viivaa.

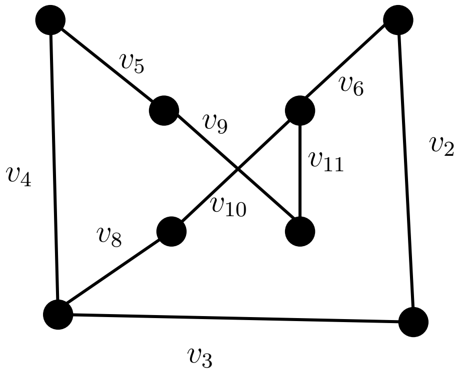
Menetelmä 1: Tässä menetelmässä "tuhotaan" verkon renkaita poistamalla algoritmin jokaisessa välivaiheessa jokin (tämän välivaiheen verkon) renkaaseen kuuluva viiva. Koska viivoja on 11 ja puussa on oltava 7 viivaa, on poistettavaa tasan neljä viiva.

Viivat v_1, v_2, v_3, v_4 selvästi muodostavat 4-renkaan, joten aloitetaan poistamalla jokin näistä, esimerkiksi viiva v_1. Saadaan seuraava verkko G_1: (huom, emme laita solmujen nimiä kuvassa näkyviin, koska emme tarvitse niitä menetelmässä 1).



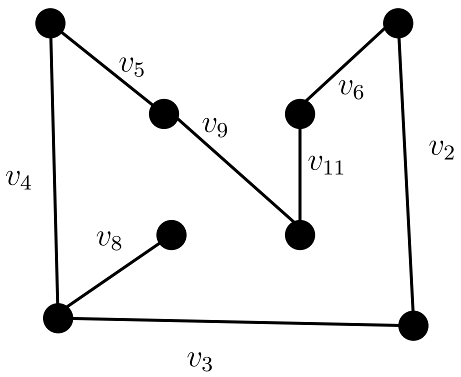
Verkko G_1

Seuraavaksi huomataan esimerkiksi, että viivat v_2, v_6, v_7, v_{11} muodostavat verkossa G_1 4-renkaan. Poistetaan jokin sen viivoista, esimerkiksi v_7. Huomaa erityisesti, että jokaisessa välivaiheessa poistetaan sellainen viiva, joka on jossakin **edellisessä välivaiheessa** saadun verkon rengas. Tämän välivaiheen jälkeen saadaan verkko G_2:



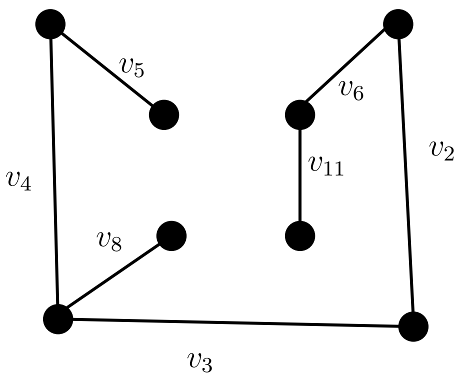
verkko G_2

Seuraavaksi poistetaan viiva v_{10}, esimerkiksi koska se on verkon G_2 renkaassa $\{v_4, v_8, v_{10}, v_{11}, v_9, v_5\}$. Saadaan verkko G_3:



verkko G_3

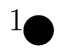
Tässä vaiheessa verkossa G_3 on tasan 8 pistettä ja 8 viivaa, joten päästäkseen puuhun on poistettava vielä yksi viiva. Tässä vaiheessa esimerkiksi viivan v_8 poistaminen ei käy, koska se ei ole missään verkon G_3 renkaassa. Sen sijaan kaikki muut viivat muodostavat 7-renkaan verkossa G_3. Poistetaan niistä vaikkapa v_9. Saadaan virittävä puu G_4:



virittävä puu G_4

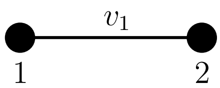
<u>Menetelmä 2:</u> Tässä menetelmässä konstruoidaan jokaisessa välivaiheessa i verkon G alipuu H_i, jossa on i pistettä, $i = 1, 2, \ldots, p_G = 8$. Viimeisessä vaiheessa saatu puu H_8 sisältää kaikki verkon pisteet, joten se on virittävä puu.

H_1:ksi voidaan ottaa mikä tahansa yhden pisteen triviaali aliverkko, esimerkiksi pisteen 1 virittämä aliverkko:



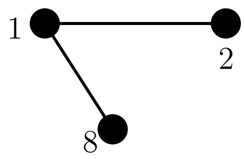
Verkko H_1

Tämän jälkeen lisätään verkkoon joku pisteen 1 naapuri x ja niiden välinen viiva $\overline{1x}$. Otetaan vaikka $x = 2$, jolloin seuraavaksi saadaan tällainen verkko:



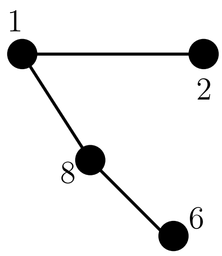
Verkko H_2

Seuraavaksi lisätään uusi piste y ja uusi viiva $\overline{xy}$ siten, että $y \notin P_{H_2}$ ja $x \in P_{H_2}$. Valitaan esimerkiksi $y = 8$, $x = 1$. Jokaisessa välivaiheessa siis lisätään jo konstruoituun puuhun *uusi lehti* (ja viiva, joka yhdistää se puuhun). Yllä tehdyllä valinnalla saadaan seuraava puu:



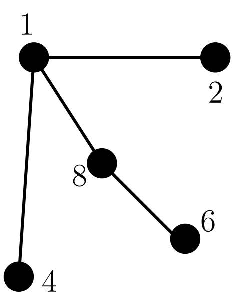
Verkko H_3

Seuraavaksi lisätään vaikkapa piste 6 ja viiva $\overline{86}$. Saadaan puu:



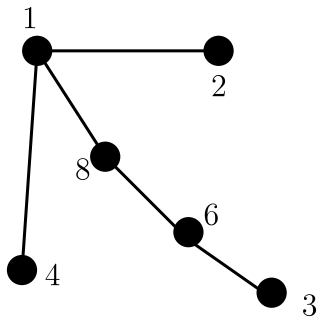
Verkko H_4

Seuraavaksi lisätään piste 4 ja viiva $\overline{14}$:



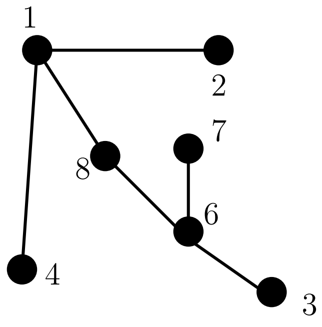
Verkko H_5

Seuraavaksi lisätään piste 3 ja viiva $\overline{63}$:



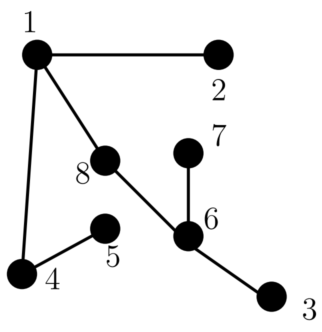
Verkko H_6

Seuraavaksi lisätään piste 7 ja viiva $\overline{67}$:



Verkko H_7

Jäljellä on vain piste 5. Lisätään se vaikka viivan $\overline{45}$ kera. Nyt virittävä puu on konstruoitu:



Virittävä puu H_8

Huomaa, että tuloksena saadaan eri puu kuin menetelmällä 1. Tämä on täysin normaalia - virittävä puu ei ole yleensä yksikäsitteinen. Lisäksi molempien menetelmien jokainen välivaihe sisältää paljon valinnanvaraa, joten on selvä, että on mahdollista konstruoida hyvin erilaisia virittäviä puita.

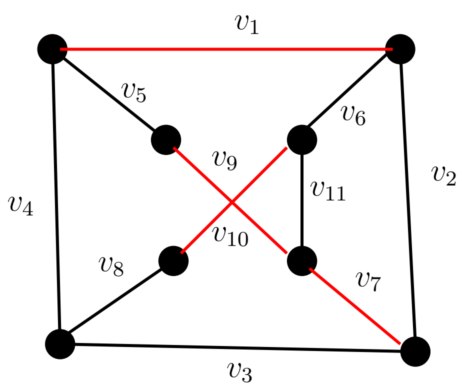
Kurssin luentomateriaalissa on esitetty myös kolmas virittävän puun konstruktiomenetelmä, niin sanottu ”ahne algoritmi”. Esimerkki sen soveltamisesta nähdään tehtävän 8 ratkaisun yhteydessä (painotetun verkon tapauksessa).

Huomautus: Tehtävän verkon kohdalla menetelmässä 1 tarvittiin tasan $11-7=4$ välivaihetta, koska verkosta piti poistaa tasan 4 viivaa, ennen kuin saatiin puu. Menetelmässä 2 taas välivaiheita oli 8, koska verkossa on 8 pistettä. Näin ollen tässä tapauksessa menetelmä 1 on nopeampi.

