Verkot, syksy 2015
Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Laskuharjoitus 6.
Ratkaisuehdotuksia.

1. Verkkoa sanotaan 2-säännölliseksi, jos jokaisen sen pisteen aste on kaksi.
a) Olkoon G yhtenäinen 2-säännöllinen verkko. Osoita, että G:n viivajoukko V_G on rengas.
b) Anna esimerkki epäyhtenäisestä 2-säännöllisestä verkosta. Voiko tällaiselle verkolle päteä a)-kohdan väite?

Ratkaisu: a) Olkoon G yhtenäinen verkko, jonka jokaisen pisteen aste on kaksi. Ratkaisun välivaiheet ovat seuraavia:
(1) Osoitetaan, että G:ssä on olemassa rengas V,
(2) Osoitetaan, että tämän renkaan virittämä G:n aliverkko $G(V)$ on itse asiassa koko verkko G. Erityisesti tällöin $V_G = V$ aliverkon $G(V)$ määritelmän nojalla, mikä on se, mitä piti todistaa.

Väite (1): Verkossa G on olemassa rengas V.

Väite 1, todistustapa 1: Korollaarin III 1.4 nojalla *missä tahansa* epätyhjässä verkossa G, jonka jokaiselle solmulle $x \in P_G$ pätee $d(x) \geqslant 2$, on olemassa rengas $V \subset V_G$.

Korollaari III 1.4 on itse helppo seuraus Lauseesta III 1.3, joka on yleisempiä tuloksia, joiden avulla renkkaiden olemassaoloa voidaan osoittaa. Huomaa, että esitetty väitteen (1) todistus toimii sellaisenaan missä tahansa epätyhjässä 2-säännöllisessä verkossa, oletusta yhtenäisyydestä ei tarvita.

Väite 1, todistustapa 2: Seuraavassa esitetty "konstruktiivinen alkeellinen" ratkaisutapa on ollut erittäin suosittu palautetuissa opiskeljoiden ratkaisuissa. Valitettavasti niissä se ei yleensä ollut kehitetty loppuun asti ja jäi pelkästään "idean" tasolle.

Tämän ratkaisun idea perustuu siihen, että yritetään konstruoida verkossa sykli "käsiin" alkaen jostakin pisteestä käyttämällä oletuksia hyväksi. Konstruktio voidaan tehdä pitämällä tiukasti kiinni oletuksesta "jokaisen pisteen aste on tasan kaksi" tai yleisemmällä oletuksella "jokaisen pisteen aste on vähintään kaksi", jolloin saadaan itse asiassa vaihtoehtoinen todistus yllämainitulle Korollaarille III 1.4.

Olkoon $x_0 \in P_G$ mielivaltainen. Oletuksen mukaan x_0:llä on (ainakin) kaksi erilaista naapuria y, z, otetaan niistä yksi, esim. y ja merkitään se x_1:llä. Näin saadaan verkossa yksinkertainen kulku (x_0, x_1). Seuraavaksi todetaan, että pisteellä x_1 on oletusten mukaan (ainakin) kaksi erilaista naapuria, erityisesti sillä on naapuri x_2, joka **ei ole** x_0. Näin saadaan konstruoitua verkossa *yksinkertainen* kulku (x_0, x_1, x_2).

Jatketaan samalla tavalla "induktiivisesti" niin kauan kuin se on mahdollista. Tarkemmin sanottuna, oletetaan, että olemme konstruoineet verkossa **yksinkertaisen** kulun $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$. Sen loppupisteellä x_n on oletuksen mukaan (ainakin) kaksi naapuria, joten sillä on yksi naapuri z, joka **ei ole** kulun edellinen piste x_{n-1}. Nyt kuitenkin yleisesti **mikään ei takaa sitä**, että tämä piste olisi ”uusi” eli ei esiintyisi jo aikaisemmin kulussa $\bar{x}$. Näin ollen on tarkasteltava erikseen kaksi tapausta.

Tapaus 1: $z = x_{n+1}$ ei esiinny kulussa $\bar{x}$. Tällöin voidaan jatkaa kulkua $\bar{x}$ uudella pisteellä x_{n+1} ja konstruoida pidempi ja **edelleenkin yksinkertainen** kulku $(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ (joka ei ole kierros).

Tapaus 2: Solmu z esiintyy kulussa $\bar{x}$. Toisin sanoen $z = x_i$ jollakin $0 \leqslant i \leqslant n$. Koska z on x_n:n naapuri, joka oli valittu sillä tavalla, että se **ei ole** x_{n-1}, tällöin itse asiassa $0 \leqslant i \leqslant n-2$.

Nyt $(z = x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n, z)$ on sykli verkossa G. Lisäksi, koska $i \leqslant n-2$, tämän syklin pituus $n-i+1$ on ainakin kolme. Erityisesti tämän syklin viivajoukko on tällöin rengas verkossa.

Huomautus: Huomaa erityisesti, että yleisesti ottaen *ei ole mitään syitä* siihen, että piste z olisi kulkumme *alkupiste* x_0 (josta konstruktio alkaa). Ei ole siis mitään takeita siitä, että sykli sulkeutuu juuri pisteen x_0 kohdalla. Näin kuitenkin väitettiin monissa ratkaisussa, ilman tarkempia perusteluja. On totta, että tämän tehtävän oletusten puitteissa näin käykin, mutta tämä vaatii lisäperusteluja. Tarkemmin sanottuna - jos lisäksi oletetaan, että G on 2-säännöllinen, niin tapauksessa 2 on pakko olla $z = x_0$. Nimittäin muuten pisteeseen $z = x_i$ liittyisi ainakin kolme eri viivaa $\overline{x_{n-1}z}$, $\overline{x_{i-1}x_i}$ ja $\overline{x_i x_{i+1}}$, joten saadaan $d(z) \geqslant 3$.

