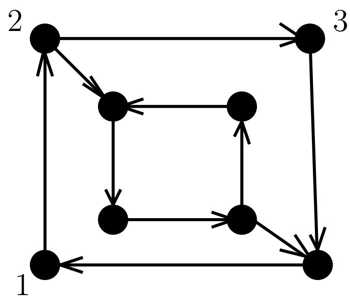
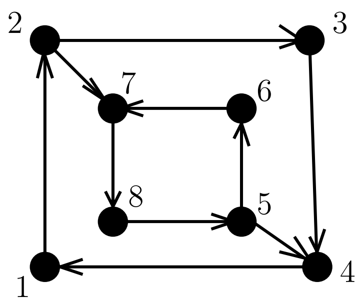
Verkot, elokuu 2015
Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Laskuharjoitus 5.
Ratkaisuehdotuksia.

1. Olkoon G seuraava suhteikko:



a) Osoita, että suhteikossa G on olemassa tasan yksi Hamiltonin kulku, joka alkaa pisteessä 3.
b) Osoita, että suhteikossa G ei ole Hamiltonin kulkua, joka alkaisi pisteessä 1 tai pisteessä 2.
c) Onko suhteikossa G Hamiltonin kierrosta? Onko G vahvasti yhtenäinen?

Ratkaisu: Nimetetään suhteikon solmut:



a) Yritetään konstruoida Hamiltonin kulku, joka alkaa pisteestä 3. Koska pisteestä 3 lähtee tasan yksi nuoli, kulun seuraavaksi pisteeksi on pakko valita ainoa pisteen 3 seuraaja 4. Saadaan osakulku $(3, 4)$. Pisteellä 4 on myös vain yksi seuraaja, joten seuraavaksi on pakko mennä pisteseen 1 ja sen jälkeen pisteeseen 2. Saadaan osakulku $(3, 4, 1, 2)$. Solmulla 2 on kaksi seuraajaa - piste 3 ja piste 7. Pisteseen 3 ei voida mennä, koska silloin palataan alkupisteseen käymättä vielä kaikissa pisteissä. Näin ollen seuraavaksi on pakko valita piste 7. Tämän jälkeen ainoa vaihtoehto on piste 8 ja sen jälkeen ainoa vaihtoehto on piste 5. Osakulku tähän menneessä on $(3, 4, 1, 2, 7, 8, 5)$. Jäljellä on tässä vaiheessa enää vain piste 6, joka on pisteen 5 seuraaja. Näin saadaan Hamiltonin kulku $(3, 4, 1, 2, 7, 8, 5, 6)$. Sitä ei voida jatkaa Hamiltonin kierrokseksi eli palata pisteeseen 3, koska suhteikossa ei ole nuolta $\overrightarrow{63}$. Välivaiheista seuraa, että $(3, 4, 1, 2, 7, 8, 5, 6)$ on ainoa Hamiltonin kulku, joka alkaa pistessä 3.

b) Osoitetetaan, että ei ole olemassa Hamiltonin kulkua, joka alkaisi pisteestä 1 tai pisteestä 2. Yritetään konstruoida tällainen kulku. Koska pisteestä 1 lähtee tasan yksi nuoli pisteeseen 2, jos kulku alkaa pisteestä 1, niin seuraavaksi pisteeksi on tällöin pakko valita ainoa pisteen 1 seuraaja 2. Saadaan osakulku $(1, 2)$ tai (2), riippuen alkupisteen valinnasta. Seuraavaksi on kaksi mahdollisuutta, koska pisteellä 2 on kaksi seuraajaa - jatketaan pisteeseen 3 tai pisteeseen 7. Kokeillaan ensimmäistä vaihtoehtoa, jolloin kulun alku on $(1, 2, 3)$ tai $(2, 3)$. Tällöin seuraavaksi on pakko mennä pisteeseen 4 ja sen jälkeen pisteseen 1 (sama perustelu kuin ennen, ainoat seuraajat). Pisteen 1 jälkeen puolestaan on pakko mennä pisteeseen 2. Joka tapauksessa siis palataan kulun alkupisteseen käymätty vielä kaikissa pisteissä.

Toinen vaihtoehto on, että mennään kakkosen jälkeen pisteeseen 7, jolloin osakulku tähän mennessä $(1, 2, 7)$ tai $(2, 7)$. Sen jälkeen ainoa vaihtoehto on mennä ensin pisteeseen 8, sen jälkeen pisteeseen 5 ja sen jälkeen joko pisteeseen 4 tai pisteeseen 6. Kulku tähän menneessä on $(1, 2, 7, 8, 5)$ tai $(2, 7, 8, 5)$. Jos seuraavaksi mennään pisteeseen 6, sen jälkeen ainoa mahdollisuus jatkaa kulkua on palata pisteseen 7, vaikka kaikissa pisteissä ei vielä käyty. Näin ollen pisteen 5 jälkeen on pakko mennä pisteseen 4. Mutta sen jälkeen on pakko mennä pisteeseen 1 ja sen kautta pisteeseen 2. Taas palataan alkupisteeseen käymättä vielä kaikissa pisteissä (pisteessä 3 ei käyty vielä).

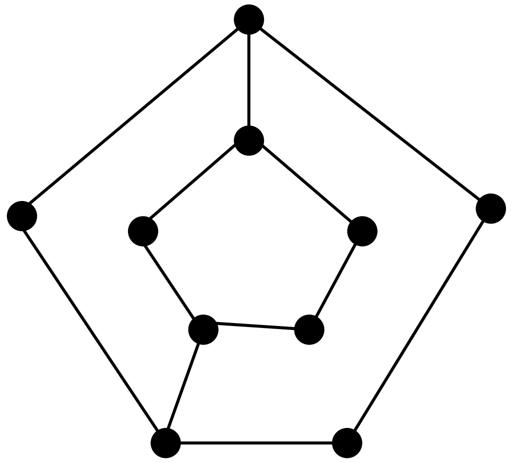
Toinen tapa saada ristiriita toisessa vaihtoehdossa on huomata, että sen jälkeen kun kulkuun on valittu nuoli $\overrightarrow{27}$ toinen kakkosesta lähtevä nuoli $\overrightarrow{23}$ ei voi enää esiintyä Hamiltonin kulussa. Mutta tämä nuoli on ainoa tapa päästä pisteeseen 3 suhteikossa, mistä seuraa, että kulussa ei voi koskaan esiintyä tämä piste 3.

c) Suhteikon Hamiltonin *kierros* voidaan aloittaa kulkemaan mistä tahansa pisteestä - jokainen piste voidaan tarvittaessa valita sen alkupisteeksi. Erityisesti, jos suhteikossa olisi Hamiltonin kierros, niin olisi myös sellainen Hamiltonin kierros, joka alkaa pisteestä 2. b)-kohdassa on kuitenkin näytetty, että ei ole olemassa edes Hamiltonin kulkua, joka alkaisi pisteestä 2. Näin ollen Hamiltonin kierros on mahdoton.