Yleisesti menetelmä 1 on menetelmään 2 verrattuna ”nopeampi” kun verkossa on ”vähän” viivoja. Kun taas viivoja on ”paljon” menetelmä 2 on nopeampi.

Määritellään vielä verkon G *perusrenkaat* virittävän puun $T = G_4$ (joka oli konstruoitu ensimmäisessä, menetelmän 1 mukaisessa ratkaisussa) suhteen.

Seuraavassa kuvassa on kuva verkosta G, jossa kaikki sen virittävän puun T viivat on merkitty mustalla ja kaikki muut viivat *punaisena*:



Näin ollen perusrenkaita tämän virittävän puun $T = G$ suhteen on tasan neljä - ne ovat renkaat $R(v_1;T)$, $R(v_7;T)$, $R(v_9;T)$, $R(v_{10};T)$.

Määritelmän mukaan viivan $v \in V_G \backslash V_T$ *perusrengas* $R(v;T)$ virittävän puun T suhteen on sellainen verkon G rengas, jonka kaikki viivat, paitsi v, ovat myös virittävän puun T viivat. Lemmoissa IV 2.7 ja IV 2.8 osoitetaan, että tällainen rengas on aina olemassa ja yksikäsitteinen.

Huomataan, että verkossa G on rengas

$$R_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$

jonka kaikki viivat, paitsi v_1, ovat puussa T. Näin ollen

$$R(v_1;T) = R_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

Samalla tavalla nähdään, että

$$R(v_7;T) = \{v_2, v_6, v_7, v_{11}\},$$

$$R(v_9; T) = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_9, v_{11}\},$$

$$R(v_{10}; T) = \{v_2, v_3, v_6, v_8, v_{10}\}.$$

Jokaisen perusrenkaan kohdalla siis yritetään löytää (kuvan avulla) jokin rengas, joka sisältää vain yhden punaisen viivan. Kun se on arvattu, sen täytyy olla etsitty rengas, koska tiedetään teoriasta, että tällainen rengas on yksikäsitteinen.

Huomautus: Perusrenkaat riippuvat virittävän puun valinnasta. Jos käytetään lähtökohtana joku toinen virittävä puu, saadaan todennäköisesti eri perusrenkaita.

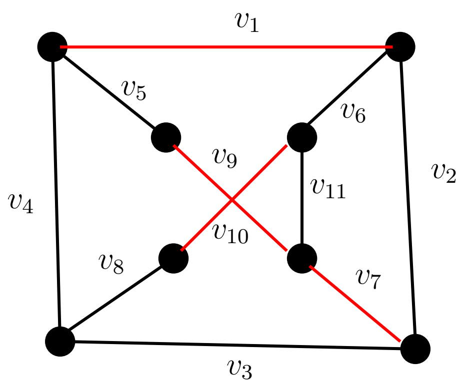
4. Olkoon verkko G kuten edellisessä tehtävässä.
   a) Määritä verkon G kaikki renkaistot. Kuinka monta niitä on?
   b) Kuinka monta rengasta verkolla G on?

Ratkaisu:
a) Koska $v_G = 11$, $p_G = 8$, Korollaarin IV 2.11 mukaan renkaistoja on

$$2^{11-8+1} = 2^4 = 16.$$

Lisäksi Korollaarin IV 2.10 nojalla ne saadaan kaikkina mahdollisina symmetrisinä erotuksina perusrenkaista jonkun virittävän puun T suhteen.

Käytetään samaa virittävää puuta T ja perusrenkaita sen suhteen, jotka olemme jo laskenneet edellisessä tehtävässä. Tässä verkko näyttää seuraavalta:



Kuvassa virittävän puun viivat on piirretty mustana ja kaikki muut viivat punaisena. Perusrenkaat ovat

$$R(v_1; T) = R_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$

$$R(v_7; T) = R_2 = \{v_2, v_6, v_7, v_{11}\},$$

$$R(v_9; T) = R_3 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_9, v_{11}\},$$

$$R(v_{10}; T) = R_4 = \{v_2, v_3, v_6, v_8, v_{10}\}.$$

Tyhjä joukko $R_5 = \varnothing$ on renkaisto. Tässä on sitten jo viisi renkaistoa. Kaikki muut saadaan ottamalla kaikkia mahdollisia perusrenkaiden symmetrisia erotuksia:

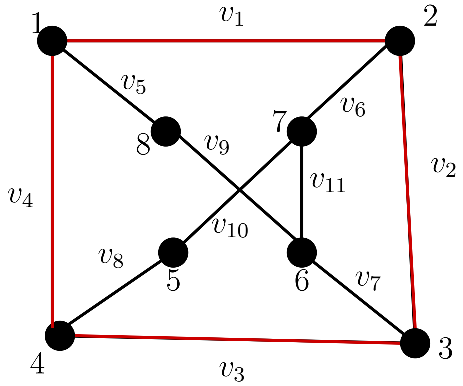
$$R_6 = R_1 \triangle R_2 = \{v_1, v_3, v_4, v_6, v_7, v_{11}\},$$

$$R_7 = R_1 \triangle R_3 = \{v_1, v_5, v_6, v_9, v_{11}\},$$
$$R_8 = R_1 \triangle R_4 = \{v_1, v_4, v_6, v_8, v_{10}\},$$
$$R_9 = R_2 \triangle R_3 = \{v_3, v_4, v_5, v_7, v_9\},$$
$$R_{10} = R_2 \triangle R_4 = \{v_3, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}\},$$
$$R_{11} = R_3 \triangle R_4 = \{v_4, v_5, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\},$$
$$R_{12} = R_1 \triangle R_2 \triangle R_3 = \{v_1, v_2, v_5, v_7, v_9\},$$
$$R_{13} = R_1 \triangle R_2 \triangle R_4 = \{v_1, v_2, v_4, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}\},$$
$$R_{14} = R_1 \triangle R_3 \triangle R_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\},$$
$$R_{15} = R_2 \triangle R_3 \triangle R_4 = \{v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}.$$
$$R_{16} = R_1 \triangle R_2 \triangle R_3 \triangle R_4 = \{v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}.$$

b) Käymällä läpi kaikki löydetyt renkaat $R_1 - R_{16}$ nähdään, että itse asiassa **jokainen** niistä, paitsi tyhjä joukko R_5, on rengas. Näin ollen verkolla on tasan 15 rengasta.

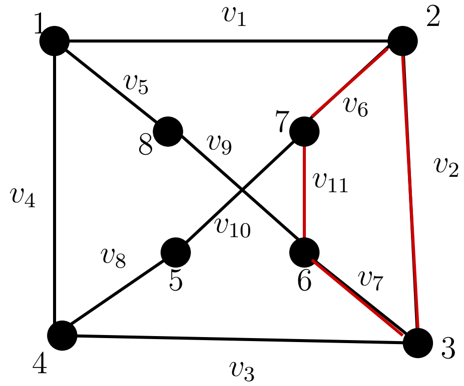
Kuvissa alla on esitetty jokainen rengas. Renkaan viivat sitä vastaavassa kuvassa on piirretty punaisena. Kuvan alla on annettu esimerkki syklistä, joka määrää renkaan.

Perusrenkaat:



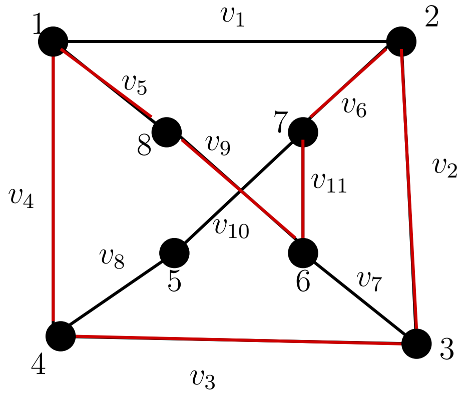
Rengas R_1

4-Sykli $(1, 2, 3, 4, 1)$



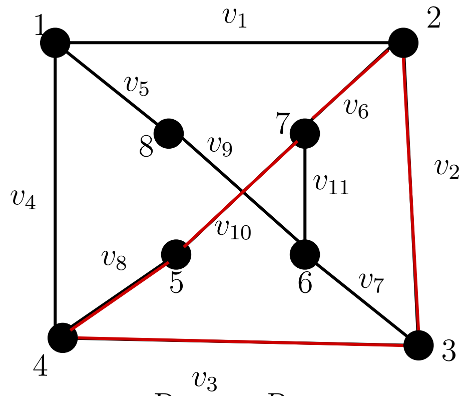
Rengas R_2

4-Sykli $(2, 3, 6, 7, 2)$



Rengas R_3

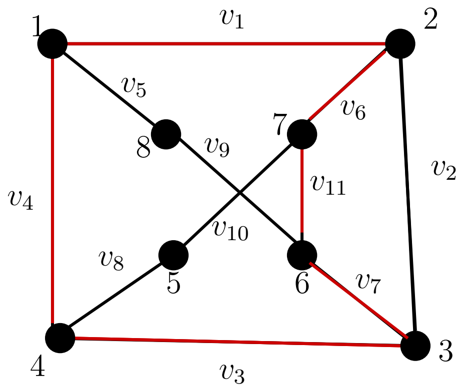
7-Sykli $(1, 8, 6, 7, 2, 3, 4, 1)$



Rengas R_4

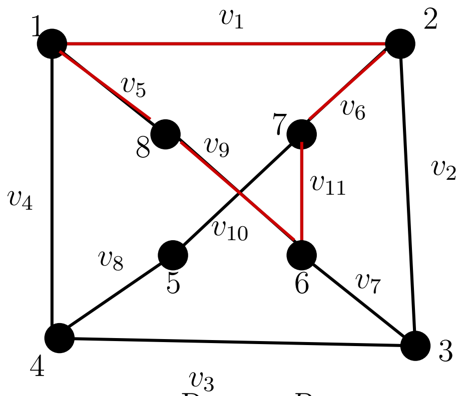
5-Sykli $(2, 3, 4, 5, 7, 2)$

Muut renkaat:



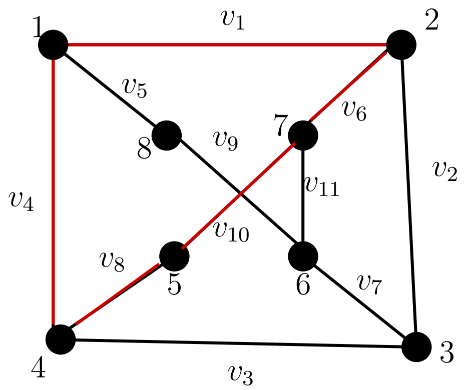
Rengas R_6

6-Sykli $(1, 2, 7, 6, 3, 4, 1)$



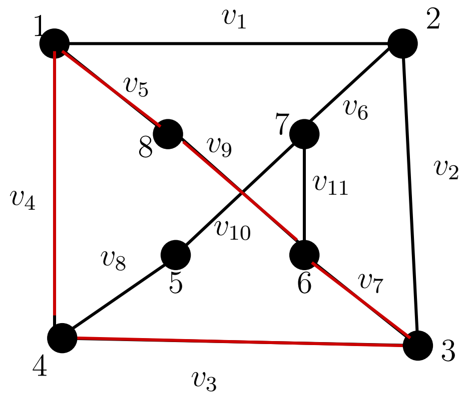
Rengas R_7

5-Sykli $(1, 2, 7, 6, 8, 1)$



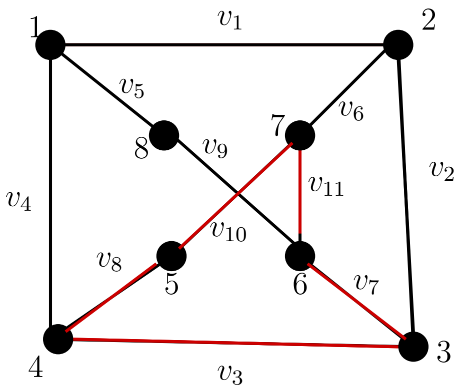
Rengas R_8

5-Sykli $(1, 2, 7, 5, 4, 1)$



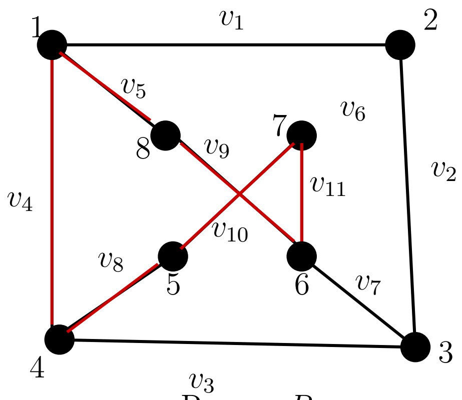
Rengas R_9

5-Sykli $(1, 8, 6, 3, 4, 1)$



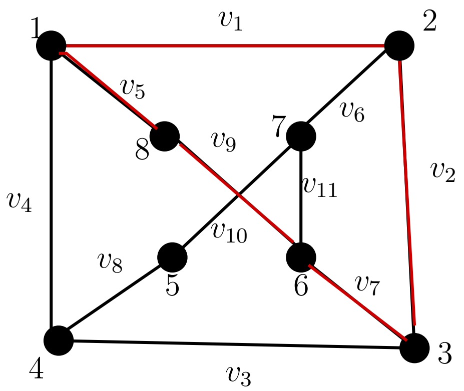
Rengas R_{10}

5-Sykli $(4, 5, 7, 6, 3, 4)$



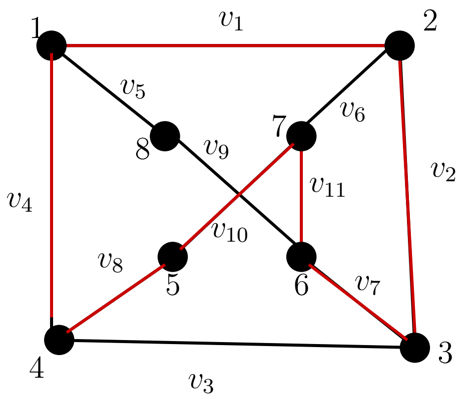
Rengas R_{11}

6-Sykli $(1, 8, 6, 7, 5, 4, 1)$



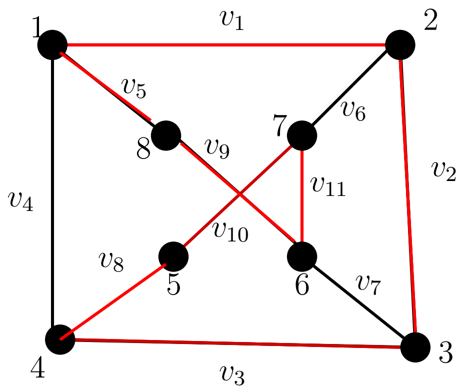
Rengas R_{12}

5-Sykli $(1, 2, 3, 6, 8, 1)$



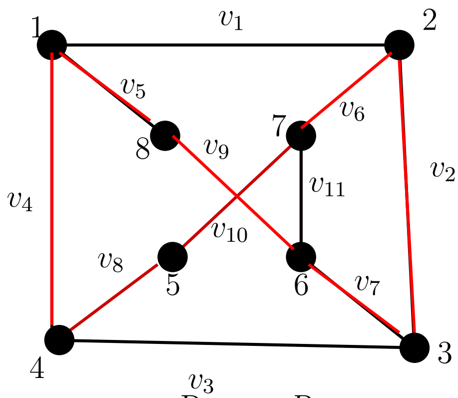
Rengas R_{13}

7-Sykli $(1, 2, 3, 6, 7, 5, 4, 1)$



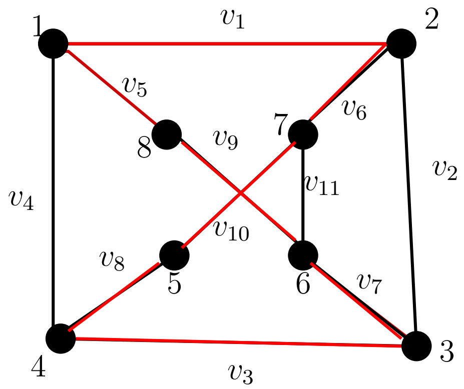
Rengas R_{14}

7 - Sykli $(1, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 8, 1)$



Rengas R_{15}

8 - Sykli $(1, 8, 6, 3, 2, 7, 5, 4, 1)$

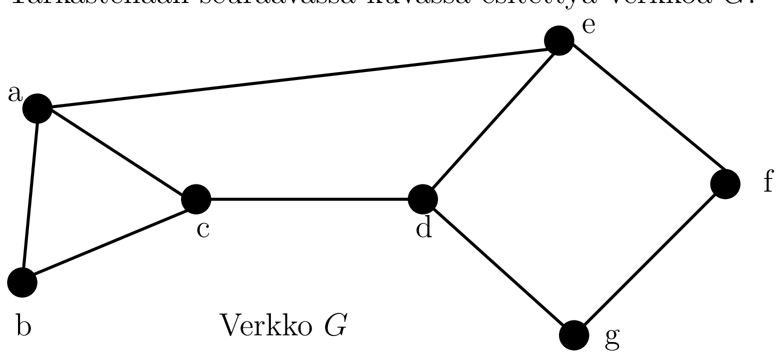


Rengas R_{16}

8 - Sykli $(1, 2, 7, 5, 4, 3, 6, 8, 1)$

Huomaa, että kaksi viimeistä rengasta edustavat *Hamiltonin kulkua* verkossa G. Samalla olemme siis osoittaneet, että verkossa G on oleellisesti tasan kaksi erilaista Hamiltonin kulkua.