Palataan todistukseen. Tapauksen 1 mukaisia tilanteita ei voi esiintyä loputtomiin, koska se tarkoittaisi, että jokaisella n pystymme löytämään verkossa yksinkertaisen kulun $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, erityisesti jokaisella n verkossa olisi ainakin n pistettä. Tämä on vastoin verkon pistejoukon P_G äärellisyyttä. Näin ollen jossakin vaiheessa toteutuu tapaus 2, joten verkolla on ainakin yksi rengas.

Huomaa erityisesti, että tässäkin ratkaisutavassa väitteen (1) todistamiseksi emme tarvitse kaikkia tehtävän oletuksia kaikessa vahvuudessaan - yhtenäisyyttä emme tarvineet lainkaan ja asteisiin liittyvä ehdossakin olisi riittänyt epäyhtälö $d(x) \geqslant 2$ kaikilla $x \in P_G$. Tämän ei pitäisi olla yllättävä - emme oikeastaan todistaneet mitään niin ihmellistä vielä. Monissa verkoissa on rengas, itse asiassa missä tahansa verkossa, jonka ainakin yksi komponentti ei ole puu, toisin sanoen missä tahansa ei-metsässä on olemassa ainakin yksi rengas. Yhden renkaan olemassaolo ei vielä kerro paljon mitään koko viivajoukosta V_G.

Siirrytään väitteen (2) todistukseen. Nyt tarvitsemme kaikkia tehtävän oletuksia. Olkoon siis G yhtenäinen (epätyhjä) verkko, jonka jokaisen pisteen aste on tasan kaksi. Olemme osoittaneet, että tällaisessa verkossa on rengas V. Tällöin verkossa

G on olemassa sykli $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 3$ siten, että

$$V = \{\overline{x_0x_1}, \overline{x_1x_2}, \ldots, \overline{x_{n-1}x_n}\}.$$

Osoitetaan ensin, että

$$P_G = \{x_0, \ldots, x_n\} = P,$$

toisin sanoen osoitetaan, että kaikki G:n pisteet esiintyvät syklissä $\bar{x}$. Tehdään vasta-oletus, $P \neq P_G$. Tällöin P on yhtenäisen verkon G solmujoukon P_G aito ja epätyhjä osajoukko, joten on olemassa viiva $\overline{xy} \in V_G$ siten, että $x = x_i \in P$, $i = 0, \ldots, n$ ja $y \notin P$. Erityisesti $\overline{xy} \notin V$. Tästä seuraa, että verkossa G on olemassa ainakin kolme viivaa, joiden toinen päätepiste on x - viivat $\overline{x_{i-1}x_i}$, $\overline{x_ix_{i+1}} \in V_G$ ja viiva $\overline{xy}$. Tässä erikoistapauksissa tulkitaan $x_{-1} = x_{n-1}$ jos $i = 0$ ja $x_{n+1} = x_1$ jos $i = n$.

Edellisestä seuraa, että $d(x) \geqslant 3$, mikä on ristiriidassa ehdon $d(x) = 2$ kanssa.

Huomaa, että viivat $\overline{x_{i-1}x_i}$, $\overline{x_ix_{i+1}} \in V_G$ ovat todellakin eri viivoja, koska muuten $x_{i-1} = x_{i+1}$, mikä syklin yksinkertaisuuden vuoksi on mahdollista jos ja vain jos $i = 1$ ja $\bar{x} = (x_0, x_1, x_2 = x_0)$, mikä ei ole mahdollista, sillä $n \geqslant 3$ (renkaan määritelmä).

Näin ollen

$$P_G = \{x_0, \ldots, x_n\}. \tag{1}$$

Seraavaksi osoitetaan, että $V = V_G$, eli verkossa ei myöskään ole mitään muita viivoja, kuin renkaan V viivat. Tehdään vasta-oletus: on olemassa viiva $v \in V_G$ siten, että $v \notin V$. Yhtälön (1) nojalla kumpikin viivan $v = \overline{xy}$ päätepiste x, y on kuitenkin joukon P alkio, eli esiintyy syklissa $\bar{x}$. Olkoon $x = x_i$, $i = 1, \ldots, n$, tällöin, kuten yllä nähdään, että pisteeseen x_i liittyy verkossa ainakin kolme viivaa - viivat $\overline{x_{i-1}x_i}$, $\overline{x_ix_{i+1}} \in V_G$ ja viiva $\overline{xy}$. Tämä on taas ristiriita oletuksen kanssa. Näin ollen $V = V_G$ ja olemme valmiit.

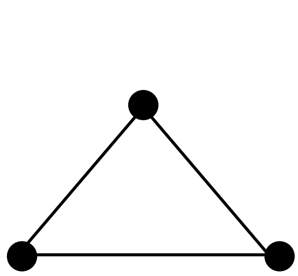
Tyyppilliset virheet/puutteet tehtävän ratkaisussa:

- Esitetään syklin konstruktio epämääräisesti ja "käsiä heiluttelemalla". Ei perustella kunnolla miten tämä konstruktio etenee ja miksi se varmasti toimii.
- Kun rengas on konstruoitu, kuvitellaan, että tehtävä on ratkaistu. Ei muisteta perustella, miksi tämä rengas olisi KOKO viivajoukko V_G. Ei yhden renkaan olemassaolo siinänsä vielä kerro paljon mitään.
- Yhtenäisyyttä ja/tai asteita koskevaa oletusta ei oikeastaan käytetä. Tämä on kuitenkin selvä merkki siitä, että ratkaisu ei voi olla täydellinen - väite ei päde ilman näitä oletuksia, joten niitä on pakko käyttää jossakin vaiheessa.