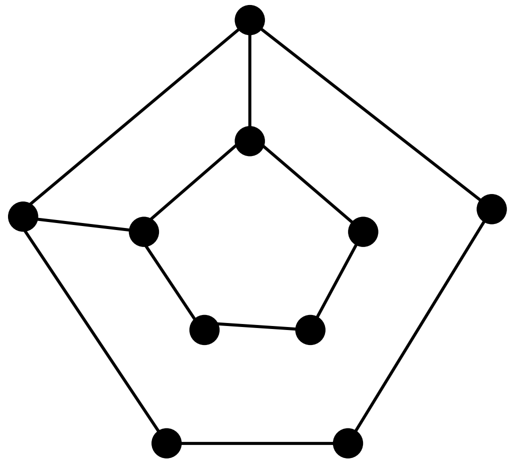
Vaihtoehtoisesti voi vedota a)-kohdan ratkaisuun samalla idealla. Jos suhteikossa olisi Hamiltonin kierros, niin olisi myös sellainen Hamiltonin kierros, joka alkaa pisteestä 3. a)-kohdan ratkaisussa on kuitenkin osoitettu, että on olemassa tasan yksi Hamiltonin kulku, joka alkaa pisteessä 3, ja se ei ole kierros.

Kierros $(1, 2, 7, 8, 5, 6, 7, 8, 5, 4, 1, 2, 3, 4, 1)$ on suhteikon kierros, joka käy jokaisessa suhteikon pisteessä. Lemman II 4.5 nojalla tästä seuraa, että suhteikko on vahvasti yhtenäinen.

2. Tutki kummankin kuvassa 4 alla esitetyn verkon G, G' kohdalla onko verkossa Hamiltonin kierrosta.



Verkko G

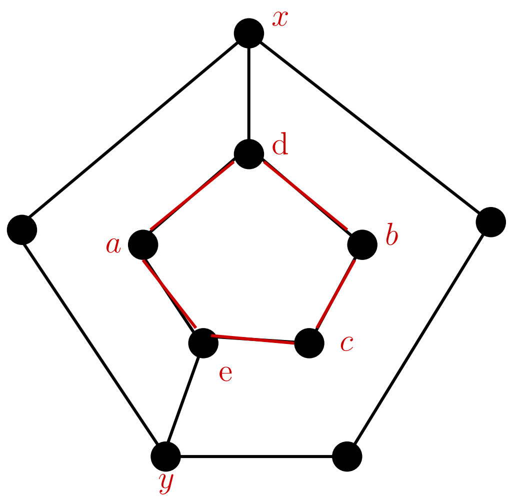


Verkko G'

Kuva 4

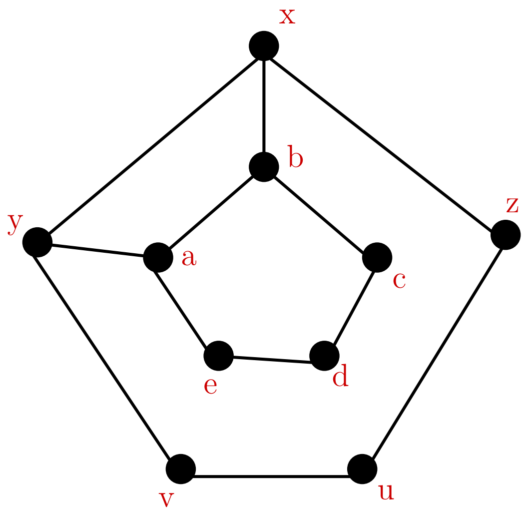
Ratkaisu: Verkossa G ei ole Hamiltonin kierrosta. Nimittäin pisteiden a, b ja c aste verkossa on tasan kaksi (merkinnät kuten kuvassa alla), joten Hamiltonin kierroksen on kuljettavaa kaikkia näihin pisteisiin liittyviä viivoja pitkin eli viivoja $\overline{ad}$, $\overline{ae}$, $\overline{bd}$, $\overline{bc}$, $\overline{ec}$. Mutta tällöin Hamiltonin kierros sisältää "osakierroksen" (a, d, b, c, e, a) (mahdollisesti toiseen suuntaan kuljettuna), mikä on mahdotonta, koska Hamiltonin kierroksen on oltava yksinkertainen.

Lisäksi edellisestä seuraa, että Hamiltonin kierros ei voi sisältää viivoja $\overline{dx}$, $\overline{ey}$, mikä on myöskin mahdotonta, sillä nämä ovat ainoat viivat jotka yhdistävät "sisä"- ja "ulkopisteitä" toisiinsa.



Verkko G

Verkossa G' on Hamiltonin kierros - esimerkiksi kierros $(x, b, c, d, e, a, y, v, u, z, x)$, merkinnät kuten seuraavassa kuvassa:

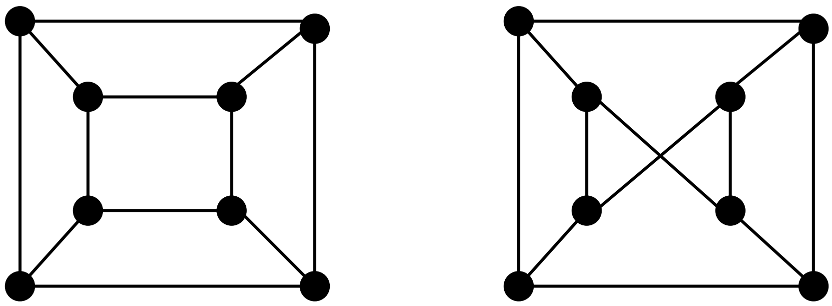


Verkko G'

Huom Jos kierrosta ei muuten keksi, sen konstuoinnissa auttaa se havainto, että kulkiessa 2-asteisen pisteen läpi sen on kuljettavaa molempia pisteeseen liityviä viivoja. Koska pisteiden c, d, e, v, u, z aste on kaksi, kierroksen on sisältävää osuuden $y-v-u-z-x$ ja $b-c-d-e-a$. Jäljellä olevat kaksi viiva $\overline{xa}$ ja $\overline{yb}$ on sen jälkeen helppoa huomata. Toisaalta voidaan myös päätellä, että niiden on pakko olla kierroksessa mukana, sillä ne ovat kaksi ainoaa viivaa, jotka yhdistävät "sisäpisteiden" a, b, c, d, e ja "ulkopisteiden" x, v, u, y, z joukkoja ja Hamiltonin kierros aina sisältää parillinen määrä tällaisia viivoja.