5. Tarkastellaan seuraavassa kuvassa esitettyä verkkoa G.



Verkko G

a) Keksi verkolle G sellainen yksisuuntaistus $\overrightarrow{G}$, jonka ainoa juuri on a.

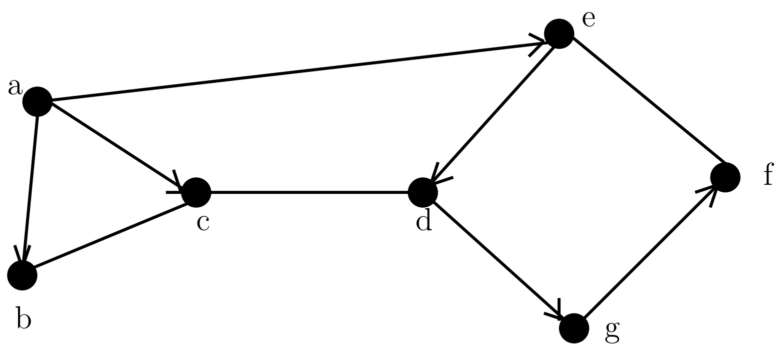
b) Onko verkolla G sellaista yksisuuntaistusta, jonka juurten joukko on täsmälleen $\{a, b\}$?

c) Onko verkolla G sellaista yksisuuntaistusta, jonka juurten joukko on täsmälleen $\{a, b, c\}$?

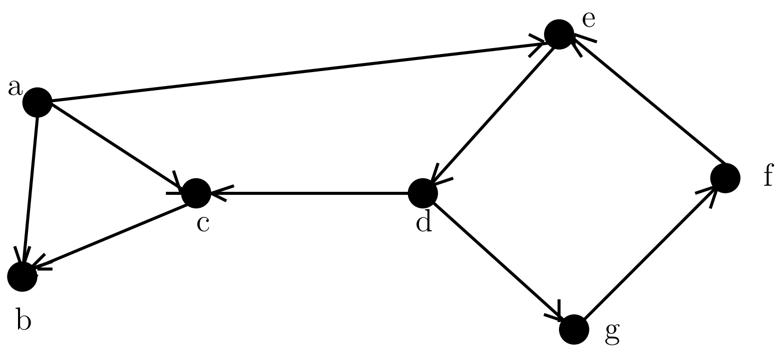
Ratkaisu: a) Aluksi kannattaa huomata seuraava tosiasia. Olkoon x suhteikon G juuri. Tällöin, jos $y \in G$ ja on olemassa nuoli $\overrightarrow{yx}$, niin y on myös juuri. Nimittäin olkoon $z \in P_G$ mielivaltainen. Koska x on juuri, on olemassa kulku $(x, x_1, \ldots, x_n = z)$. Tällöin $(y, x, x_1, \ldots, x_n = z)$ on kulku y:stä z:ään. Koska tämä pätee kaikilla $z \in P_G$, y on myös juuri.

Edellisestä seuraa, että jos a halutaan olevan yksisuuntaistuksen $\overrightarrow{G}$ **ainoa** juuri, a ei voi erityisesti olla mikään nuolen loppupiste eli on oltava $d_+(a) = 0$. Toisin sanoen viivat $\overline{ab}$, $\overline{ac}$ ja $\overline{ae}$ on siis suunnattavaa "poispäin" a:stä, eli yksisuuntaistuksessa $\overrightarrow{G}$ on oltava nuolet $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{ac}$ ja $\overline{ae}$. Näillä valinnoilla taataan jo, että ainakin a:n naapureista b, c, e mikään ei voi olla juuri. Lisäksi nyt itse asiassa riippumatta muiden viivojen valinnoista mikään muu piste ei voi enää olla juuri, sillä muilla pisteillä ei voi näillä valinnoilla enää olla suhteikossa $\overrightarrow{G}$ kulkuja a:han (jos tällainen olisi, olisi myös ainakin yksi nuoli, joka loppuu a:han, nimittäin kulun viimeinen askel).

Nyt a:stä päästään suhteikossa $\overrightarrow{G}$ ainakin pisteisiin b, c, e. Sen jälkeen riittää esimerkiksi suunnistaa kaikki viivat sillä tavalla, että e:stä pääsee jäljellä oleviin pisteisiin d, f, g. Näin saadaan esimerkiksi tällainen ratkaisun välivaihe (on olemassa muitakin vaihtoehtoja):



Tämä ei ole vielä yksisuuntaistus, sillä muutamalle viivalle ei ole vielä annettu suuntaa, mutta näillä valinnoilla päästään jo haluttuun lopputulokseen - riippumaatta siitä, miten loput viivoista suunnataan, saadaan sen jälkeen aina yksisuuntaistus, jonka ainoa juuri on piste a. Esimerkiksi tällainen yksisuuntaistus käy ratkaisuksi:



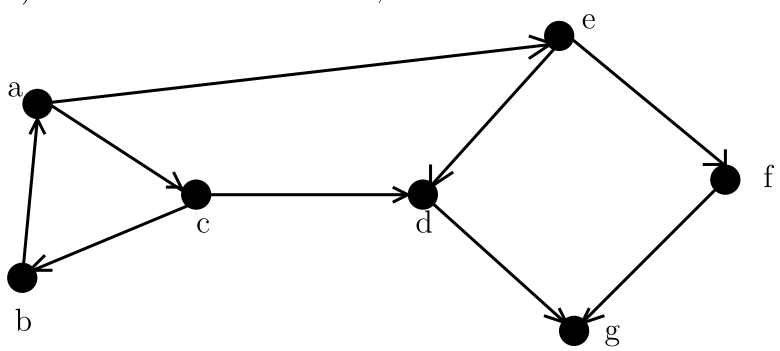
Valitsemalla esimerkiksi nuolille $\overrightarrow{bc}$ ja/tai $\overrightarrow{cd}$ toinen yksisuuntaistus, saadaan muita mahdollisia ratkaisuja.

b) Verkolla *ei ole* olemassa sellaista yksisuuntaisuutta $\overrightarrow{G}$, jonka juurten joukko olisi **täsmälleen** $\{a, b\}$. Nimittäin, olkoon $\overrightarrow{G}$ tällainen yksisuuntaistus. Tällöin erityisesti pisteiden a ja b naapurit c, e eivät ole juuria. a)-kohdan ratkaisun yhteydessä tehdyn havainnon perusteella suhteikossa $\overrightarrow{G}$ ei voi olla nuolia $\overrightarrow{ca}$, $\overrightarrow{cb}$, $\overrightarrow{ea}$, koska jos ainakin yksi näistä nuolista olisi suhteikossa, ainakin toinen pisteistä c, e olisi myös juuri. Näin ollen suhteikossa on nuolet $\overrightarrow{ac}$, $\overrightarrow{bc}$, $\overrightarrow{ae}$. Lisäksi, koska verkossa G on viiva $\overline{ab}$, suhteikossa $\overrightarrow{G}$ on oltava tasan yksi nuolista $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{ba}$.

Nyt jos suhteikossa $\overrightarrow{G}$ ei ole nuolta $\overrightarrow{ab}$, niin b:n tuloaste suhteikossa on nolla, joten suhteikossa ei voi olla olemassa kulkua a:stä b:hen. Tämä on vastoin oletusta, sillä a:n piti olla juuri. Samanlaiseen ristiriitaan päädytään, jos suhteikossa ei ole nuolta $\overrightarrow{ba}$, tällöin b:stä ei voi olla kulkua a:han.

Huomautus: Yleisesti voidaan helposti osoittaa, että verkolla ei voi olla sellaista yksisuuntaistusta, jonka juurten joukko on kaksio. Tämän voi tehdä esimerkiksi seuraavasti - olkoot x, y verkon G pisteitä, $x \neq y$ ja oletetaan, että x ja y ovat molemmat yksisuunaistuksen $\overrightarrow{G}$ juuret. Suhteikko $\overrightarrow{G}$ on yksisuntainen, joten siinä voi esiintyä *korkeintaan vain toinen* nuoleista $\overrightarrow{xy}$ ja $\overrightarrow{yx}$, joten ainakin yksi niistä ei ole suhteikossa $\overrightarrow{G}$. Voidaan olettaa, että $\overrightarrow{yx}$ ei ole suhteikon $\overrightarrow{G}$ nuoli. Kuitenkin y on juuri, joten on olemassa kulku $(y = y_0, y_1, \ldots, y_n = x)$ y:stä x:ään. Koska nuolta $\overrightarrow{yx}$ ei suhteikossa ole, tässä kulussa esiintyy muitakin pisteitä kuin y ja x. Olkoon z tällainen piste. Tällöin z:stä on kulku x:ään, joten se on myös juuri, Näin ollen x ja y eivät voi olla ainoat juuret.

c) Suuntaistus on olemassa, esimerkiksi:



On olemassa muitakin ratkaisuja.

Jos ratkaisua ei pysty keksimään heti, voidaan ensin huomata sen seuraavia ominaisuuksia.

