Verkot, syksy 2015
Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Laskuharjoitus 4.
Ratkaisuehdotukset.

1. Olkoon G suhteikko, jonka solmujoukko on $\{a, b, c, d, e, f\}$ ja jonka seuraajaluettelot ovat

$$a: \; b, c, f;$$
$$b: \; a, d, f;$$
$$c: \; b, d, f;$$
$$d: \; e;$$
$$e: \; d, e, f;$$
$$f: \; .$$

a) Mitkä suhteikon nuolista ovat nuolia joukkoon $\{b, c\}$? Mitkä suhteikon nuolista ovat nuolia joukosta $\{a, b, c\}$?
b) Onko suhteikossa olemassa nuolta joukosta/joukkoon $\{f\}$? Onko suhteikossa olemassa nuolta joukosta $\{d, e, f\}$? Perustele.
c) Onko G vahvasti yhtenäinen? Onko G yhtenäinen? Perustele.

Ratkaisu:
a) Nuolet joukkoon $\{b, c\}$ ovat nuolet muotoa $\overrightarrow{xb}$ tai $\overrightarrow{xc}$, missä $x \neq b, c$. Seuraajaluetteloista huomataan, että suhteikon G tämänmuotoiset nuolet ovat tasan nuolet $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{ac}$.

Nuolet joukosta $\{a, b, c\}$ ovat nuolet muotoa $\overrightarrow{ax}$, $\overrightarrow{bx}$ tai $\overrightarrow{cx}$, missä $x \neq a, b, c$. Seuraajaluetteloista huomataan, että suhteikon G tämänmuotoiset nuolet ovat tasan nuolet $\overrightarrow{af}$, $\overrightarrow{bd}$, $\overrightarrow{bf}$, $\overrightarrow{cd}$, $\overrightarrow{cf}$.

b) Suhteikon nuolet $\overrightarrow{af}$, $\overrightarrow{bf}$, $\overrightarrow{cf}$, $\overrightarrow{ef}$ ovat nuolia joukkoon $\{f\}$. Erityisesti on olemassa nuoli joukkoon $\{f\}$, esimerkiksi riittää antaa yksi näistä nuoleista.

Suhteikossa ei ole nuolta joukosta $\{f\}$. Nimittäin tällainen nuoli olisi muotoa $\overrightarrow{fx}$ jollakin $x \in P_G$, $x \neq f$, jolloin x on f:n seuraaja. Kuitenkin pisten f seuraajaluettelo on tyhjä, joten tällaisia x ei ole olemassa.

Seuraajaluetteloista huomataan, että kaikki nuolet, joiden alkupiste on d, e tai f, päättyvät myös pisteisiin d, e, f. Näin ollen suhteikossa ei ole olemassa nuolta joukosta $\{d, e, f\}$.

c) b)-kohdan ratkaisun yhteydessä löydettiin suhteikon solmujoukon P_G aito epätyhjä osajoukko $\{f\}$, josta ei vie yhtäkään nuolta. Näin ollen suhteikko ei voi olla vahvasti yhtenäinen.

Osoitetaan, että suhteikko G on yhtenäinen. Yksinkertaisin tapa osoittaa tämän on löytää semikulku, joka kulkee jokaisen suhteikon pisteen kautta. Tässä tapauksessa löytyy jopa kulku, joka kulkee jokaisen pisteen kautta, esimerkiksi kulku (a, c, b, d, e, f).

Huomautus 1: Monissa ratkaisuissa todetaan vain, että "verkko on yhtenäinen, koska kaikilla $\emptyset \neq P \subsetneq P_G$ on olemassa nuoli joukkoon P tai nuoli joukosta P" perustelematta tätä väitettä mitenkään. Mutta sellaisenaan tämä toteamus ei ole mikään perustelu, siinä vain toistetaan yhtenäisyyden määritelmää. Toisin sanoen tämä "perustelu" käytännössä tarkoittaa "perustelua": "Verkko on yhtenäinen, koska se on yhtenäinen". Ei ole mitenkään itsestään selvää, että väite "kaikilla $\emptyset \neq P \subsetneq P_G$ on olemassa nuoli joukkoon P tai nuoli joukosta P" pitää paikkansa tehtävän suhteikolle, tämä väite ei ole niin yksinkertainen, että sen paikkansapitävyys voisi nähdä suoraan. Jos yhtenäisyyttä haluaa perustella tällä tavalla määritelmästä lähtien on oikeasti käyttävää jollakin tyhjentävällä tavalla läpi kaikki pistejoukon P_G aidot ja epätyhjät osajoukot ja osoittaa, että jokaiselle löytyy ainakin yksi nuoli sisään tai ulos.