Itse asiasta tästä analyysista seuraa, että tämän verkon Hamiltonin kierros on yksikäsitteinen, jos ei oteta huomioon, että sen alkupiste voidaan valita vapaasti ja kulkea yhteen kahdesta mahdollisesta suunnasta.

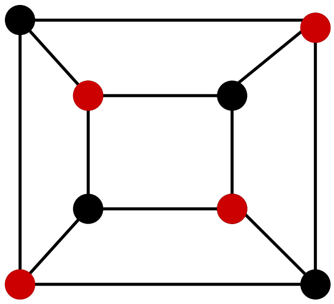
3. Osoita, että kuvassa 5 esiintyvistä verkoista verkko G on kaksijakoinen, mutta verkko G' ei ole. Anna esimerkki syklistä verkossa G', jonka pituus on pariton.



Verkko G Verkko G'

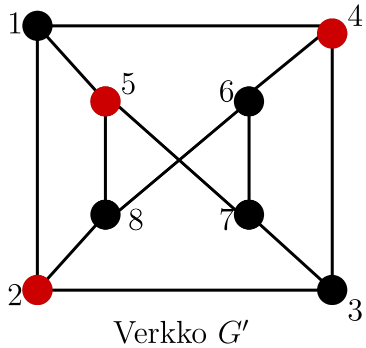
Kuva 5

Verkon G kaksijakoisuus näkyy seuraavasta verkon pisteiden värityksestä kahdella värillä:



Osoitetaan, että G' ei ole kaksijakoinen kahdella tavalla - suoraan määritelmästä ja Lauseen III 2.8 avulla.

Suora todistus - yritetään värittää verkon pisteet kahdella värillä:

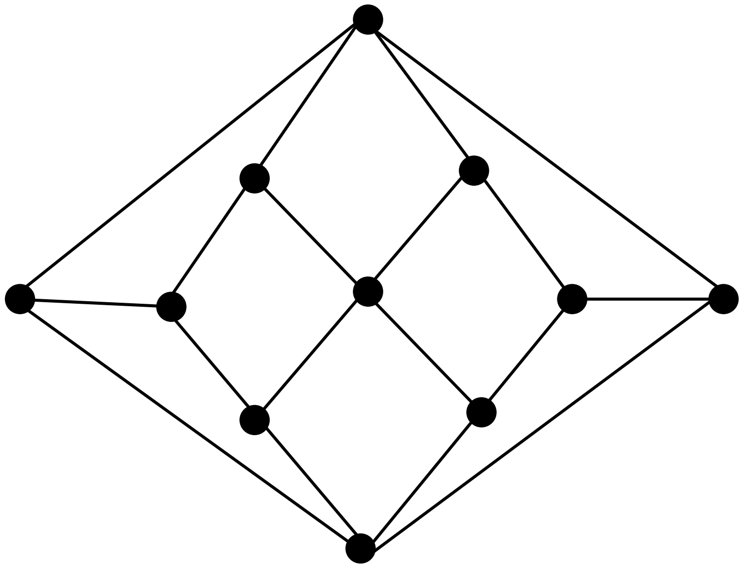


Verkko G'

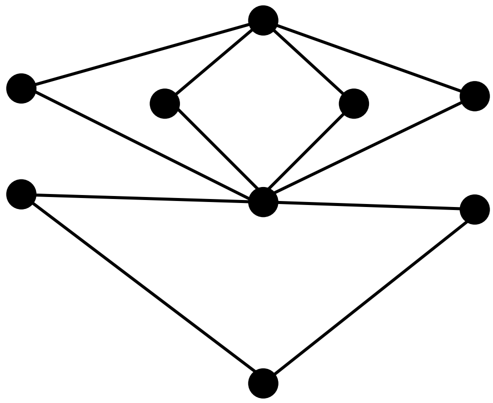
Aloitetaan värittäminen pisteestä 1 (kts. kuva) ja väritetään se mustaksi. Sen jälkeen sen naapureita $2, 4, 5$ pitää värittää punaisiksi. Pisteen 6 on tällöin oltava musta, koska sillä on punainen naapuri 4 ja samoin pisteen 8 on oltava musta, koska sillä on punainen naapuri 2. Mutta 6 ja 8 ovat toistensa naapureita, joten päädytään ristiriitaan. Verkko ei ole kaksijakoinen.

Toinen tapa olisi vedota Lauseeseen III 2.8 ja löytää verkosta G' sykli, jonka pituus on pariton (esimerkki tällaisestahan pyydettiin tehtävässä joka tapauksessa). Yksi esimerkki on 5-sykli $(1, 2, 8, 6, 4, 1)$.

4. Kuvassa 6 alla on esitetty verkot G ja G'. Tutki ovatko verkot kaksijakoisia. Tutki kummankin verkon kohdalla löytyykö verkosta Hamiltonin kulku ja/tai kierros.



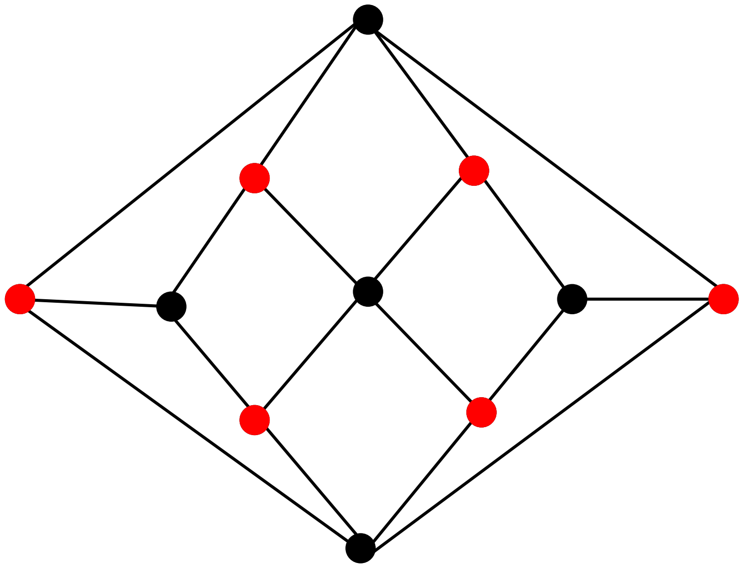
Verkko G



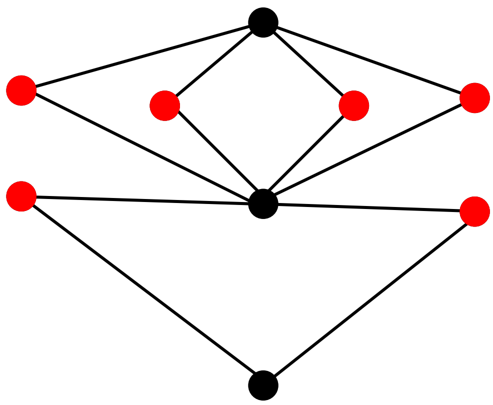
Verkko G'