Olkoon $\overrightarrow{G}$ siis verkon G yksisuuntaistus, jonka juurten joukko on täsmälleen $\{a, b, c\}$. Tällöin viivat $\overline{ae}$ ja $\overline{cd}$ on pakko suunnistaa siten, että suhteikossa $\overrightarrow{G}$ on nuolet $\overrightarrow{ae}$ ja $\overrightarrow{cd}$ - sillä muuten e tai d olisi myös juuri. Osoitetaan, että suhteikossa $\overrightarrow{G}$ pisteiden a, b, c välisen kolmion viivat on pakko suunnista sillä tavalla, että nämä pisteet muodostavat syklin (a, b, c, a) tai (a, c, b, a), riippuen valitusta kulkusuunnasta. Nimittäin, oletetaan, että suhteikossa $\overrightarrow{G}$ on nuolet $\overrightarrow{ab}$ ja $\overrightarrow{ac}$. Tällöin mikään nuoli ei vie a:han, joten ei voi olla kulkua b:stä a:han, jolloin b ei voi olla juuri. Seuraavaksi oletetaan, että suhteikossa $\overrightarrow{G}$ on nuolet $\overrightarrow{ba}$ ja $\overrightarrow{ca}$ ja vaikkapa nuoli $\overrightarrow{bc}$. Tällöin mikään nuoli ei vie b:hen, jolloin esim. a ei voi olla juuri. Jos taas $\overrightarrow{cb}$, niin mikään nuoli ei vie c:hen, jolloin esim. a ei taaskaan voi olla juuri. Näin ollen toinen viivoista $\overline{ab}$ ja $\overline{ac}$ on suunnistavaa poispäin a:stä ja toinen taas a:han päin. Jos suhteikossa $\overrightarrow{G}$ on nuolet $\overrightarrow{ab}$ ja $\overrightarrow{ca}$, niin siinä on pakko olla nuoli $\overrightarrow{bc}$, koska muuten b:sta ei lähde nuolia, jolloin se ei voi olla juuri. Jos taas suhteikossa on nuolet $\overrightarrow{ba}$ ja $\overrightarrow{ac}$, niin siinä on pakko olla nuoli $\overrightarrow{cb}$, koska muuten b:hen ei saavu yhtään nuolta. Näin ollen pisteiden a, b, c on muodostava sykli yksisuuntaistuksessa $\overrightarrow{G}$. Sen kulkusuunnan valinnalla ei ole merkitystä. Lopuksi pitää vielä suunnistaa neliön $d - e - f - g$ viivat sillä tavalla, että pisteisiin f ja g pääsee pisteistä e ja/tai d. Tämän jälkeen yksisuunnistus on valmis ja sen juurten joukko on tasan $\{a, b, c\}$.

6. Olkoon $\overrightarrow{T}$ suunnattu puu ja olkoon a sen juuri. Olkoon J pistejoukon $P_{\overrightarrow{T}} \setminus \{a\}$ virittämä $\overrightarrow{T}$:n alisuhteikko. Olkoon S jokin suhteikon J yhtenäinen komponentti. Osoita, että S on suunnattu puu, jonka juuri on eräs solmun a seuraaja suhteikossa $\overrightarrow{T}$.

Ratkaisu: Olkoon T suunnatun puun $\overrightarrow{T}$ symmetrinen sulkeuma. Tällöin T on puu. On selvä, että suhteikon J symmetrinen sulkeuma J^s on tällöin puun T aliverkko, joten J^s on erityisesti renkaaton, eli metsä. Suhteikon J yhtenäisen komponentin S symmetrinen sulkeuma S^s on tällöin verkon J^s (yhtenäinen) komponentti. Jokainen metsän komponentti on puu. Näin ollen S^s on puu, joten S on yksisuuntainen suhteikko, jonka symmetrinen sulkeuma on puu. Osoittakseen, että se on suunnattu puu, riittää vielä näyttää, että sillä on juuri. Lisäksi meidän pitää osoittaa, että tämä juuri on eräs pisteen a seuraaja suhteikossa $\overrightarrow{T}$.

Olkoon x jokin suhteikon S piste. Koska S on suhteikon $\overrightarrow{T}$ alisuhteikko ja koska a on tämän suhteikon juuri, on olemassa (yksikäsitteinen) yksinkertainen kulku $\bar{x} = (a = x_0, b_x = x_1, \ldots, x_n = x)$ juuresta a pisteseen x suhteikossa $\overrightarrow{T}$. Tällöin $x_1 = b_x$ on pisteen a seuraaja suhteikossa $\overrightarrow{T}$ ja $(b_x = x_1, \ldots, x_n = x)$ on kulku suhteikossa J pisteestä b pisteseen x. Koska $x \in S$ ja S on x:n yhtenäinen komponentti suhteikossa J, tämä kulku sisältyy kokonaan suhteikkoon S. Erityisesti $b_x \in S$. Olemme näyttäneet, että S sisältää ainakin yhden pisteen a seuraajan b_x.

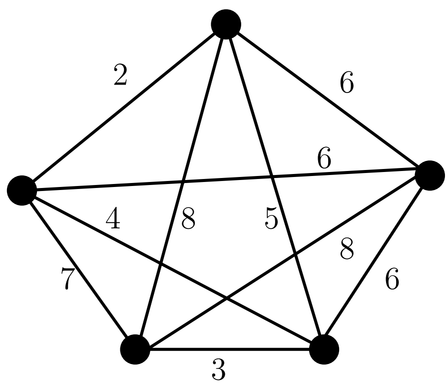
Pitää vielä näyttää, että b_x on S:n juuri. Huomaa, että tähän ei riitä huomata, että yllä löydettiin kulku b_x:stä x:hen, sillä x on vain eräs S:n piste. Tarkasti ottaen, olemme todistaneet, että jokaiselle suhteikon S pisteelle x on olemassa kulku $(b_x = x_1, \ldots, x_n = x)$ **jostakin** a:n seuraajasta b_x, mutta periaatteessa tämä seuraaja b_x voi riippua x:stä (tästä syystä alaindeksi merkinnässä b_x). Riittää siis osoittaa, että tämä seuraaja on *yhteinen* kaikille S pisteille.

Toisin sanoen riittää osoittaa, että S sisältää *korkeintaan* yhden a:n seuraajan, toisin sanoen ei voi sisältää kaksi eri a:n seuraajia. Tehdään vasta-oletus: S sisältää kaksi erilaista a:n seuraajaa b ja c, $b \neq c$. Johdetaan tästä ristiriita.

Koska S^s on verkon J^s yhtenäinen komponentti (kuten on todettu yllä), verkossa S^s on olemassa yksinkertainen kulku $(b = x_0, x_1, \ldots, x_n = c)$ pisteestä b pisteeseen c. Koska tämä kulku pysyy verkossa J^s, se ei erityisesti voi sisältää pistettä $a \notin P_J$. Tällöin (a, c) ja $(a, b, x_1, \ldots, x_n = c)$ ovat kaksi **erilaista** yksinkertaista kulkua pisteestä a pisteeseen c verkossa T. Mutta verkko T on puu ja puussa tällainen tilanne ei ole mahdollinen (Lause IV 1.8). Saatu ristiriita osoittaa sen, että suhteikko S voi sisältää korkeintaan yhden a:n seuraajan. Toisaalta, yllä on näytetty, että jokaiseen suhteikon S pisteeseen x pääsee kulkua pitkin jostakin a:n seuraajasta b_x, joka on S:n alkio. Näin ollen tämän seuraajan $b_x = b$ on oltava sama kaikille x. Erityisesti se on suhteikon S juuri.

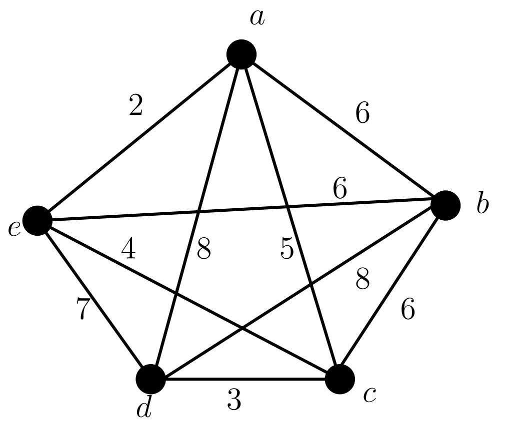
Tyypillinen virhe: Suunnattu puu **ei ole** mikä tahansa yksisuuntainen suhteikko, jonka symm. sulkeuma on puu, vaan sen määritelmään kuuluu myös **juuren olemassaolo**. Vaikka S on suunatun puu alisuhteikko, ei voi olettaa ilman perusteluja, että se on silloin suunnattu puu, vaan tämä pitää perustella ja muun muassa osoittaa, että sillä on juuri (joka paljastuu a:n seuraajaksi). Ei voi vaan olettaa, että sillä on juuri, koska koko tehtävän pointti on nimenomaan osoittaa, että S:llä on juuri, joka on lisäksi a:n seuraaja.