Huomautus: Olemme osoittaneet, että yhtenäinen epätyhjä verkko, jonka jokaisen pisteen aste on kaksi on erään renkaan virittämä verkko. Kääntäen, Lemman II 2.2. nojalla renkaan virittämän verkon jokaisen pisteen aste on kaksi. Lisäksi syklin virittämä verkko on selvästi yhtenäinen (koska siinä on olemassa jopa Hamiltonin

kierros). Yhdistämällä tuloksia saadaan seuraava tulos:
Verkko on renkaan virittämä jos ja vain jos se on yhtenäinen ja sen jokaisen pisteen aste on kaksi.

b) (Yksinkertaisin) esimerkki epäyhtenäisestä verkosta, jonka jokaisen pisteen aste on tasan kaksi:



Yleisemmin on selvä, että mielivaltaisen verkon G jokaisen pisteen $x \in P_G$ aste G:ssä on sama kuin sen aste sen omassa verkon G yhtenäisessä komponentissaan G_x. Erityisesti verkon jokaisen pisteen aste on 2 jos ja vain jos sama pätee jokaiselle sen komponentille, joka on yhtenäinen verkko. a)-kohdan mukaan tämä toteuttuu jos ja vain jos verkon jokainen komponentti on jonkun renkaan virittämä. Näin ollen vaadittu esimerkki saadaan mistä tahansa verkosta, joka on vähintään kahden renkaan virittämän verkon erillinen yhdiste. Kääntäen kaikki esimerkit ovat tällaisia. Annettu yllä esimerkki on "yksinkertaisin" seuraavassa mielessä - siinä on pienin määrä komponenttia (kaksi) ja jokainen komponentti sisältää pienin mahdollinen määrä pisteitä (koska renkaan virittämässä verkossa on aina vähintään kolme pistettä).

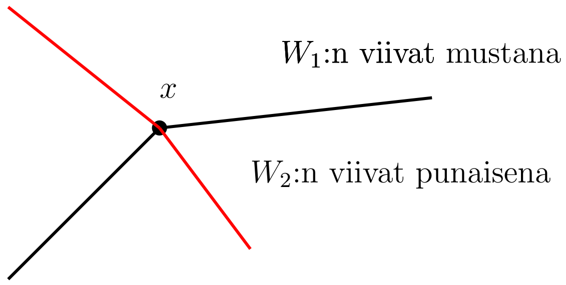
Ei-yhtenäiselle 2-säännölliselle verkolle ei voi koskaan päteä a)-kohdan väite. Nimittäin verkko, jonka kaikki viivat muodostavat renkaan on yhtenäinen jos erillisiä pisteitä ei oteta huomioon. Tarkemin sanottuna olkoon G verkko, jonka viivajoukko V_G on rengas. Tällöin viivajoukon V_G virittämä aliverkko $G' = G(V_G)$ on yhtenäinen, sillä siinä on sykli, joka käy sen jokaisessa pisteessä (sellaiseksi sykliksi kelpaa juuri se sykli, jonka viivajoukko on rengas V_G). Toisaalta tämä verkko sisältää kaikki verkon G pisteet, joihin liittyy joku viiva, eli sellaiset joiden aste on suurempi kuin nolla. Toisin sanoen G' on sama kuin verkko G, paitsi, että siitä on poistettu mahdolliset G:n eristetyt pisteet. Erityisesti, jos G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä, niin $G = G'$ on yhtenäinen. Koska 2-säännöllisessä verkossa ei voi olla eristettyjä pisteitä, tästä saadaan erityisesti, että ei-yhtenäisen 2-säännöllisen verkon viivajoukko ei voi koskaan olla rengas.

Huomautus: Monissa ratkaisussa b)-kohdan jatkokysymykseen vastattiin vain ratkaisussa annetun esimerkki-verkon kohdalla. Tarkoitus kuitenkin oli, että vastataan kysymykseen voiko ei-yhtenäiselle 2-säännölliselle verkolle ylipäätään koskaan pätee a)-kohdan väite.

2. Osoita, että neljän pisteen täydellisellä verkolla K_4 ei ole erillisiä renkaita. (Ohje: olkoot W_1 ja W_2 verkon renkaat. Osoita ensin, että niiden virittämilla aliverkoilla

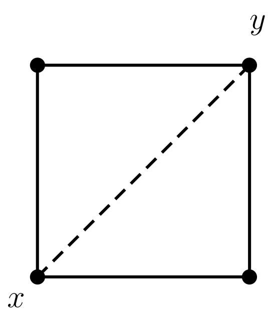
on yhteinen piste).

Ratkaisu: Koska n-syklissä, missä $n \geqslant 3$, esiintyy vähintään kolme pistettä, renkkaiden W_1 ja W_2 virittämillä aliverkoilla $G(W_1)$ ja $G(W_2)$ on kummallakin vähintään kolme pistettä. Koska $3 + 3 = 6 > 4$, näiden verkkojen pistejoukot eivät voi olla erillisiä. Toisin sanoen on olemassa $x \in [4]$ s.e. x on sekä aliverkon $G(W_1)$, että alverkon $G(W_2)$ piste. Renkaassa W_1 esiintyy tasan kaksi eri viivaa v_1, v_2, joiden toinen päätepiste on x, samoin W_2:ssä esiintyy tasan kaksi eri viivaa v_3, v_4, joiden toinen päätepiste on x. Kuitenkin verkossa K_4 pisteeseen x liittyy tasan kolme viivaa, joten joukot $\{v_1, v_2\}$ ja $\{v_3, v_4\}$ eivät voi olla erillisiä (jos olisivat, x:ään liittyisi verkossa vähintään neljä eri viivaa). Erityisesti renkaat W_1 ja W_2 eivät voi olla erillisiä.



Nyt verkossa vähintään 5 pistettä, ristiriitä!