Kuva 6

Ratkaisu: Seuraavassa kuvassa on esitetty kummankin verkon väritys kahdella värilla, josta kaksijakoisuus näkyy:



Verkko G

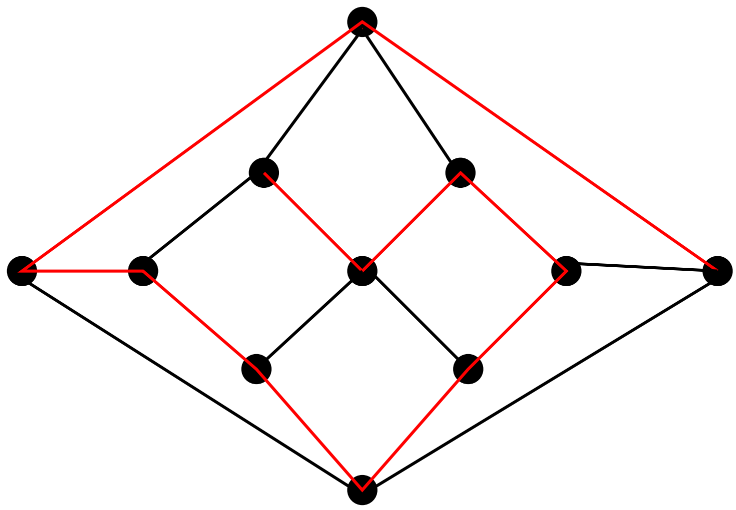


Verkko G'

Tutkitaan löytyykö verkoista Hamiltonin kulkuja tai kierroksia käyttämällä kaksijakoisuutta hyväksi.
Tiedetään, että jos kaksijakoisesta verkosta löytyy Hamiltonin **kierros**, niin verkossa on tällöin sama määrä mustia ja punaisia pisteitä. Kuten yllä esitetystä värityksestä näkyy, tämä ehto rikkoutuu kummankin verkon kohdalla - verkossa G on 6 punaista ja 5 mustaa pistettä, verkossa G' on 6 punaista ja 3 mustaa pistettä. Näin ollen sekä verkossa G, että verkossa G' ei ole Hamiltonin kierrosta.

Tiedetään, että jos kaksijakoisessa verkossa on Hamiltonin kulku, niin verkon mustien ja punaisten pisteiden lukumäärä voi erota korkeintaan yhdellä. Näin ollen, verkossa G' ei voi olla Hamiltonin kulkuakaan.

Verkosta G taas helposti löytyy Hamiltonin kulku (yksi esimerkki on esitetty kuvassa punaisena):



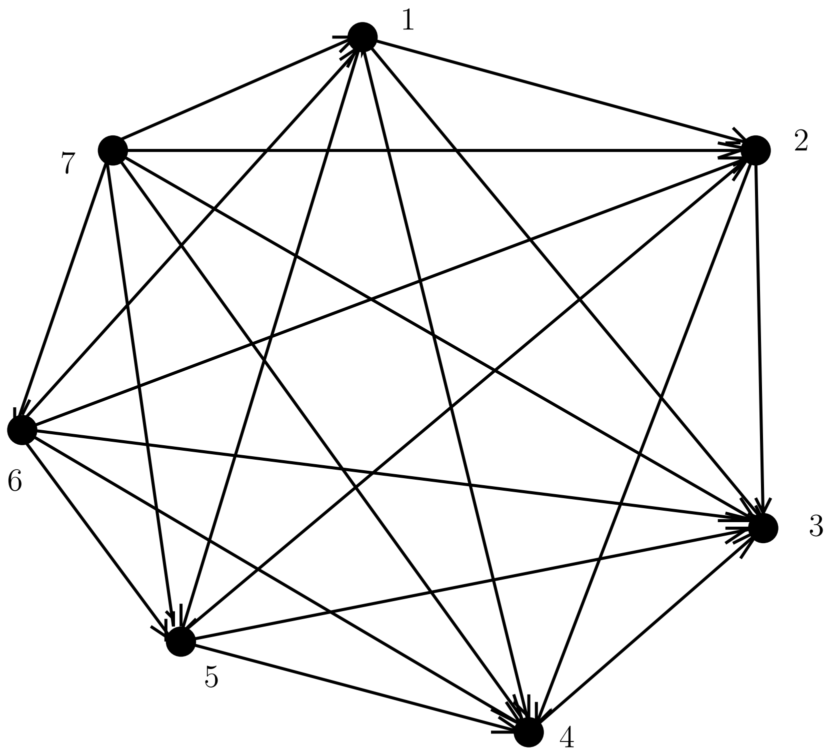
5. Olkoon G suhteikko, jolle $P_G = [7]$ ja jonka seuraajaluettelot ovat

$$1: \ 2,3,4,5; \quad 2: \ 3,4; \quad 3: ; \quad 4: \ 3;$$

$$5: \ 2,3,4; \quad 6: \ 1,2,3,4,5; \quad 7: \ 1,2,3,4,5,6;$$

a) Piirrä suhteikko ja varmista, että se on turnaus.
b) Lauseen II 4.5. nojalla suhteikossa G on Hamiltonin kulku. Etsi Hamiltonin kulku suhteikosta G.
c) Onko suhteikossa G Hamiltonin kierrosta?