7. Kuvassa alla on esitetty eräs *painotettu* verkko G.

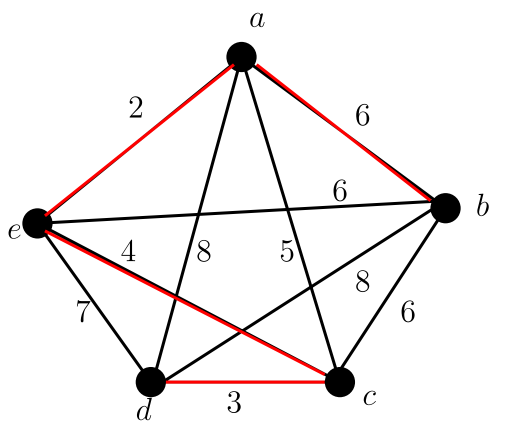


Verkon jokaisen viivan paino on merkitty kuvassa viivan viereen. Määritä painotetun verkon G *minimaalinen* virittävä puu
a) ahneella algoritmilla, b) jollakin toisella (materiaalissa esitetyllä) menetelmällä.

Ratkaisu:
Nimitetään solmut:



a) Ahneessa algoritmissa aloitetaan valitsemalla painoltaan pienin viiva, eli $\overline{ae}$ (paino 2). Sen jälkeen valitaan seuraavaksi pienin, eli $\overline{cd}$, paino 3, seuraavaksi $\overline{ce}$ (paino 4). Sen jälkeen seuraavaksi painoltaan pienin viiva on viiva $\overline{ac}$, paino 5, mutta sitä ei voida lisätä puuhun, koska silloin siinä olisi sykli (a, e, c). Näin ollen siirytään seuraavaksi pienempään. Niitä on kolme - viiva $\overline{ab}$, $\overline{be}$, $\overline{bc}$, jokaisen paino on 6. Seuraavaksi lisätään puuhun **mikä vaan** yksi näistä (mutta vain yksi!). Lisätään esimerkiksi $\overline{ab}$. Tällöin ollaan valmiit - saatu verkko on virittävä puu (sen viivat on merkitty kuvaan punaisena):

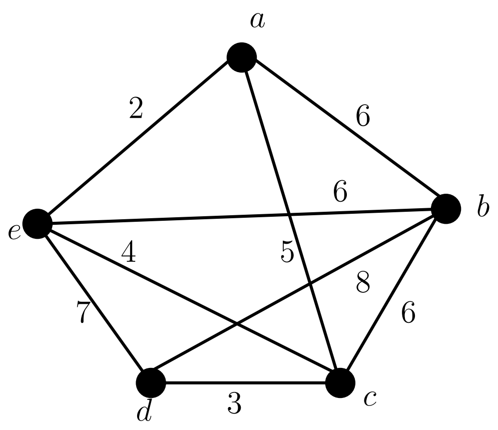


Yhtä hyvin olisi voinut lisätä viimeisessä vaiheessa viiva $\overline{be}$ tai viiva $\overline{ec}$ (jompi kumpi, mutta ei molempia!). Tällöin saadaan toisenlaisia esimerkkejä tehtävän painotetun verkon minimaalille virittävälle puulle. Kaikilla ratkaisuilla on sama paino - se on $2 + 3 + 4 + 6 = 15$.

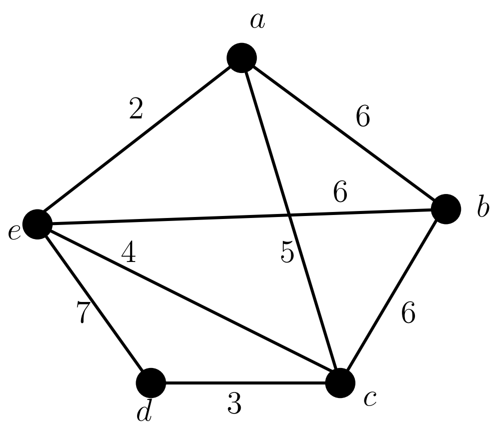
b) Esitetään muiden luentomateriaalissa esitettyjä menetelmien mukaisia ratkaisuja. Ahneen algoritmin lisäksi käytössä on vielä kaksi menetelmää (kts. materiaalin ”Puut” sivu 12).

Menetelmä 1: Jokaisessa välivaiheessa valitaan johonkin tämän välivaiheen verkon renkaaseen kuuluvista viivoista painoiltaan **suurin** ja poistetaan se verkosta.

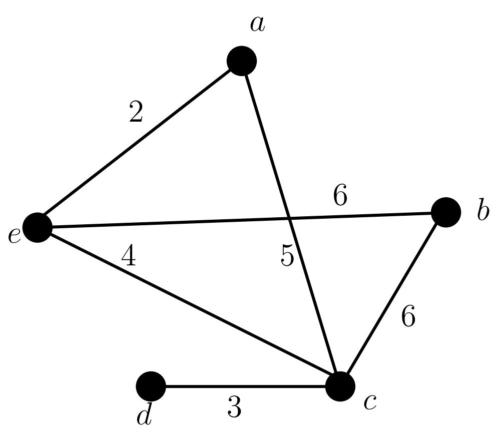
Alussa jokainen verkon viiva on jossakin renkaassa. Painoltaan suurimmat ovat viivat $\overline{ad}$ ja $\overline{bd}$, molempien paino 8. Poistetaan esimerkiksi aluksi viiva $\overline{ad}$. Tällöin saadaan seuraava verkko:



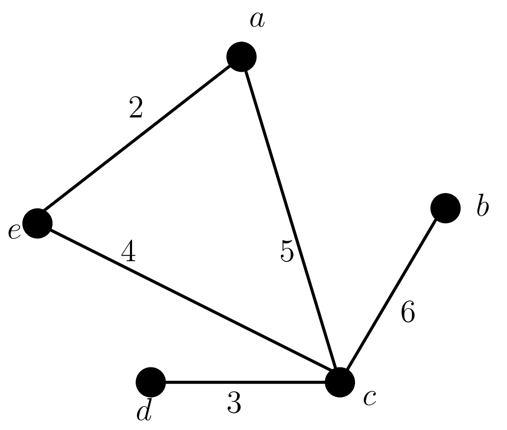
Uudessa verkossa on tasan yksi painoltaan suurin viiva - se on viiva $\overline{bd}$, paino 8. Tämä viiva on edellenkin renkaassa - esimerkiksi syklin (d, b, c, d) määrämässä renkaassa. Seuraavaksi poistetaan se:



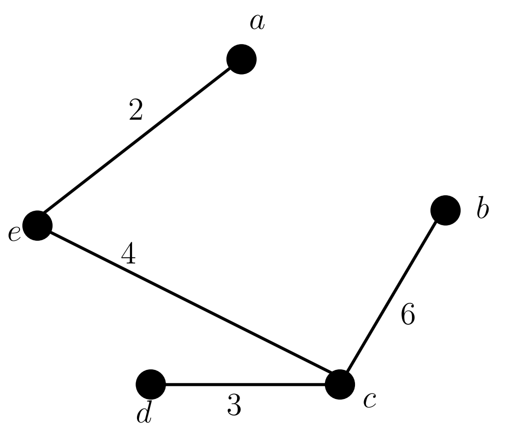
Seuraavaksi poistetaan viiva $\overline{de}$, koska sen paino on jäljellä olevista suurin (7) ja se on renkaassa, jonka määrää sykli (e, c, d, e). Sen jälkeen jäljellä olevalla verkolla on seuraavaksi kolme painoltaan suurimpaa viivaa - viivat $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{be}$, jotka ovat kaikki painoltaan 6.
Lisäksi ne kaikki ovat jossakin renkaassa, joten voidaan poistaa mikä vaan niistä. Poistetaan seuraavaksi $\overline{ab}$. Saadaan verkko



Tässä verkossa on jäljellä vain yksi rengas ja siihen kuuluu molemmat viivat $\overline{be}$ ja $\overline{bc}$, joiden paino on tässä vaiheessa suurin (6). Poistetaan seuraavaksi vaikkapa viiva $\overline{be}$. Saadaan seuraava verkko:

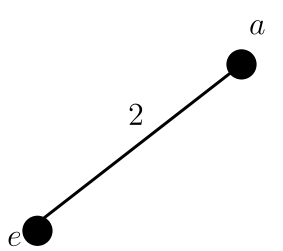


Nyt painavin viiva $\overline{bc}$ **ei ole enää missään renkaassa**, joten sitä ei enää voi poistaa. Jätetään se rauhaan ja tarkastellaan seuraavaksi painavinta viivaa $\overline{ac}$, jonka pituus on 5. Se kuuluu renkaaseen, jonka määrää sykli (a, c, e, a), joten seuraavaksi poistetaan se. Nyt saadaan vihdoinkin minimaalinen virittävä puu:



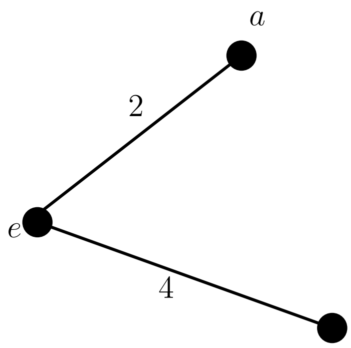
Tämä on erilainen minimaalinen virittävä puu kuin mikä saatiin a)-kohdassa, mutta se on painoltaan sama, sen paino on 15.