Tämän voi tehdä suhteellisen nopeasti esimerkiksi seuraavasti. Olkoon $\emptyset \neq P \subsetneq P_G$. Tällöin $f \in P$ tai $f \notin P$. Oletetaan, että $f \in P$. Koska P on aito osajoukko, on olemassa $x \in P_G, x \notin P$. Jos $x \in \{a, b, c, e\}$, niin nuoli $\overrightarrow{xf} \in N_G$ on nuoli joukkoon P. Muuten, jos $a, b, c, e \in P$, on pakko olla $d \notin P$. Tällöin esimerkiksi $\overrightarrow{ad}$ on nuoli joukosta P.

Jäljellä on tapaus $f \notin P$. Mutta tällöin $f \in P' = P_G \backslash P$, missä P' (joukon P joukko-opillinen komplementti) on pistejoukon P_G aito epätyhjä osajoukko. Edellisen nojalla on olemassa nuoli joukkoon P' tai nuoli joukosta P'. On selvä, että nuoli joukkoon P' on samalla nuoli joukosta P ja nuoli joukosta P' on samalla nuoli joukkoon P. Näin ollen, myös tässä tapauksessa yhtenäisyyden määritelmän vaatimus toteutuu osajoukolle P.

Huomautus 2: Suosittu "perustelu" tyyliin "suhteikko G on yhtenäinen, koska sen jokaiseen pisteseen vie ainakin yksi nuoli tai siitä lähtee ainakin yksi nuoli" ei toimi, sillä tämä ominaisuus ei mitenkään takaa yhtenäisyyttä, vaan ainoastaan tarkoittaa sitä, että suhteikossa ei ole "täysin eristettyjä pisteitä". Määritelmän kannalta se tarkoittaa sitä, että yhtenäisyyden määritelmä on verifioitu ainoastaan sellaisille aidoille epätyhjille osajoukoille, jotka ovat yksiöitä.

2. Olkoon G kuten edellisessä tehtävässä. Anna esimerkki
   a) kulusta pisteestä a pisteeseen e, joka ei ole yksinkertainen,
   b) kulusta pisteestä a pisteeseen e, joka on yksinkertainen.
   c) yksinkertaisesta kierroksesta, jonka pituus on kolme, ja joka alkaa pisteessä c.
   d) polusta pisteestä b pisteeseen f, joka ei ole yksinkertainen kulku.

Ratkaisu:
a) Esimerkiksi kulku (a, b, a, c, d, e), kulku (a, c, d, e, d, e) tai kulku (a, c, d, e, e) ovat

kaikki esimerkkejä ei-yksinkertaisesta kulusta pisteestä a pisteeseen e.

b) Esimerkiksi kulku (a, b, d, e) tai kulku (a, c, d, e) on yksinkertainen kulku pisteestä a pisteeseen e.

c) Kierros (c, b, a, c) on yksinkertainen kierros, joka alkaa pisteessä c ja jonka pituus on kolme.
Muistutus: kulun pituus ei ole siinä esiintyvien pisteiden lukumäärä, vaan sen askelten lukumäärä. Näin ollen esimerkiksi kierros (a, b, a) ei kelpaa esimerkiksi, sillä sen pituus on kaksi.

d) Esimerkiksi kulku (b, a, c, b, f) on polku pisteestä b pisteeseen f, joka ei ole yksinkertainen kulku. Se ei ole yksinkertainen, koska se käy pisteessä b kaksi kertaa ja toinen näistä pisteen b esiintymisistä ei ole kulun alku-tai loppupiste (toinen on alkupiste). Se on polku, koska sen askelten jonossa $(\overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{cb}, \overrightarrow{bf})$ ei kuitenkaan ole toistoja.

Toinen esimerkki olisi kulku (b, a, b, f). Myös kulku (b, d, e, e, f) on polku, joka ei ole yksinkertainen kulku.

Huomautus: Monissa ratkaisuissa periaatteessa oikeat kulut annettiin luettelemalla niiden nuolia. Muista, että tämän kurssin virallisen määritelmän mukaan kulku on solmujen muodostama jono, ei nuolten.