Ratkaisu:
a) Kuva suhteikosta:



Kaikilla $x, y \in P_G, x \neq y$ tasan toinen nuolista $\overrightarrow{xy}$, $\overrightarrow{yx}$ on suhteikossa. Lisäksi suhteikossa ei ole silmukoita. Näin ollen suhteikko on turnaus.

b) Konstruoidaan Hamiltonin kulku Lauseen II 4.5 todistuksessa annetun menetelmän mukaisesti. Aloitetaan triviaalilla kululla (1) ja lisätään yksi piste kerrallaan "luonnollisessa järjestyksessä" $2, \ldots, 7$. Uusi piste laitetaan aina (vasemmalta lukien) ensimmäiseen paikkaan johon se "sopii".
Koska on olemassa nuoli $\overrightarrow{12} \in N_G$, jatketaan triviaali kulku (1) kuluksi $(1, 2)$. Koska on olemassa nuoli $\overrightarrow{23}$, jatketaan se kuluksi $(1, 2, 3)$. Ainoa pisteestä 4 lähtevä nuoli on nuoli $\overrightarrow{43}$ ja suhteikossa on nuoli $\overrightarrow{24}$, joten piste 4 lisätään kulkuun pisteiden 2 ja 3 "väliin". Saadaan kulku $(1, 2, 4, 3)$. Jatketaan samalla tavalla. Seuraavaksi lisätään piste 5. Koska pisteen 5 ensimmäinen seuraaja on piste 2, seuraavaksi saadaan kulku $(1, 5, 2, 4, 3)$.
Lisäämällä piste 6 saadaan kulku $(6, 1, 5, 2, 4, 3)$. Lisäämällä piste 7 saadaan kulku $(7, 6, 1, 5, 2, 4, 3)$. Hamiltonin kulku on valmis.

Huomatus: Hamiltonin kulun konstruktio voidaan aloittaa mistä tahansa pisteestä ja lisätä uusia pisteitä missä tahansa järjestyksessä. Esimerkiksi aloitetaan konstruktio pisteestä 5 ja lisätään pisteitä seuraavassa järjestyksessä: $7, 3, 2, 4, 1, 6$. Tällöin välivaiheet näyttävät seuraavilta:
(5),
$(7, 5)$,
$(7, 5, 3)$,
$(7, 5, 2, 3)$,
$(7, 5, 2, 4, 3)$,
$(7, 1, 5, 2, 4, 3)$,

$(7, 6, 1, 5, 2, 4, 3)$.

Saadaan sama Hamiltonin kulku, mutta eri välivaiheiden kautta.

Huomautus: Voidaan osoittaa, että kulku $(7, 6, 1, 5, 2, 4, 3)$ on tämän suhteikon ainoa Hamiltonin kulku (mieti sitä!). Jos tällainen täydellinen suhteikko tulkitaan urheiluturnaukseen liityväksi suhteikoksi (jossa nuoli osoittaa hävittäjästä voittajan), yksikäsitteisen Hamiltonin kulun olemassaolo voidaan tulkita tarkoittavan sitä, että turnauksen osallistujat voidaan laittaa yksikäsitteiseen "paremmus"-järjestykseen.

Yleisesti ottaen näin ei tarvitse olla - on olemassa täydellisiä suhteikkoja, joissa on erilaisia Hamiltonin kulkuja (yritä keksiä mielenkiintoisia esimerkkejä).

c) Suhteikko ei ole vahvasti yhtenäinen, esimerkiksi koska pisteestä 3 ei lähde mitään nuolia. Tästä seuraa, että suhteikossa ei voi olla Hamiltonin kierrosta.

6. Osoita, että jos kutsuilla jokaisella vieraalla on muiden joukossa enemmän tuttuja kuin tuntemattomia, niin vieraat voidaan sijoittaa istumaan pyöreän pöydän ääreen siten, että jokainen tuntee molemmat vierustoverinsa. Tunteminen oletetaan molemminpuoliseksi. Pöytä oletetaan olevan tarpeeksi iso, niin, että kaikki vieraat varmasti mahtuvat istumaan sen ääreen.

Ratkaisu: Olkoon vieraiden joukko X ja olkoon R tuttavuusrelaatio "$(x, y) \in R$ jos ja vain jos x ja y ovat tuttavia". Tällöin $G = (X, R)$ on verkko (relaatio on symmetrinen, koska oletamme tuttavuus molemminpuoliseksi ja irrefleksiivinen koska tulkitsemme, että kukaan ei ole itseensä tuttava). Tapa sijoittaa vieraita järjestykseen pyöreän pöydän ääreen siten, että jokainen tuntee molemmat vierustoverinsa vastaa verkossa G **Hamiltonin kierrosta** $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Ainoa poikkeus on tapaus jossa $|X| = 2$ eli vieraita on vain kaksi ja ne molemmat tuntevat toistensa. Tässä erikoistapauksessa voidaan sijoittaa niitä istumaan toistensa vastaan ja tulkita tämän järjestyksen toteuttavan tehtävän vaatimusta. Näin ollen, voidaan olettaa, että $|X| \geqslant 3$, jolloin riittää osoittaa, että verkossa G on Hamiltonin kierros.

Olkoon $|X| = m$ ja olkoon $x \in X = P_G$ mielivaltainen. Osoitetaan, että $d(x) \geqslant \frac{m}{2}$. Oletetaan ensin, että $m = 2n$ on parillinen. Jos olisi $d(x) < n = m/2$, eli $d(x) \leqslant n - 1$, niin x tuntisi joukossa X korkeintaan $n - 1$ ihmistä, joten vastaavasti tuntemattomien määrä olisi tällöin sille vähintään

$$2n - 1 - (n - 1) = n.$$

Toisin sanoen tuntemattomien määrä (vähintään n) olisi hänelle suurempi kuin tuttavien määrä (korkeintaan $n - 1$). Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Näin ollen

$$d(x) \geqslant m/2.$$

Toinen tapaus on tapaus jossa $m = 2n + 1$ on pariton. Tehdään taas vasta-oletus: $d(x) \leqslant m/2 = n + \frac{1}{2}$. Koska $d(x)$ on kokonaisluku, tämä on yhtäpitävä epäyhtälön $d(x) \leqslant n$ kanssa. Tuntemattomien määrä x:lle olisi tällöin vähintään

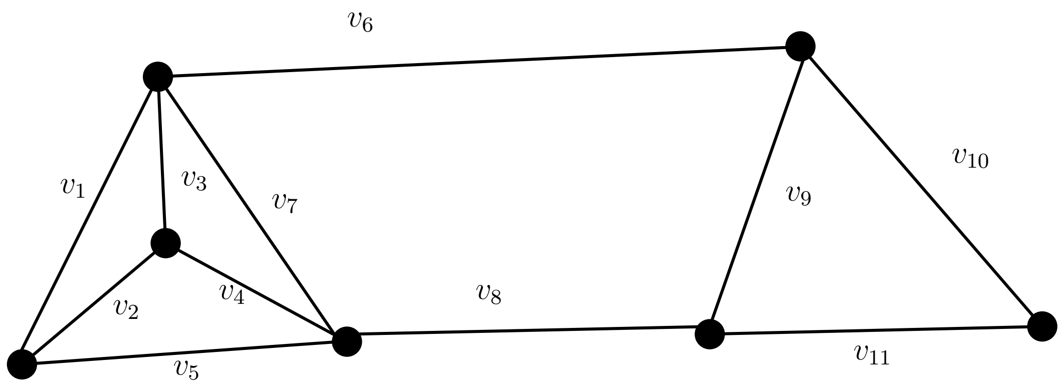
$$m - 1 - n = 2n + 1 - 1 - n = n.$$

Tämä on taas ristiriita oletuksen kanssa, sillä tuttuja piti olla (aidosti!) enemmän kuin tuntemattomia.