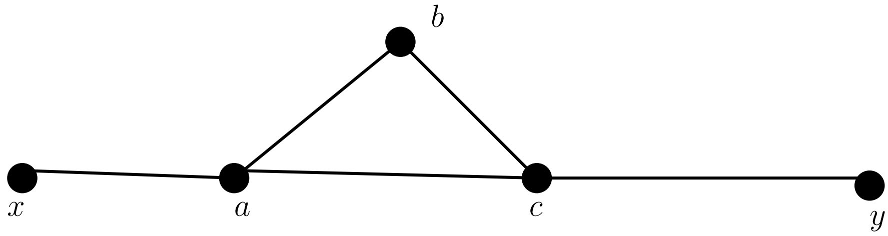
Huomautus: Monissa ratkaisuissa esiintyi seuraava (osittain) virheellinen päättely. Aloitetaan, kuten yllä, toteamalla, että renkkaiden W_1 ja W_2 virittämillä aliverkoilla $G(W_1)$ ja $G(W_2)$ on kummallakin vähintään kolme pistettä, joten, koska $3 + 3 = 6 > 4$, näillä verkoilla itse asiassa täytyy olla ainakin *kaksi* eri yhteistä pistettä x, y. Tämä on totta. Koska verkko K_4 on täydellinen, siinä on olemassa viiva $\overline{xy}$. Koska x, y ovat aliverkon $G(W_1)$ pisteitä, tästä tehdään johtopäätös, että viiva $\overline{xy}$ kuuluu renkaaseen W_1 ja samalla tavalla päätellään, että tämä viiva kuuluu renkkaaseen W_2. On kuitenkin epäselvä, mistä tämä johtopäätös on revitty. Yleisesti, jos x ja y kumpikin ovat samassa syklissä, ei niiden välisen viivan tarvitsee olla tämän syklin viivojen joukossa! Esimerkiksi seuraavassa kuvassa pisteet x ja y ovat kumpikin erään 4-syklin pisteitä, mutta niiden välinen viiva (piirretty katkoviivana) **ei ole** tämän syklin määrämässä renkkaassa.



Näin ollen tämä lähestymistapa ei toimi sellaisenaan. Siitä saa kuitenkin toimivan tämän tehtävän kohdalla pienellä lisätyöllä. Nimittäin oletetaan, että W_1 ja W_2 ovat verkon K_4 erillisia rennkaita. Koska K_4:ssä on kaiken kaikkian vain $4 \cdot 4/2 = 6$

viivaa, ja koska jokaisessa renkkaassa on vähintään kolme viivaa, tästä seuraa, että itse asiassa tällöin kummankin renkkaan W_1, W_2 on pakko olla 3-rengas (ja yhdessä ne muodostavat K_4:n koko viivajoukon). 3-renkkaalla eli kolmiolla on kuitenkin se erikoisominaisuus, että sen virittämän aliverkon kahden pisteen x, y välisen viivan on pakko kuulua tähän renkaaseen (juuri tämä ominaisuus puuttuu jo 4-renkkaalla, kuten esimerkki yllä osoittaa). Näin ollen tässä tapauksessa edellä esitetty argumentti toimii ja saadaan renkkaille W_1, W_2 yhteinen viiva, vastoin oletusta niiden erillisyydestä.

3. Olkoon G kuvassa 2 esitetty verkko.



Kuva 2

Olkoot $\bar{x} = (x, a, b, c, a, c, y)$ ja $\bar{y} = (x, a, c, y)$. Tällöin $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat kumpikin kulkuja pisteestä x pisteeseen y. Osoita, että $V(\bar{x}) \vartriangle V(\bar{y})$ ei ole renkaisto. Miksi tämä tulos ei ole ristiriidassa Lemman III 2.6 väitteen kanssa?

Ratkaisu: Nyt

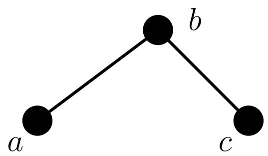
$$V(\bar{x}) = \{\overline{xa}, \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ac}, \overline{cy}\},$$
$$V(\bar{y}) = \{\overline{xa}, \overline{ac}, \overline{cy}\}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} W = V(\bar{x}) \vartriangle V(\bar{y}) &= V(\bar{x})\backslash V(\bar{y}) \cup V(\bar{y})\backslash V(\bar{x}) = \\ &= \{\overline{ab}, \overline{bc}\}. \end{aligned}$$

On selvä, että W ei ole renkaisto, sillä se on epätyhjä, mutta sisältää vain kaksi alkiota. Jokainen rengas sisältää määritelmän mukaan ainakin kolme viivaa, joten sama pätee jokaiselle epätyhjälle renkaistolle (koska tällöin se sisältää ainakin yhden renkaan).

Vaihtoehtoisesti voidaan tarkastella viivajoukon W virittämää aliverkkoa $G(W)$:



Lauseen III 2.3 mukaan viivajoukko $W \subset V_G$ on renkaisto jos ja vain jos sen virittämän aliverkon $G(W)$ jokaisen pisteen aste on parillinen. Yllä tarkasteltavalle verkolle tämä ei päde - pisteiden a ja c molempien asteet ovat yksi.

Esimerkki ei ole ristiriidassa Lemman III 2.6 kanssa, sillä Lemmassa III 2.6 osoitetaan, että $V(\bar{x}) \triangle V(\bar{y})$ on renkaisto, *olettaen*, että $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat molemmat **yksinkertaisia** kulkuja pisteestä a pisteeseen b. Tehtävän tapauksessa $\bar{x}$ ei ole yksinkertainen, $\bar{y}$ kyllä on. Tämä esimerkki myös osoittaa sen, että Lemmassa III 2.6 oletus kummakin kulun yksinkertaisuudesta ei ole turha.