3. Olkoon G kuten kahdessa edellisessä tehtävässä. Määrää suhteikon G vahvasti yhtenäiset komponentit. Perustele.

Ratkaisu:
Määritelmän mukaan suhteikon vahvasti yhtenäinen komponentti on sen *maksimaalinen* vahvasti yhtenäinen alisuhteikko. Jokainen suhteikon solmu on tasan yhden vahvasti yhtenäisen komponentin solmu (Lause II 3.8). Jokainen suhteikon vahvasti yhtenäinen alisuhteikko on tasan yhden suhteikon komponentin alisuhteikko (Lemma II 3.7). Lauseen II 4.6. Korollaarin mukaan suhteikon pisteet x ja y ovat samassa vahvasti yhtenäisessä komponentissa jos ja vain jos suhteikossa G on olemassa kulku pisteessä x pisteeseen y **ja** kulku pisteestä y pisteeseen x.

Jokainen vahvasti yhtenäinen komponentti on pistejoukonsa virittämä alisuhteikko (Lemma II 3.5). Vahvasti yhtenäisten komponenttien määrittämisessä yleensä sovelletaan yllä mainittuja tuloksia.

Aloitetaan huomaamalla, että pisteestä f ei vie yhtään nuolta suhteikossa (tämähän huomattiin jo tehtävän 7b) yhteydessä). Tästä seuraa, että pisteen f virittämä triviaali alisuhteikko $H_1 = (\{f\}, \varnothing)$ on suhteikon vahvasti yhtenäinen komponentti. Tämän väitteen tarkka perustelu - Lauseen II 3.8 suhteikolla G on olemassa vahvasti yhtenäinen komponentti H_1, joka sisältää pisteen f. Jos tämä komponentti sisältäisi vielä joitakin muitakin pisteitä, olisi $\{f\}$ sen pistejoukon aito ja epätyhjä osajoukko. Tällöin komponentin H_1 vahvan yhtenäisyyden nojalla suhteikossa H_1 olisi nuoli joukosta $\{f\}$. Mutta tällaista nuolta ei ole edes koko suhteikossa G (tehtävän 7b ratkaisu). Näin ollen H_1 ei voi sisältää muita pisteitä, joten se on yhden pisteen triviaali suhteikko.

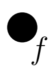
Seuraavaksi yritetään määrätä pisteen d vahvaa yhtenäistä komponenttia (siis sellaista, joka sisältää pisteen d, Lauseen II 3.8 nojalla tällaisia on tasan yksi), merkitään se H_2:llä. Koska suhteikossa G on olemassa *viiva* $\overline{de}$, suhteikossa on kulku (d, e) pisteestä d pisteseen e ja kulku (e, d) pisteestä e pisteseen d. Lauseen II 4.6. nojalla pisteet d ja e kuuluvat samaan vahvasti yhtenäiseen komponentiin, eli komponenttiin H_2. Koska Lemman II 3.5 H_2 on pistejoukonsa virittämä alisuhteikko, sen tällöin on pakko sisältää myös pisteiden d ja e välisen viivan $\overline{de}$.

Osoitetaan, että komponentissa H_2 ei ole muita pisteitä. Tehdään vasta-oletus, tällöin $P = \{d, e\}$ on pistejoukon P_{H_2} aito ja epätyhjä osajoukko. Koska H_2 on vahvasti yhtenäinen, siinä on oltava nuoli joukosta P. Kuitenkin helposti nähdään, että suhteikossa G on tasan yksi nuoli joukosta $P = \{d, e\}$ - se on nuoli $\overrightarrow{ef}$. Jos tämä nuoli kuuluisi komponenttiin H_2, myös sen loppupiste f kuuluisi siihen. Kuitenkin tässä vaiheessa tiedämme jo, että f kuuluu omaan komponenttinsa H_1, joka ei sisällä muita pisteitä. Lauseen II 3.8 nojalla f ei voi kuulua kahteen eri komponenttiin. Saatu ristiriita osoittaa sen, että H_2:n ainoat pisteet ovat d ja e. Toisin sanoen H_2 on pistejoukon $\{d, e\}$ virittämä alisuhteikko. Sen ainoat nuolet ovat nuolet $\overrightarrow{de}$, $\overrightarrow{ed}$ ja $\overrightarrow{ee}$ (eli kaikki suhteikon G nuolet, joiden molemmat päätepisteet ovat joukossa $\{d, e\}$).