Näin ollen kaikilla $x \in P_G$ pätee $d(x) \geqslant p_G/2$. Koska lisäksi oletamme, että joukossa P_G on ainakin kolme alkiota, verkko G toteuttaa Korollaarin II 5.8 oletukset. Tämän korollaarin mukaan verkossa G on Hamiltonin kierros.

Huomautus: Itse asiassa ei ole vaikeata osoittaa, että kaikille verkoille G ehto $d(x) \leqslant p_G/2$ kaikilla $x \in P_G$ on **yhtäpitävä** ehdon $d_G(x) > d_{\tilde{G}}(x)$ kaikilla $x \in P_G$ kanssa (joka sanoo siis, että verkon jokaisella pistellä on aidosti enemmän naapureita kuin ei-naapureita). Koska verkko voidaan aina tulkita koostuvan ihmisistä ja niiden välisestä tuttavuus-relaatiosta, niin tämän tehtävän väite onkin tämän valossa itse asiassa **täysin yhtäpitävä** Korollaarin II 5.8 kanssa (jos kahden alkion verkon erikoistapausta ei oteta huomioon).

7. Kuvassa 1 on esitetty eräs verkko G (ja sen viivat $v_1 - v_{11}$).



Kuva 1

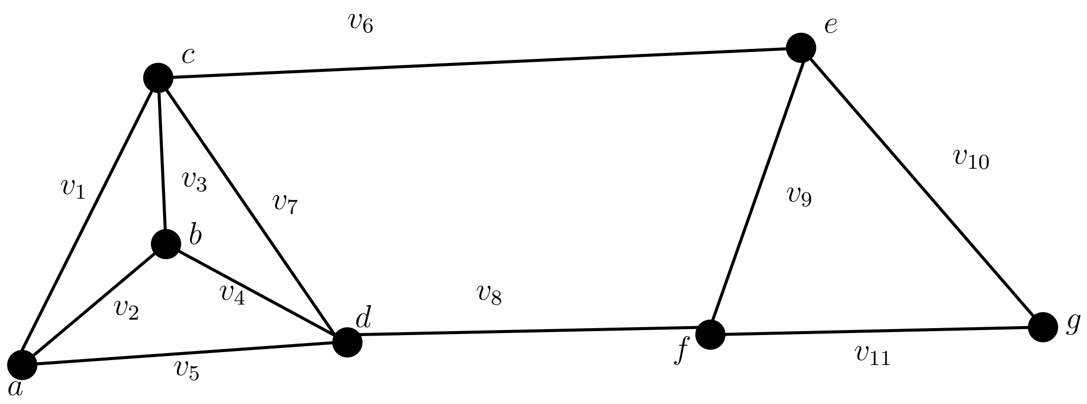
Olkoot

$$R_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_6, v_7, v_8, v_9\},$$

$$R_2 = \{v_1, v_5, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}\}.$$

a) Osoita, että sekä R_1, että R_2 ovat renkaistoja **suoraan määritelmästä** eli esittämällä ne renkaiden erillisenä yhdisteenä.
b) Osoita, että $R_1 \triangle R_2$ on rengas. Minkä syklin määräämä rengas se on?
c) Osoita, että joukko $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7\}$ on kahden renkaan yhdiste, mutta ei ole renkaisto.

Ratkaisu: Nimitetään solmut, että niihin voidaan viitata:



a) (a, b, c, a) on yksinkertainen kierros, jonka viivajoukko on

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$$

Koska kierroksen pituus on 3, V_1 on rengas (kierroksen viivajoukko on rengas jos kierroksen pituus on vähintään kolme). Samalla tavalla nähdään, että

$$V_2 = \{v_6, v_7, v_8, v_9\}$$

on yksinkertaisen 4-syklin (c, d, f, e, c) määrämä viivajoukko. Koska $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ja

$$R_1 = V_1 \cup V_2,$$

R_1 on kahden erillisen renkaan yhdiste, eli on renkaisto.

Vastaavasti $R_2 = W_1 \cup W_2$, missä

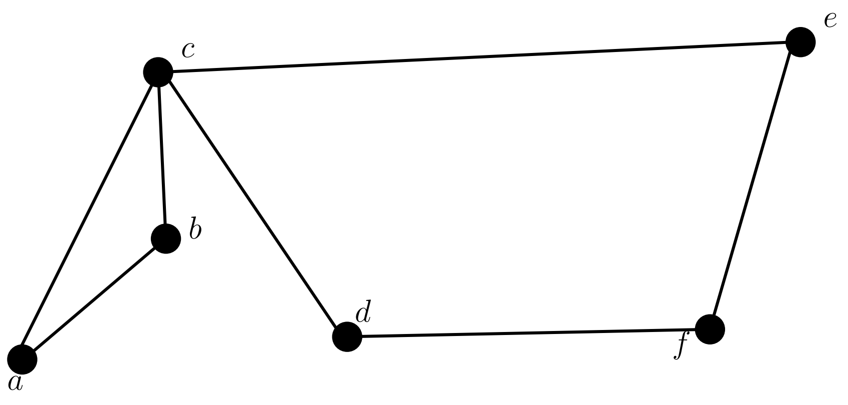
$$W_1 = \{v_1, v_5, v_7\}$$

on 3-rengas, jonka määrää 3-sykli (a, c, d, a) ja

$$W_2 = \{v_9, v_{10}, v_{11}\}$$

on 3-rengas, jonka määrää 3-sykli (e, f, g, e). Koska $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, myös R_2 on renkaisto.