4. Dominopalikan kummassakin päässä on $0-6$ pistettä. Todista, että kaikki dominopalikat (yksi kutakin tyyppiä) voidaan sovittaa yhteen umpinaiseksi renkaaksi, jossa palikoiden toisiaan koskettavissa päissä on sama pisteluku.

   Onko tämä mahdollista, jos palikoissa käytetään ainoastaan pisteitä $0-5$?

Ratkaisu: Tarkastellaan *symmetristä* suhteikkoa $G = (X, R)$, jonka pisteiden joukko on $X = P_G = \{0, \dots, 6\}$ ja relaatio R on $X \times X$, eli kaikkien parien $(x, y) \in X \times X$ muodostama joukko. Koska tämä suhteikko on (selvästi) symmetrinen, se määräytyy täysin sen viivojen joukolla

$$V_G = \{\overline{xy} \mid x, y \in X\}.$$

Suhteikon G viivat vastaavat yksikäsitteisesti dominopalikoita - viiva $\overline{xy}$ voidaan tulkita olevan sama asia kuin dominopalika, jossa esiintyvät silmäluvut x, y.

Huomaa, että G **ei ole** verkko, sillä se sisältää myös (kaikkia mahdollisia) silmukoita (dominopalikat, joiden molemmat silmäluvut samoja).

Tehtävässä vaadittu umpinainen rengas vastaa *Eulerin kulkua* tässä suhteikossa G, paitsi, että olemme määritelleet ja tutkineet Eulerin kulkuja vain verkoissa. Tästä syystä "poistetaan silmukat" eli tarkastellaan ensin verkkoa G', joka saadaan suhteikosta G poistamalla siitä kaikki silmukat. Huomataan, että riittää löytää Eulerin kulku verkossa G'. Nimittäin, G' on itse asiassa *täydellinen verkko*, jossa on seitsemän pistettä. Erityisesti se on yhtenäinen. Olkoon $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ Eulerin kulku verkossa G'. Koska se sisältää kaikki verkon viivat, yhtenäisyyden nojalla siinä esiintyy jokainen verkon piste. Olkoon $x_i = x$ jokin (esimerkiksi ensimmäinen) pisteen $x \in P_G$ esiintyminen kulussa $\bar{x}$. Tällöin verkossa G' voidaan lisätä tässä kulussa silmukka pisteessä x toistamalla kulussa piste x_i (eli sijoittamalla silmukka $\overline{x_i x_i}$ viivojen $\overline{x_{i-1} x_i}$ ja $\overline{x_i x_{i+1}}$ väliin). Tekemällä tämän kerran jokaisen suhteikon pisteen kohdalla, saadaan suhteikossa G sellainen kierros, jossa jokainen sen viiva esiintyy tasan kerran. Tällainen kulku vastaa tapaa asettaa kaikki dominopalikat yhteen umpinaiseksi renkaaksi.

Näin ollen riittää osoittaa, että täydellisessä seitsemän pisteen verkossa on olemassa Eulerin kulku. Tämä seuraa suoraan Lauseesta III 3.5, sillä täydellinen seitsemän pisteen verkko on yhtenäinen ja jokaisen sen pisteen aste on 6, erityisesti parillinen.

Jos sen sijaan käytetävissä on vain silmäluvut $0-5$, temppu ei enää onnistu. Nimittäin tällöin kysytty umpinainen rengas vastaisi kierrosta, joka kulkee jokaista viivaa pitkin tasan kerran, symmetrisessä suhteikossa, jonka pistejoukko on $Y = \{0, \dots, 5\}$

ja relaatio on $Y \times Y$. Poistamalla tällaisesta kierroksesta kaikki silmukat saadaan Eulerin kierros täydellisessä kuuden pisten verkossa. Kuitenkin tällaisessa verkossa jokaisen pisten aste on viisi, erityisesti pariton, joten siinä ei ole Eulerin kierrosta (Lause III 3.5).

5. a) Olkoon T puu, jonka pisteet ovat korkeintaan 4-asteisia. Laske puun lehtien lukumäärä, kun tiedetään, että 2-asteisia pisteitä on 6, 3-asteisia kolme ja 4-asteisia yksi.
b) Onko olemassa puuta, jonka kaikki pisteet ovat korkeintaan 3-asteisia, jolla on tasan 7 lehtiä ja tasan kolme 3-asteista pistettä?

Ratkaisu: a) Merkitään puun pisteiden lukumäärä p_T symbolilla x. Tällöin sen lehtien lukumäärä on

$$x - 6 - 3 - 1 = x - 10.$$

Koska puussa pätee $v_T = p_T - 1 = x - 1$ (Lause IV 1.3), perusyhtälöstä

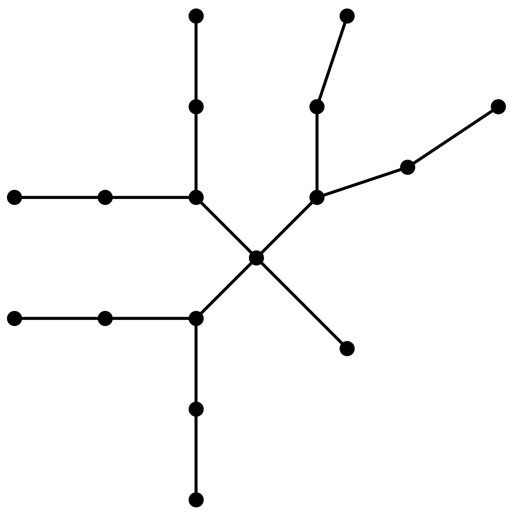
$$\sum_{x \in P_T} d(x) = 2v_G$$

(Lause II 2.3) saadaan yhtälö

$$(x - 10) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 2(x - 1) = 2x - 2.$$

Ratkaisemalla tämä ensim. asteen yhtälö, saadaan $x = 17$. Tästä saadaan,että lehtien lukumäärä on $x - 10 = 7$.