Menetelmä 2: Tässä menetelmässä lähdetään kevyemmästä viivasta, eli viivasta $\overline{ae}$ (paino 2).Näin saadaan ensimmäisen välivaiheen verkko H_1:

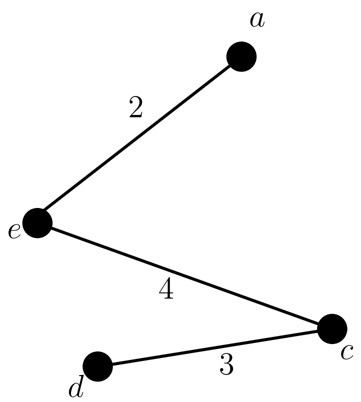


Verkon H_1 pistejoukko on $P_1 = P_{H_1} = \{a, e\}$. Tarkastellaan *kaikkia* viivoja joiden toinen päätepiste on joukossa P_1 ja toinen ei ole. Nyt ne ovat viivat $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{ad}$, $\overline{eb}$,

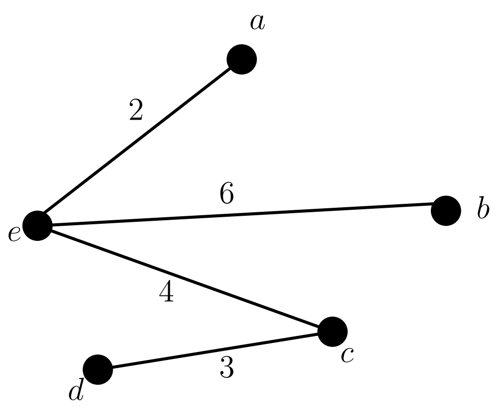
$\overline{ec}$ ja $\overline{ed}$. Poimitaan näistä painoltaan *pienin* ja lisätään se (toisen päätepisteensa kera) verkkoon H_1. Tässä tapauksessa näistä viivoista painoltaan pienin on viiva $\overline{ec}$, paino 4. Huomaa, että viiva $\overline{cd}$ on painoltaan pienempi kuin $\overline{ec}$, mutta tässä menetelmässä sitä ei voi tässä vaiheessa lisätä verkkoon, koska sen kumpikin päätepiste ei ole joukossa P_1.
Ensimmäisen välivaihen jälkeen saadaan verkko H_2, jolle $P_2 = P_{H_2} = \{a, c, e\}$:



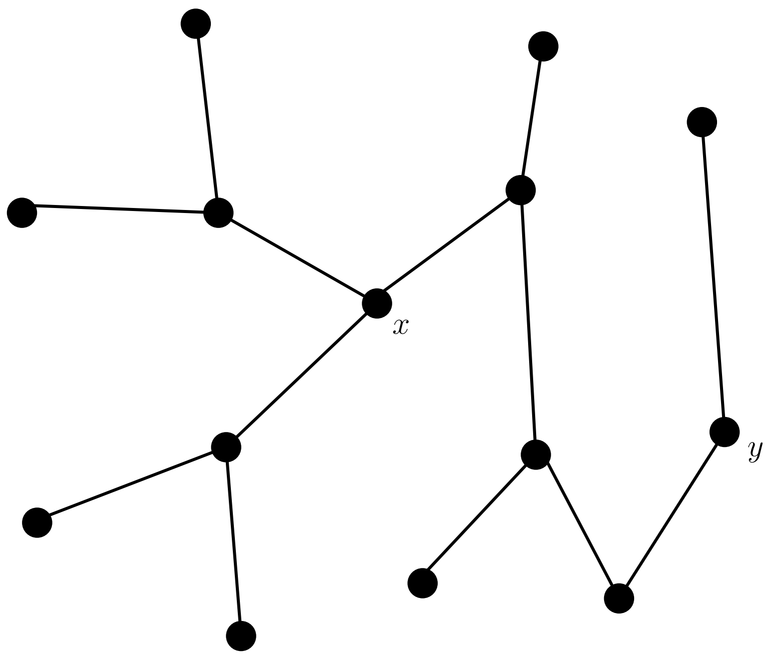
Seuraavaksi katsotaan kaikkia viivoja, joiden toinen päätepiste on joukossa $P_2 = P_{H_2} = \{a, c, e\}$ ja valitaan niistä kevyin. Nyt se on viiva $\overline{cd}$ (paino 3). Lisätään se:



Seuraavaksi tarkastellaan viivoja, joiden toinen päätepiste on joukossa $\{a, c, d, e\}$ ja toinen ei ole ja valitaan niistä painoltaan pienin. Tässä vaiheessa ainoa piste, joka ei ole joukossa $\{a, c, d, e\}$ on b, joten tarkastellaan oikeastaan kaikkia verkon viivoja, joiden toinen päätepiste on b. Niistä $\overline{ba}$, $\overline{bc}$ ja $\overline{be}$ ovat kaikki painoltaan 6 ja muut vielä painavampia. Lisätään siis näistä kolmesta jokin yksi, esimerkiksi $\overline{be}$. Saadaan seuraaava minimaalinen virittävä puu:



8. Olkoon puu T kuten seuraavassa tehtävässä:

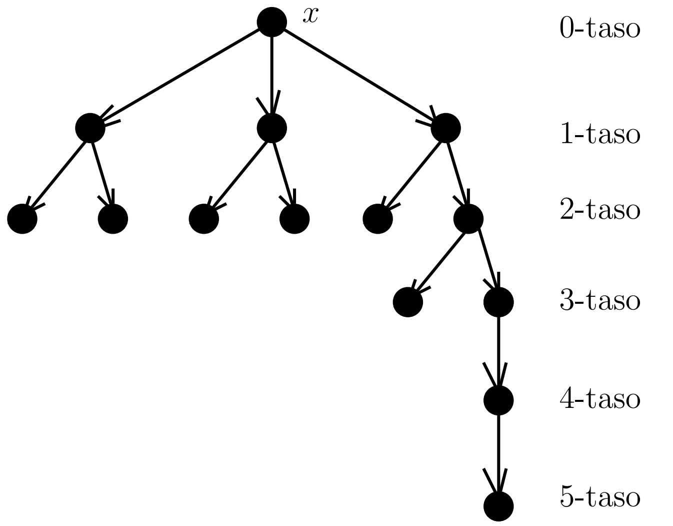


Puu T

Määritä puulle T yksisuuntaisuudet $\overrightarrow{T}_1$, $\overrightarrow{T}_2$ siten, että suunnatun puun $\overrightarrow{T}_1$ juuri on x ja suunnatun puun $\overrightarrow{T}_2$ juuri on y. Piirrä molemmat suunnatut puut niin, että puun juuri on kaavion ylimmäinen piste ja saman tason pisteet ovat samalla korkeudella. (kts. Esimerkki 3 sivulla 4, "Verkon yksisuuntaisuudet"-materiaali). Ilmoita kummankin puun haaraisuus.

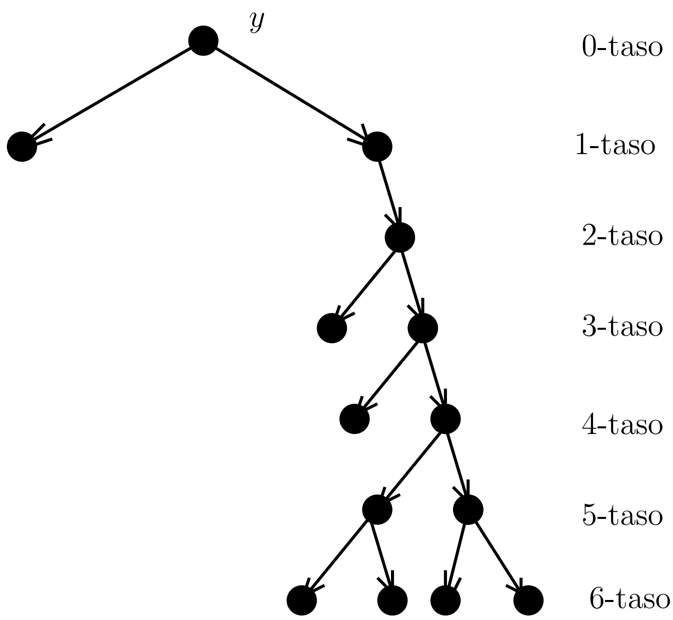
Ratkaisu:

Yksisuuntaistus $\overrightarrow{T}_1$:



Suunnatun puun korkeus on 5 ja haaraisuus 3.