Huomautus: Periaatteessa on olemassa toinenkin tapa tarkistaa, onko annettu viivajoukko $W \subset V_G$ renkaisto - Lauseeseen III 2.3 perustuva tapa. Lauseen III 2.3 mukaan $W \subset V_G$ on renkaisto jos ja vain jos jokaisen viivajoukon W virittämän aliverkon $G(W)$ solmun aste on parillinen (tässä aliverkossa).
Esimerkiksi R_1:n virittämä aliverkko on seuraavannäköinen verkko:



Tässä verkossa jokaisen pisteen aste on kaksi, paitsi pisteen c aste on 4. Näin ollen Lauseen III 2.3 nojalla R_1 on renkaisto. Samalla tavalla voidaan osoittaa, että R_2 on renkaisto.
Kuitenkin tässä tehtävässä tällainen ratkaisutapa ei kelpaa, koska tehtävänannossa erityisesti pyydettiin suorittamaan todistus *suoraan määritelmästä.*

b) Lasketaan symmetrinen erotus

$$R_1 \bigtriangleup R_2 = R_1 \backslash R_2 \cup R_2 \backslash R_1$$

suoraan määritelmästä. Koska

$$R_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_6, v_7, v_8, v_9\},$$

$$R_2 = \{v_1, v_5, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}\}$$

saadaan

$$R_1 \bigtriangleup R_2 = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_8, v_{10}, v_{11}\}.$$

Helposti nähdään, että tämä on 7-syklin (a, b, c, e, g, f, d, a) määrämä viivajoukko. Näin ollen $R_1 \bigtriangleup R_2$ on rengas.

Huomautus: Teorian mukaan kahden renkaiston symmetrinen erotus $R_1 \bigtriangleup R_2$ on aina renkaisto (Lause III 2.5). Tästä tuloksesta nyt ei kuitenkaan ole iloa, koska meidän pitää osoittaa vahvempi väite. Jokainen rengas on renkaisto, mutta renkaisto ei ole välttämättä rengas. Tässä esimerkissä kävi niin, että R_1 ja R_2 ovat molemmat kahden renkaan erillisiä yhdisteitä, mutta niiden symmetrinen erotus $R_1 \bigtriangleup R_2$ onkin yhden renkaan yhdiste.

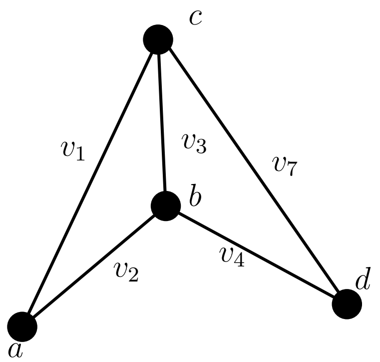
c) Joukko $R_3 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7\}$ voidaan esittää muodossa $V_1 \cup V_3$, missä

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ ja}$$

$$V_3 = \{v_3, v_4, v_7\},$$

jossa kumpikin joukoista V_1, V_3 on 3-rengas. Rengas V_1 on jo osoitettu renkaaksi a)-kohdassa ja V_3 on 3-syklin (c, b, d, c) määrämä viivajoukko.

R_3 on siis yhdiste kahdesta renkaasta, mutta se ei ole renkaisto. Tätä **ei kuitenkaan voi perustella** sillä, että se on kahden renkaan *ei-erillinen* yhdiste ($V_1 \cap V_3 = \{v_3\}$) - periaatteessa voisi olla, että se voidaan esittää renkaiden erillisenä yhdisteenä jollakin toisella tavalla. Oikea tapa osoittaa, että R_3 ei ole renkaisto on käyttää Lausetta III 2.3 joka antaa yksinkertaisen riittävän ja välttämättömän ehdon sille, että annettu viivajoukko on renkaisto. Tämän Lauseen mukaan R_3 on renkaisto jos ja vain jos sen virittämän aliverkon jokaisen pisteen aste on parillinen. Kuitenkin viivajoukon R_3 virittämä aliverkko on seuraavannäköinen verkko:



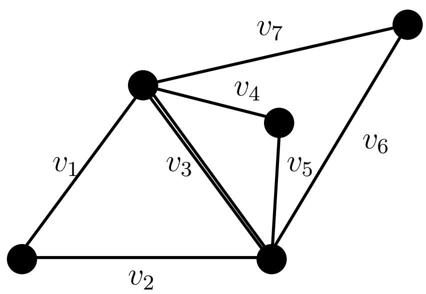
Tässä verkossa pisteiden c ja b aste on pariton (kolme kummallakin). Näin ollen R_3 ei ole renkaisto ja ollaan valmiit.

Huomautus: Virheellinen päätely, jonka mukaan R_3 ei ole renkaisto, koska se on kahden renkaan ei-erillinen yhdiste, oli erittäin suosittu palautetussa ratkaisussa. Se on kuitenkin loogisesti täysin epäpätevä. Ei ole mitään takeita siitä, että annettu viivojen joukko voittaisiin esittää renkaiden yhdisteenä **vain yhdellä tavalla**. Renkaisto se kuitenkin on, jos ainakin yksi tällainen tapa on määritelmän mukainen, eli on erillinen yhdiste. Jos samalla sille löytyy toinen esitys renkaiden yhdisteenä, joka ei ole erillinen, eihän se lakkaa olemassa renkaisto.

Valaistaksemme tätä loogista periaatetta tarkastellaan toista, yksinkertaisempaa esimerkikkejä. Jos väitän, että luku $3 + 5 = 8$ voidaan esittää kahden parillisen kokonaisluvuna summana, eihän voi sanoa, että olen väärässä, koska 3 ja 5 eivät ole parillisia. $3 + 5 = 8$ on **vain yksi tapa** esittää kahdeksan kahden kokonaisluvun summana ja vaikka tämä tapa ei toteuda ehtoa ”molemmat luvut parillisia”, siitä ei mitenkään seuraa, että toista tapaa ei voisi olla. Tässä esimerkissä tällainen tapa helposti löytyykin - $8 = 4 + 4$.

Itse asiassa ei ole vaikeata konstruoida esimerkkejä renkaiden ei-erillisistä yhdisteistä, jotka ovat kuitenkin renkaistoja. Esimerkiksi kuvassa alla joukot $R_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $R_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$ ja $R_3 = \{v_3, v_6, v_7\}$ ovat renkaita, jotka eivät ole erillisiä. Kuitenkin niiden yhdiste $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$ on renkaisto - esimerkiksi koska sen virittämän verkon jokaisen pisteen aste on parillinen (Lause III 2.3.). Näin ollen se voidaan esittää myös renkaiden *erillisenä* yhdisteenä. Itse asiassa ei ole vaikeata keksiä tällainen esitys, esimerkiksi,

$$R = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{v_4, v_5, v_6, v_7\}.$$



8. a) Olkoon G verkko. Oletetaan, että jollekin $x \in P_G$ pätee $d(x) \geqslant 3$. Osoita, että joko G tai sen komplementti $\tilde{G}$ sisältää 3-renkaan.
b) Olkoon G verkko, jossa on vähintään kuusi pistettä. Osoita, että joko G tai $\tilde{G}$ sisältää 3-renkaan. Anna esimerkki viiden pisteen verkosta, jolle tämä ei päde.