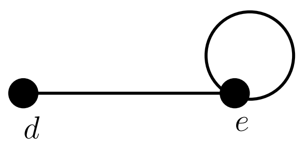
Jäljellä on pisteet a, b, c. Osoitetaan, että niiden virittämä alisuhteikko H_3 on vahvasti yhtenäinen. Tällöin sen on pakko olla maksimaalinen (mitään muita pisteitä se ei voi sisältää, koska niille löytyi jo oma komponentinsa), toisin sanoen H_3 on tällöin vahvasti yhtenäinen komponentti ja ollaan valmiit.

Huomataan, että H_3 sisältää kierroksen (a, c, b, a), joka kulkee jokaisen pisteen kautta. Lauseesta II 4.6 seuraa tällöin, että H_3 on vahvasti yhtenäinen.

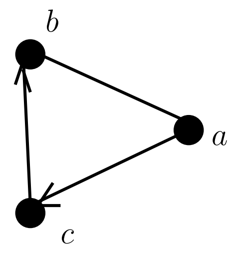
Näin ollen suhteikolla G on kolme vahvasti yhtenäistä komponenttia.



Komponentti H_1



Komponentti H_2



Komponentti H_3

Huomautus 1: Yhtenäisiä komponentteja G:llä on vain yksi - G itse, sillä G on yhtenäinen (Tehtävän 1c ratkaisu).

Huomautus 2: Hyvin monessa ratkaisussa (yleensä oikea) vastaus annettiin ilman minkäänlaisia perusteluja. Muista, että esimerkiksi kokeessa pelkkä vastaus ilman perusteluja ei anna täysiä pisteitä (paitsi tietysti, jos eksplisiittisesti sallitaan vastaus ilman perusteluja). Vahvasti yhtenäisten komponenttien määrittäminen ei ole niin triviaali ongelma, joten vastaus on perusteltavaa. On tietysti pelkästään hyvä ja toivottava, jos matemaattinen intuitio on kehittynyt tarpeeksi niin, että pystyy näkemään, minkä pitäisi olla oikea vastaus, mutta matematiikan hallitseminen tarkoittaa myös sitä, että osaa perustella väiteitään.

Huomautus 3: Hyvin yleinen tekninen virhe ratkaisuissa liittyi siihen, että komponentit annettiin niiden **pistejoukkoina**, tyyliin - vahvasti yhtenäiset komponentit ovat $H_1 = \{f\}$, $H_2 = \{d, e\}$, $H_3 = \{a, b, c\}$. Mutta komponentit eivät ole pelkäästään pisteidensa muodostamia joukkoja, vaan ovat **suhteikkoja** siinä missä muutkin, eli komponenttiin liittyy paitsi informaatio sen pisteistä myös informaatio siihen kuuluvista nuoleista.

Voidaan sanoa, että "H_1 on pistejoukon $\{f\}$ virittämä alisuhteikko" (koska silloin tämä ilmaisu sisältää kaiken informaation komponentista H_1 *suhteikkona*), mutta **ei voida** sanoa, että "H_1 **on** joukko $\{f\}$".

Huomautus 4: Toinen yleinen ja aika vakava virhe - ei muisteta osoittaa komponenttikandidaattien, esimerkiksi suhteikkojen H_2 ja H_3 **maksimaalisuutta**. Osoitetaan vain, että ne ovat vahvasti yhtenäisiä alisuhteikkoja ja tehdään siitä johtopäätös, että ne ovat komponentteja. Kuitenkin periaatteessa kumpikin voisi olla isomman vahvasti yhtenäisen alisuhteikon aito alisuhteikko.