Yksisuuntaistus $\overrightarrow{T}_2$:



Suunnatun puun korkeus on 6 ja haaraisuus 2.

9. Yksi kahdestatoista kolikosta on väärä ja eroaa muista painoltaan (kevyempi tai painavampi). Montako punnitusta tasavarsivaa'alla tarvitaan väärän kolikon löytämiseksi ja sen laadun selvittämiseksi?

   Ratkaisu: Kuvataan ratkaisu suunnatulla puulla, jonka korkeukset vastaavat punnituskertoja. Koska jokaisella punnituksella on korkeintaan kolme mahdollista lopputulosta (vaa'an vasen puoli painavampi, oikea puoli painavampi, molemmat puolet yhtä painavia), puun haaraisuus on (korkeintaan) kolme. Puun korkeus siis kertoo sen, kuinka monella punnituksella selviää missä tahansa tilanteessa.

Koska jokainen kahdestatoista kolikosta voi olla väärä ja lisäksi joko kevyempi tai painavampi normaaliin kolikkoon verrattuna, punnituksilla on 24 mahdollista lopputulosta, joten puulla täytyy olla vähintään 24 lehtiä. Korollaarin IV 3.7. nojalla punnitus ei ole mahdollista tehdä kahdella punnituksella, koska tällöin puun korkeus olisi kaksi, joten sillä olisi korkeintaan $3^2 = 9$ lehtiä. Kolmen punnituksen tapauskessa puulla olisi korkeintaan 27 lehtiä ja koska tehtävässä on 24 mahdollista lopputulosta, ainakin näyttää olevan mahdollista teoreettisten tulosten valossa, että ehkä onglema voidaan ratkaista kolmella punnituksella. Näin todellakin on, mutta tämän osoittamiseksi on keksittävä toimiva tapa selvitä asiaa kolmella punnituksella.

Tehdään aluksi seuraava havainto. Oletetaan, että meillä on vain kolme kolikkoa $1, 2, 3$, joista yksi on väärä ja lisäksi *tiedetään, onko se kevyempi vai painavampi kuin muut*. Tällöin ongelma ratkeaa yhdellä punnituksella - verrataan vaikkapa kolikoita $1, 2$. Jos ne ovat eri painoisia, nähdään suoraan kumpi on väärä (koska nyt tiedetään, onko väärä kolikko kevyempi vai painavampi kuin muut). Jos ne ovat samanpainoisia, kolikon 3 on oltava väärä.

Oletetaan, että meillä on 12 kolikkoa, jotka on merkitty $1 - 9, A, B, C$ (vältetään kaksisymbolisia nimityksiä kolikoille). Laitetaan vaa'an vasemmalle kupille kolikot $1, 2, 3, 4$ ja oikealle $5, 6, 7, 8$.

<u>Tapaus 1:</u> Vaaka on tasapainossa. Tällöin tiedetään, että väärä raha on yksi kolikoista $9, A, B, C$ ja lisäksi kolikot $1 - 8$ ovat kaikki varmasti oikeita. Seuraavaksi (toinen punnitus!) verrataan kolikot A, B, C ja $1, 2, 3$. Jos toinen puoli on painavampi kuin toinen, tästä seuraa, että väärä raha on kolikkojen A, B, C joukossa ja lisäksi siitä, kumpi puoli on kevyempi voidaan päätellä onko väärä raha kevyempi vai painavampi kuin muut. Tämän jälkeen meillä on siis kolme kolikkoa A, B, C ja tiedetään väärän kolikon laatu ja tästä selvitään yhdellä (kolmas!) punnituksella, kts. yllä. Jos taas toisen punnituksen seurauksena vaaka on tasapainossa, väärä kolikko on varmasti kolikko 9. Kolmannessa punnituksessa verrataan se mihin tahansa toiseen, varmasti oikeaan, kolikkoon, jolloin selviää myös sen laatu.

<u>Tapaus 2:</u> $1, 2, 3, 4$ on kevyempi kuin $5, 6, 7, 8$. Nyt tiedetään, että väärä kolikko on yksi kolikoista $1-8$, joten kolikot $9, A, B, C$ ovat varmasti oikeita. Punnitaan seuraavaksi $5, A, B, C$ (vasen kuppi) ja $4, 6, 7, 8$ (oikea kuppi) - kyseessä toinen punnitus! Tällöin seuraavat tapaukset mahdollisia.

Tapaus 2.1: Vaaka tasapainossa. Tällöin väärä kolikko on yksi kolikoista $1, 2, 3$, lisäksi se on varmasti kevyempi. Nyt meillä on kolme kolikkoa ja tiedetään väärän rahan laatu. Tästä selvitään yhdellä lisäpunnituksella (kolmas punnitus!), kts. yllä.

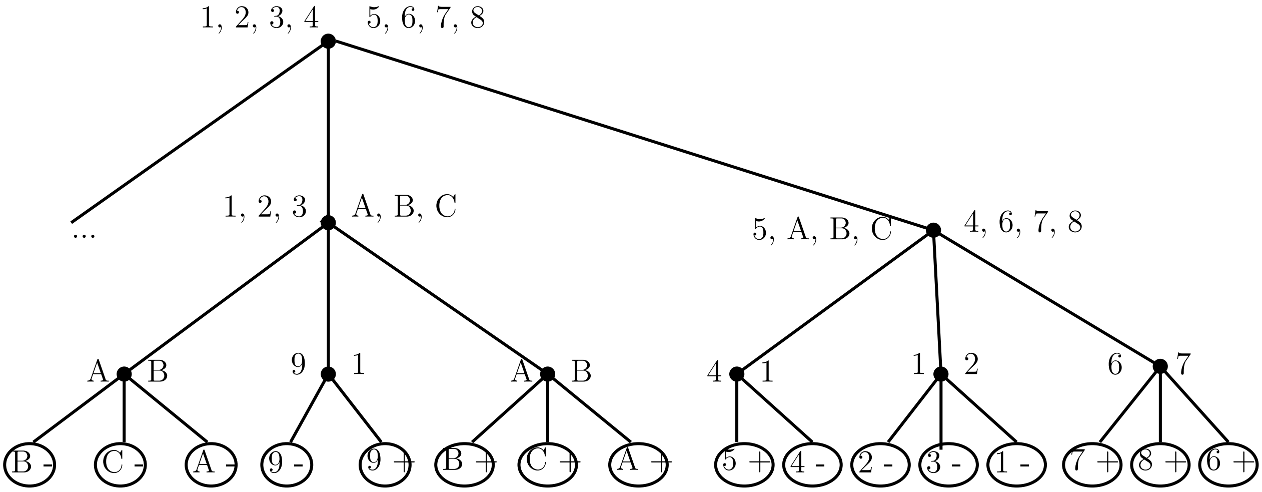
Tapaus 2.2: Oikea puoli painavampi. Tämä on mahdollista ainoastaan jos väärä raha on yksi kolikoista $6, 7, 8$ ja lisäksi sen on pakko olla painavampi. Taas tapaus, joka selviää yhdellä lisäpunnituksella.

Tapaus 2.3: Vasen puoli painavampi. Tämä on mahdollista ainoastaan jos kolikko 4 on väärä ja se on kevyempi kuin muut tai jos kolikko 5 on väärä ja se on painavampi kuin muut. Nyt vielä verrataan kolikko 4 esimerkiksi kolikkoon 1, joka on varmasti oikea, ja tästä punnituksesta voidaan helposti päätellä mikä kolikko on väärä (ja sen laatu silloin tiedetään jo).

Tapaus 3: $1, 2, 3, 4$ on painavampi kuin $5, 6, 7, 8$. Symmetrinen tapauksen 2 kanssa.

Näin ollen ongelma todellakin ratkeaa kolmella punnituksella.

Esitetetty ratkaisu voidaan esittää seuraavan etsintäpuun muodossa (vrt. Junnila, Esim. IV 3.8.):



Puun pisteet vastaavat punnituksia ja niiden viereen on merkitty vaakakuppien sisältö; punnituksen jälkeen haaraudutaan alaoikealle, jos oikeanpuoleisen vaakakupin sisältö osoittautuu painavammaksi kuin vasemmanpuoleisen; alavasemmalle, jos vasemmanpuoleisen kupin sisältö osoittautuu painavammaksi kuin oikeanpuoleisen; suoraan alaspain, jos kuppien sisällöt osoittautuvat samanpainoisiksi. Puun lehdet vastaavat etsinnän lopputulosta: niihin on merkitty vääräksi osoittautuneen kolikon numero ja sen perään merkki $+$, jos väärä kolikko oli oikeita painavampi ja merkki $-$, jos se oli oikeita kevyempi. Puussa ei ole piirretty näkyviin vasen haara, joka vastaa Tapausta 3 yllä (se on symmetrinen Tapauksen 2 kanssa).