Ratkaisu: a) Olkoon $x \in P_G$ sellainen, että $d(x) \geqslant 3$ ja olkoot y, z, u sen kolme erilaista naapuria. Tarkastellaan pisteiden y, z, u virittämää aliverkkoa H.

Tapaus 1: H:ssä ei ole yhtään viivaa. Tällöin $\tilde{H}$ on kolmen pisteen täydellinen verkko, erityisesti sen pisteet y, z, u muodostavat kolmion komplementissa $\tilde{G}$.

Tapaus 2: H:ssä on ainakin yksi viiva. Voidaan olettaa, että $\overline{yz} \in V_G$. Tällöin, koska myös $\overline{xy} \in V_G$ ja $\overline{xz} \in V_G$, pisteet x, y, z muodostavat kolmion verkossa G.

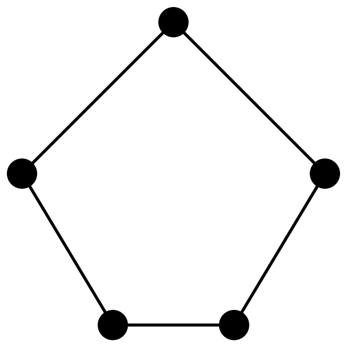
b) Olkoon G verkko, jossa on vähintään kuusi pistettä. a)-kohdan nojalla riittää osoittaa, että joko G:ssä tai sen komplementissa $\tilde{G}$ on piste, jonka aste on kolme.

Jos G:ssä on olemassa piste x jolle $d_G(x) \geqslant 3$, asia on selvä. Muuten $d_G(x) \leqslant 2$ kaikilla $x \in P_G$. Tällöin komplementissa $\tilde{G}$ jokaisella $x \in P_G = P_{\tilde{G}}$ pätee

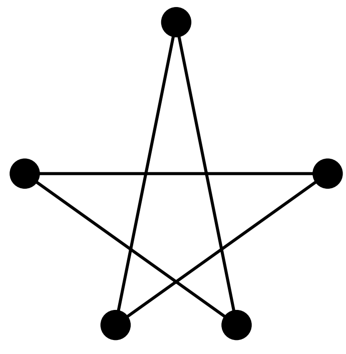
$$d_{\tilde{G}}(x) = p_G - 1 - d_G(x) \geqslant 5 - d_G(x) \geqslant 3.$$

Näin ollen tässä tapauksessa jokaisen pisteen $x \in P_{\tilde{G}}$ aste on vähintään kolme.

Viiden pisteen verkko G ja sen komplementti $\tilde{G}$, jotka kumpikin eivät sisällä yhtäkään kolmiota:



Verkko G



Komplementti $\tilde{G}$

Kummassakin verkossa jokaisen pisteen aste on tasan kaksi. Lisäksi jokaisen pisteen x ainoat naapurit y ja z eivät ole toistensa naapureita. Harj. 3/4 nojalla sekä G, että $\tilde{G}$ ei sisällä yhtään kolmiota.

Itse asiassa helposti nähdään, että $\tilde{G}$ on isomorfinen G:n kanssa. Kumpikin verkko on 5-syklin eli yksinkertaisen viiden pisteen kierroksen määrämä verkko (tästä saadaan helposti isomorfismi tarvittaessa).

9. Näytä, että jos täydellisen viiden pisteen verkon K_5 jokainen viiva väritetään joko siniseksi tai punaiseksi, niin väritetystä verkosta löytyy rengas, jonka kaikki viivat

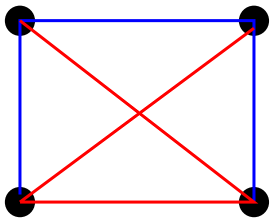
ovat samanvärisiä. Päteekö vastaava tulos verkolle K_4?

Ratkaisu: Täydellisessä viiden pisteen verkossa K_5 on tasan $5 \cdot 4/2 = 10$ viivaa. Näin ollen, jos jokainen viiva väritetään joko siniseksi tai punaiseksi, ainakin viisi viivaa saa saman värin. Oletetaan, että esimerkiksi sinisiä viivoja on ainakin viisi. Olkoon G sinisten viivojen virittämä aliverkko. Tällöin

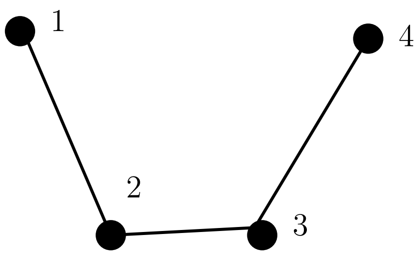
$$v_G \geqslant 5 \geqslant p_G.$$

Tällöin Lauseesta III 1.3 seuraa, että G:ssä on ainakin yksi rengas. Selvästi tämä antaa väitteen.

Seuraavassa verkon K_4 viivojen värityksessä ei ole samanvärisiä renkaita:



Perustellaan tämä väite. Nyt sekä punaisten, että sinisten viivojen virittämät aliverkot ovat isomorfiaa vaille kumpikin oleellisesti seuraava verkko H (joka on jo tuttu Harjoituksesta 3/3):



Verkko H

Tässä verkossa on tasan $v_H = 3$ viivaa ja $p_H = 4$ pistettä. Lisäksi tämä verkko on selvästi yhtenäinen, sillä siinä helposti keksitään kulku $(1, 2, 3, 4)$, joka käy jokaisessa pisteessä. Olkoon v jokin tämän verkon viiva. Lauseen III 1.1. nojalla v kuuluu johonkin renkaaseen jos ja vain jos verkko $H - v$ on yhtenäinen. Kuitenkin verkossa $H - v$ on tasan 2 viivaa ja 4 pistettä. Koska $2 < 4 - 1 = 3$, Lauseesta II 3.13 seuraa, että $H - v$ ei voi olla yhtenäinen. Näin ollen, Lauseen III 1.1. nojalla mikään H:n viiva ei voi kuulua renkaaseen, joten H:llä ei voi olla renkaita.

Huomautus: Itse asiassa H on esimerkki niin sanotusta *puusta*, joista kurssilla puhutaan renkkaiden jälkeen.