Esimerkiksi tarkastellaan suhteikko, joka saadaan G:stä "vaihtamalla nuolen $\overrightarrow{cd}$ suunta" eli poistetaan nuoli $\overrightarrow{cd}$ ja lisätään sen sijaan nuoli $\overrightarrow{dc}$. Nyt pisteet $\{a, b, c\}$ virittävät edelleenkin erään vahvasti yhtenäisen alisuhteikon H_1, samoin pisteet $\{d, e\}$ virittävät toisen vahvasti yhtenäisen alisuhteikon H_2, täysin samoin perustein, kuten tämän tehtävän ratkaisussa yllä. Kuitenkin nyt H_1 ja H_2 eivät enää ole **maksimaalisia**, itse asiassa pisteiden $\{a, b, c, d, e\}$ virittämä alisuhteikko on nyt vahvasti yhtenäinen ja on eräs vahvasti yhtenäinen komponentti H, tässä komponentissa on esimerkiksi kaikissa pisteissä käyvä kierros (c, b, a, b, d, e, d, c). Näin ollen yhden nuolen suunnan muuttaminen suhteikossa muutti vahv. yhtenäisten komponenttien lukumäärän - nyt niitä olisi kaksi, eikä kolme.

4. Olkoon G verkko ja olkoon $\tilde{G}$ sen komplementti.
   a) Osoita, että kahdesta verkosta G ja $\tilde{G}$ ainakin toinen on yhtenäinen.
   b) Anna esimerkki epäyhtenäisestä verkosta G, jonka komplementti $\tilde{G}$ on yhtenäinen.
   c) Anna esimerkki yhtenäisestä verkosta G, jonka komplementti $\tilde{G}$ on yhtenäinen.

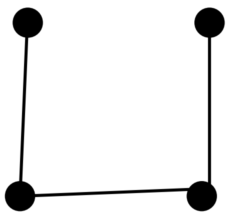
   Ratkaisu:
   a) Riittää osoittaa, että epäyhtenäisen verkon G komplementti $\tilde{G}$ on yhtenäinen.
   Olkoon G epäyhtenäinen verkko ja olkoot $a, b \in P_{\tilde{G}} = P_G$. Osoitetaan, että verkossa $\tilde{G}$ on olemassa kulku solmusta a solmuun b.

Jos $\overline{ab} \notin V_G$, komplementissa $\tilde{G}$ on viiva $\overline{ab}$, joten tällöin (a, b) on kulku a:stä b:hen verkossa $\tilde{G}$.

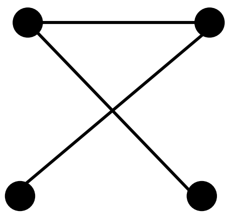
Oletetaan, että $\overline{ab} \in V_G$. Tällöin a ja b ovat erityisesti samassa verkon G yhtenäisessä komponentissa H_1. Koska oletamme, että G ei ole yhtenäinen, sillä on olemassa myös toinen komponentti H_2. Olkoon c jokin tämän komponentin piste. Tällöin erityisesti verkossa G ei ole olemassa viivaa $\overline{ac}$ eikä viivaa $\overline{bc}$, joten kumpikin näistä viivoista ovat komplementin $\tilde{G}$ viivoja. Tässä tapauksessa (a, c, b) on kulku pisteestä a pisteeseen b verkossa $\tilde{G}$.

b) Olkoon $G = (\{a, b\}, \varnothing)$ kahden pisteen a, b verkko, jossa ei ole yhtään viivaa. Tällöin G on epäyhtenäinen, mutta sen komplementti on täydellinen kahden pisteen verkko K_2, joten on yhtenäinen.

c) Olkoon G seuraava neljän pisteen verkko:



Tällöin G on selvästi yhtenäinen. G:n komplementti on seuraavan näköinen verkko:



Selvästi tämäkin verkko on yhtenäinen. Itse asiassa tässä tapauksessa G on isomorfinen komplementinsa $\tilde{G}$ kanssa (kts. Harj. 3.3).

5. Olkoon G verkko, jonka pisteiden ja viivojen lukumäärälle pätee

$$v_G > \frac{1}{2}(p_G - 1)(p_G - 2).$$

Osoita, että G on yhtenäinen.

Ratkaisu: Edellisen tehtävän nojalla riittää osoittaa, että G:n komplementti $\tilde{G}$ ei ole yhtenäinen. Arvioidaan verkon $\tilde{G}$ viivojen lukumäärä. Tunnetusti

$$v_{\tilde{G}} = \frac{p_G(p_G - 1)}{2} - v_G.$$

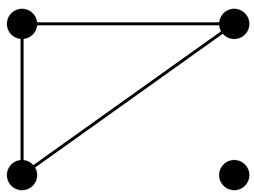
Tästä saadaan oletuksen avulla arvio

$$v_{\tilde{G}} < \frac{p_G(p_G-1)}{2} - \frac{1}{2}(p_G-1)(p_G-2) = \frac{1}{2}(p_G-1)(p_G-(p_G-2)) = p_G-1 = p_{\tilde{G}}-1.$$

Lauseesta II 3.13 seuraa tämän nojalla, että $\tilde{G}$ ei voi olla yhtenäinen.