Huomautus: Tehtävän ehtoja toteuttavia puita on olemassa, esimerkiksi:



Kuitenkin pelkkää esimerkin keksimnen ei tietystikään riitä, sillä voi olla muitakin puita, jotka toteuttavat tehtäväannon.

b)Olkoon $x = p_T$ puun pisteiden lukumäärä. Tällöin 2-asteisten pisteiden lukumäärä on $x - 7 - 1 = x - 10$. Lauseista II.2.3. ja IV.1.3. saadaan nyt

$$7 \cdot 1 + 2(x - 10) + 3 \cdot 3 = 2x - 2,$$

mistä sieventämisen jälkeen tulee epätosi yhtälö $-4 = -2$. Näin ollen puu on mahdoton.

6. Olkoon T puu, jossa on 10 pistettä ja jokaisen pisteen aste on pariton. Osoita, että T:llä on vähintään kuusi lehteä.

Ratkaisu: Merkitään puun lehtien muodostamaa joukkoa A:llä ja lehtien lukumäärää l:llä. Muiden, ei-lehtien mudostamaa joukkoa merkitään B:llä. Joukon B pisteiden lukumäärä on tällöin $10 - l$. Määritelmän mukaan jokaisella $x \in B$ pätee $d(x) \geqslant 2$. Koska nyt oletamme, että jokaisen pisteen aste on pariton, kaikille $x \in B$ pätee itse asiassa $d(x) \geqslant 3$. Tiedetään, että puussa T pätee

$$\sum_{x \in A} d(x) + \sum_{x \in B} d(x) = \sum_{x \in P_T} d(x) = 2p_T - 2.$$

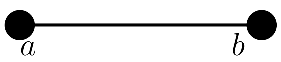
Nyt kaikilla $x \in A$ pätee $d(x) = 1$ ja kaikilla $x \in B$ pätee $d(x) \geqslant 3$, lisäksi $p_T = 10$. Tästä saadaan arvio

$$l + 3(10 - l) \leqslant 2 \cdot 10 - 2 = 18,$$

mistä seuraa $2l \geqslant 12$ eli $l \geqslant 6$.

7. Luokittele isomorfiaa vaille kaikki sellaiset puut, joissa on kuusi solmua, joista tasan neljä ovat lehtiä. Luentomonisteessa ”Puut” osoitettuja klassifikatiotuloksia pienille puille (Esimerkki 8) saa käyttää.

Ratkaisu: Olkoon T kuuden solmun puu, jolla on neljä lehteä. Merkitään niiden joukkoa A:llä, $A = \{c, d, e, f\}$. Poistamalla kaikki sen lehdet saadaan kahden pisteen puu T' (Lause IV 2.4). Isomorfiaa vaille on olemassa tasan yksi kahden pisteen puu (kts. materiaali ”Puut”, s.6):

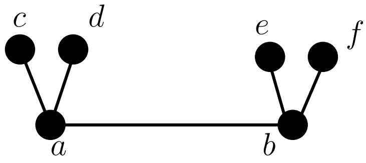


Puu T'

Tämän puun molemmat alkiot a, b ovat sen lehtiä.
Kiinnitetään takaisin T:n lehdet c, d, e, f ”paikalleen”. Materiaalissa ”Puut” esitetyn Lemman 1 (sivu 6) mukaan tämä tapahtuu kuvauksen $f\colon A \to P_{T'}$ välityksellä. Tämä kuvaus kertoo mikä on lehden $x \in A$ ainoa naapuri, tätä naapuria merkitään $f(a)$:llä. Lisäksi edellämainitun Lemman 1 mukaan kuvaukselle f pätee $B \subset \operatorname{Im} f$, missä B on puun T' lehtien joukko.

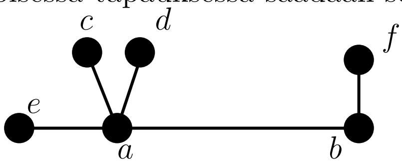
Nyt puun T' molemmat alkiot a, b ovat lehtiä, joten f on *surjektio* $f\colon A \to \{a, b\}$, missä $A = \{c, d, e, f\}$ on neljän alkion joukko.
On olemassa oleellisesti kaksi erilaista tapaa jakaa neljä lehtiä kahden alkion a, b kesken - joko molemmat alkiot a, b saavat kumpikin kaksi uutta lehti-naapuria tai toiseen alkioon (esim. a:han) kiinnitetään kolme lehtiä (merkitään ne c, d, e) ja toiseen (b:hen) kiinnitetään yksi jäljellä oleva lehti (merkitään sitä e:llä).

Ensimmäisessä tapauksessa saadaan seuraava puu:



Puu T_1

Toisessa tapauksessa saadaan seuraava puu:



Puu T_2

Osoitetaan vielä, että konstruoidut puut T_1 ja T_2 eivät ole isomorfisia keskenään. Tämän voi tehdä esimerkiksi seuraavasti. Puussa T_2 on kolme 1-asteistä pistettä (c, d, e kuvassa yllä) joilla on yhteinen naapuri (a kuvassa). Puussa T_1 tällaisia pisteitä ei ole - jokaisella ei-lehdellä puussa T_1 on tasan kaksi lehti-naapuria.

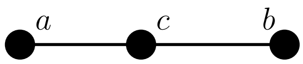
Näin ollen isomorfiaa vaille on olemassa tasan kaksi kuuden pisteen puuta, joilla tasan 4 lehtiä.

Tyypillinen virhe: Konstruoidaan puut, mutta unohdetaan näyttää, että löydetyt mallit **eivät ole isomorfisia keskenään**. Periaatteessa meillä ei ole takeita siitä, että tässä menetelmässä ei olisi voinnut saada kaksi isomorfista puuta eri valinnoilla.