Huomautus: Joistakin ratkaisuista ilmeni vääränlainen käsitys siitä, mitä Lause II 3.13 sanoo. Tämä Lause EI sano, että jos verkossa pätee $v_G \geqslant p_G - 1$, niin se on yhtenäinen, tämä ei pidä paikkaansa. Lause sanoo, että JOS verkko on yhtenäinen, niin sille välttämättä pätee $v_G \geqslant p_G - 1$.

Esimerkki neljän pisteen verkosta, jolla on kolme viivaa, eli jolle pätee arvio $v_G \geqslant p_G - 1$, mutta joka on kuitenkin epäyhtenäinen:



6. Olkoon J suhteikko, jonka pistejoukko on $P_J = \{2, 3, 4, \ldots, 50\} = [50]\setminus\{1\}$ ja jossa pisteiden $n, m \in P_J$ välillä on nuoli $\overrightarrow{nm} \in N_J$ jos ja vain jos n jakaa luvun m.
a) Osoita, että luvut 2 ja 13 kuuluvat samaan J:n yhtenäiseen komponenttiin, mutta eivät kuulu samaan vahvasti yhtenäiseen komponenttiin.
b) Osoita, että luvut 2 ja 29 eivät kuulu samaan J:n yhtenäiseen komponenttiin.
c) Määritä pisteen 3 yhtenäinen komponentti.

Ratkaisu: a) Aloitetaan todistamalla, että suhteikon J vahvasti yhtenäiset komponentit **ovat kaikki yksiöitä**, tarkemmin sanottuna ovat alisuhteikkoja muotoa $(\{x\}, \{(x, x)\})$, $x \in P_J$ (huomaa, että jokaisen pisteseen liittyy silmukka!). Tästä automaattisesti seuraa, että pisteet 2 ja 13 eivät kuulu samaan vahvasti yhtenäiseen komponenttiin.

Olkoon $x \in P_G$. Lauseen II 2.6 Korollaarin mukaan piste $y \in P_G$ kuuluu pisteen x vahvasti yhtenäiseen komponenttiin jos ja vain jos on olemassa *sekä* kulku pisteestä x pisteeseen y, *että* kulku pisteestä y pisteeseen y.

Olkoot $x, y \in P_G$. Olkoon $\bar{x} = (x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y)$ kulku x:stä y:hyn. Kulun määritelmän mukaan jokaisella $i = 1, \ldots, n$ pätee $\overrightarrow{x_{i-1}x_i} \in N_G$. Suhteikon määritelmän mukaan tämä tarkoittaa sitä, että jokaisella $i = 1, \ldots, n$ solmu x_{i-1} on solmun x_i tekijä. Tästä seuraa erityisesti, että $x_{i-1} \leqslant x_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Näin ollen pätee

$$x = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = y.$$

Erityisesti siis $x \leqslant y$. Toisin sanoen, olemme näyttäneet, että jos on olemassa kulku x:stä y:hyn, niin välttämättä $x \leqslant y$ (tarkemmin ei ole vaikeata osoittaa, että tällainen kulku on olemassa jos ja vain jos x jakaa y, mutta yllä johdettu väite riittää meille).

Näin ollen, jos on olemassa sekä kulku pisteestä x pisteeseen y, että kulku pisteestä y pisteeseen y, ylläolevan mukaan $x \leqslant y$ ja $y \leqslant x$. Tästä seuraa, että $x = y$. Toisin sanoen pisteen x vahvasti yhtenäinen komponentti ei voi sisältää muita solmuja paitsi solmun x itse. Tämä siis tarkoittaa täsmälleen sitä, että suhteikon **jokaisen pisteen** vahvasti yhtenäinen komponentti sisältää vain yhden solmun (ja silmukan sen ympärillä, koska se on suhteikon nuoli). Vahvan yhtenäisyyden mielessä suhteikko on ikään kuin ”täysin epäyhtenäinen”.