8. Luokittele isomorfiaa vaille kaikki sellaiset puut, joissa on seitsemän solmua, joista tasan neljä ovat lehtiä. Luentomonisteessa ”Puut” osoitettuja klassifikatiotuloksia pienille puille (Esimerkki 8) saa käyttää.

Ratkaisu: Menetellään kuten edellisessä tehtävässä. Olkoon T puu, jolla on seitsemän solmua, joista tasan neljä lehtiä. Merkitään lehtien joukkoa A:llä, $A = \{d, e, f, g\}$.

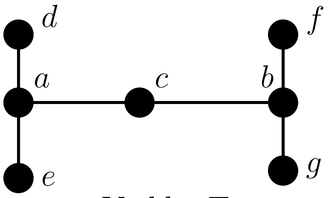
Ottamalla kaikki lehdet pois saadaan kolmen pisteen puu T'. Materiaalin ”Puut” mukaan (kts. sivu 6, esim. 8) isomorfiaa vaille on olemassa tasan yksi kolmen pisteen puu:



Puulla T' on tasan kaksi lehtiä, joiden joukkoa merkitsemme B:llä, $B = \{a, b\}$. Kolmatta pistettä, joka ei ole lehti, merkitsemme c:llä.

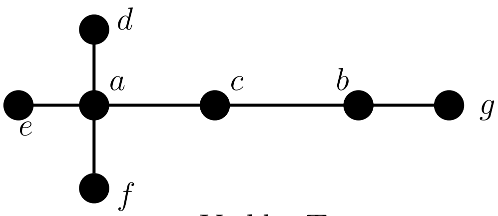
Lemman 1 (materiaali ”Puut”, s. 6) nojalla puu T saadaan takaisin puusta T' kiinnittämällä takaisin lehdet ja tämän tehdään kuvaksen $f\colon A \to P_{T'}$ välityksellä. Lisäksi tällä kuvaukselle pätee $B \subset \operatorname{Im} f$.

Tapaus 1: $B = \operatorname{Im} f$. Tämä tarkoittaa sitä, että 4 puun T lehtiä d, e, f, g kiinnitetään ainoastaan puun T' lehtiin a, b. On olemassa oleellisesti kaksi erilaista tapa tehdä tämän - joko jaetaan neljä lehteä tasan lehtien a, b kesken (kumpikin saa kaksi uutta lehteä) tai toiseen kiinnitetään kolme lehtiä ja toiseen vain yksi.
Ensimmäisessä vaihtoehdossa saadaan seuraava puu:



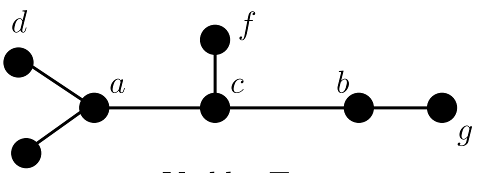
Verkko T_1

Toisessa vaihtoehdossa saadaan seuraava puu:



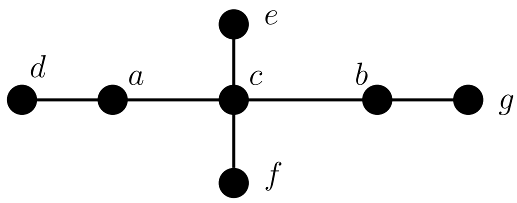
Verkko T_2

Tapaus 2: $B = \{a, b\}$ on kuva-joukon $\operatorname{Im} f$ aito osajoukko. Koska $\operatorname{Im} f$ on puolestaan joukon $P_{T'} = \{a, b, c\}$ osajoukko, ainoa mahdollisuus tällöin on, että $\operatorname{Im} f = \{a, b, c\}$.
Näin ollen tässä tapauksessa neljä lehtiä jaetaan kaiken kolmeen puun T' pisteen kesken. Tällöin yksi pisteistä a, b, c saa kaksi uutta naapuria kun taas kaikki muut saavat yhden. Tapaukset, jossa kaksi lehtiä kiinnitetään pisteseen a tai pisteseen b ovat olellisesti samoja (tarkemmin: isomorfisia), koska puun T' lehdet a, b ovat symmetrisessä asemassa. Tällöin saadaan puu, joka näyttää seuraavalta:



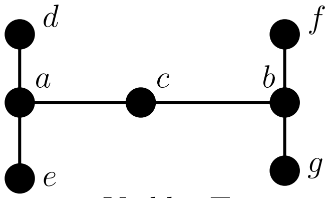
Verkko T_3

Jos taas kaksi uutta lehteä kiinnitetään pisteseen c (jolloin a ja b saavat kumpikin vain yhden uuden naapurin), saadaan seuravannäköinen puu:

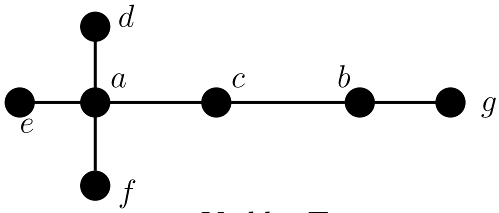


Verkko T_4

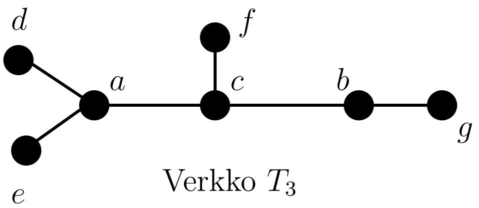
Tässä ovat kaikki mahdollisuudet. Olemme löytäneet neljä puuta:



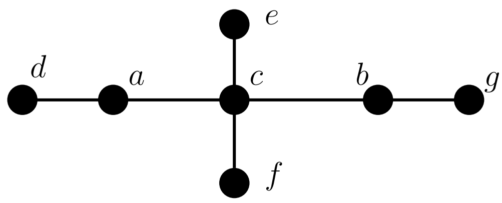
Verkko T_1



Verkko T_2



Verkko T_3



Verkko T_4

Tarkistetaan vielä, että kaikki nämä puut todellakin ovat ei-isomorfisia keskenään. Verkko T_2 on näistä ainoa, jolla on olemassa solmu (solmu a kuvassa), jolla on kolme 1-asteista naapuria.
Jäljellä olevista T_1 on ainoa, jolla on solmu (solmu c kuvassa), jolla ei ole lehtinaapureita.
Lopuksi T_3 ja T_4 eivät ole isomorfisia, koska T_4:ssä on solmu, jonka aste on 4, kun taas T_3:ssä tällaista solmua ei ole.

Tyypillinen virhe: Konstruoidaan puut, mutta unohdetaan näyttää, että löydetyt mallit **eivät ole isomorfisia pareittain**. Periaatteessa meillä ei ole takeita siitä, että tässä menetelmässä ei olisi voinut saada kaksi isomorfista puuta eri valinnoilla.

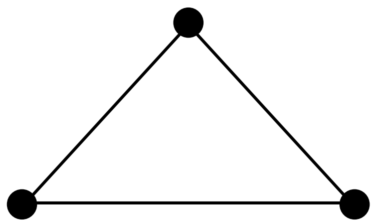
9. Olkoon $G = K_4$ täydellinen neljän pisteen verkko ja olkoon $W \subset V_G$ sen viivojen joukko, jossa on tasan 3 alkiota. Osoita, että joko W on G:n rengas tai W on G:n virittävän puun viivojen joukko.

Ratkaisu: Tarkastellaan viivajoukon W virittämää aliverkkoa $G(W)$. Tässä verkossa on tasan kolme viivaa, koska sen viivajoukko on täsmälleen W. Koska nollan, yhden tai kahden pisteen verkossa on aina korkeintaan kaksi viivaa, verkossa $G(W)$ täytyy olla ainakin kolme pistettä. Toisaalta koko verkossa G on vain neljä pistettä, joten meillä on kaksi vaihtoehtoa - joko verkossa $G(W)$ on tasan kolme pistettä tai verkossa $G(W)$ on tasan neljä pistettä.

Tapaus 1: Verkossa $H = G(W)$ on tasan kolme pistettä. Verkko H on siis kolmen pisteen verkko, jolla on kolme viivaa. Mutta jokaisella kolmen pisteen verkolla on korkeintaan

$$\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

viivaa, ja tasan kolme viivaa siinä voi olla vain silloin kun se on kolmen pisteen täydellinen verkko:

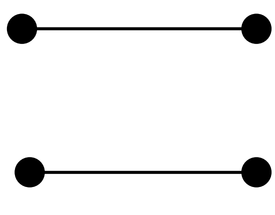


On selvää, että tässä tapauksessa viivajoukko W muodostaa kolmion, tarkemmin sanottuna 3-renkkaan.

Tapaus 2: Verkossa $H = G(W)$ on tasan neljä pistettä, jolloin siis $P_H = P_G$ eli H sisältää kaikki verkon $G = K_4$ pisteitä. Tästä seuraa, että H on virittävä puu, jos se on puu. Riittää siis osoittaa, että H on neljän pisteen puu. Tiedetään, että H sisältää tasan $4 - 1 = 3$ viivaa. Korollaarin IV 1.10 nojalla riittää osoittaa, että H on renkaaton tai yhtenäinen.

Tapa 1: Osoitetaan, että H on renkaaton. Verkko H sisältää vain kolme viivaa, joten, jos se sisältäisi renkaan, sen täytyy itse olla 3-rengas, joka koostuu kaikista sen viivoista. Toisin sanoen tässä tapauksessa W olisi 3-rengas. Tällöin W:n virittämässä aliverkossa H olisi vain kolme pistettä. Näin ollen, jos H:ssä on neljä pistettä, se ei voi sisältää renkaita. Todistus on valmis.

Tapa 2: Osoitetaan, että H on yhtenäinen. Tehdään vasta-oletus: H ei ole yhtenäinen. Tällöin se sisältää vähintään kaksi komponenttia. Jos yksikin H:n komponentti on yksiö, se on H:n eristetty piste, mutta viivajoukon virittämässä aliverkossa ei voi olla eristettyjä pisteitä. Tästä seuraa, että jokainen H:n komponentti sisältää ainakin kaksi pistettä. Koska H:ssä on vain neljä pistettä, tämä on mahdollista jos ja vain jos H:llä on vain kaksi komponenttia ja kummassakin on kaksi pistettä. Toisin sanoen H tällöin näyttää välttämättä tällaiselta:



Tässä verkossa on kuitenkin vain kaksi viivaa, joten saadaan ristiriita. Toisin sanoen H:n pitää olla yhtenäinen.

Huomautus 1: Yhdistämällä tavan 1 ja tavan 2 todistuksia saadaan osoitettua, että tapauksessa 2 H on puu määritelmän mukaan - yhtenäinen ja renkaaton verkko. Kuitenkin, koska tässä tapauksessa tiedetään, että $v_H = p_H - 1$, Korollaarin IV 1.10 nojalla päästään vähemmällä kun osoitetaan todeksi vain yhtenäisyys tai vain renkaattomuus.

Huomautus 2: Tehtävä voidaan ratkaistaa myös käymällä läpi kaikki verkon K_4 viivajoukon 3-alkoisia osajoukkoja, mutta tällainen ratkaisutapa olisi turhan työläs. Täydellisessä neljän pisteen verkossa on $4 \cdot 3/2 = 6$ viivaa ja kuuden pisteen joukolla on

$$\binom{6}{3} = 20$$

kolmealkioista osajoukkoa.