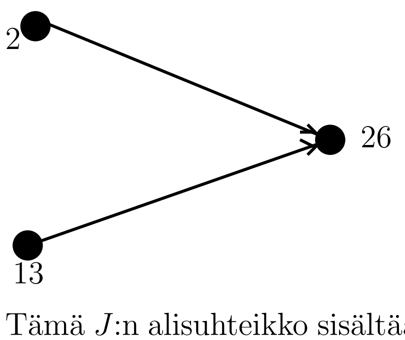
Erityisesti luku 13 ei kuulu pisteen 2 vahvasti yhtenäiseen komponenttiin.

<u>Tapa 2:</u> Esitetään vielä toinen tapa osoittaa, että pisteen $p \in P_G$ vahvasti yhtenäinen komponentti on triviaali, joka tosin toimii vain **alkuluvulle** p. Koska 2 ja 13 ovat alkulukuja, tämä myös riittäisi.

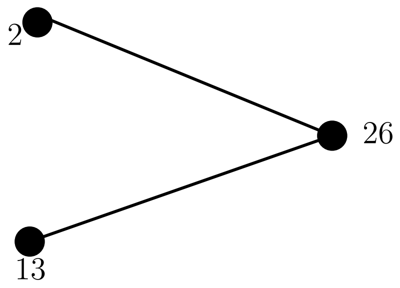
Olkoon siis $p \in P_G$ *alkuluku*. Osoitetaan, että luvun p vahvasti yhtenäinen komponentti K ei voi sisältää muita solmuja. Tehdään vasta-oletus: K sisältää muita solmuja. Tällöin $P = \{p\}$ on vahvasti yhtenäisen suhteikon K pistejoukon P_K **aito ja epätyhjä osajoukko**. Vahvan yhtenäisyyden määritelmän nojalla suhteikossa K, erityisesti suhteikossa J, on olemassa nuoli $\overrightarrow{np}$ joukkoon $P = \{p\}$. Tämä tarkoittaisi, että on olemassa $n \in P_J$ joka jakaa luvun p ja jolle pätee $n \neq p$. Mutta p on oletuksemme mukaan *alkuluku* eikä sillä ole muita aitoja tekijöitä kuin 1. Kuitenkin 1 ei kuulu joukkooon P_J. Näin ollen vasta-oletus johtaa ristiriitaan.

Osoitetaan vielä, että 2 ja 13 kuuluvat kuitenkin samaan suhteikon J *yhtenäiseen komponenttiin*. Riittää osoittaa, että on olemassa suhteikon J *yhtenäinen* alisuhteikko H, joka sisältää molemmat pisteet 2 ja 13 (Lemman II 3.7 mukaan jokainen yhtenäinen alisuhteikko sisältyy kokonaan täsmälleen yhteen yhtenäiseen komponenttiin).

Koska $2 \cdot 13 = 26$ ja $26 \in P_J$, suhteikossa G on olemassa nuolet $\overrightarrow{2, 26}$ ja $\overrightarrow{13, 26}$ (tässä kirjoitamme nuolen $\overrightarrow{xy}$ muodossa $\overrightarrow{x, y}$ selkeyden vuoksi). Tarkastellaan näiden nuolten muodostamaa alisuhteikkoa K:

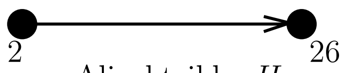


Tämä J:n alisuhteikko sisältää molemmat pisteet 2 ja 13, joten riittää osoittaa, että K on yhtenäinen suhteikko. Yksi tapa on vedota Lauseeseen II 3.3: suhteikon K symmetrinen sulkeuma K^s on seuraavannäköinen verkko:

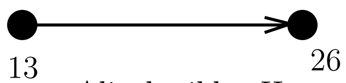


Tämä verkko on selvästi yhtenäinen, esimerkiksi siitä syystä, että siinä on kulku $(2, 26, 13)$ joka sisältää kaikki verkon pisteet (huom, suhteikossa K tämä jono ei ole kulku, itse asiassa suhteikossa K ei ole kulkua, joka kulkisi jokaisen pisteen läpi). Toinen (kenties vielä yksinkertaisempi) tapa muotoilla sama perustelu olisi sanoa, että $(2, 26, 13)$ on **semikulku** suhteikossa K (tällöin sym. sulkeumasta ei edes tarvitse puhua eksplisiittisesti).

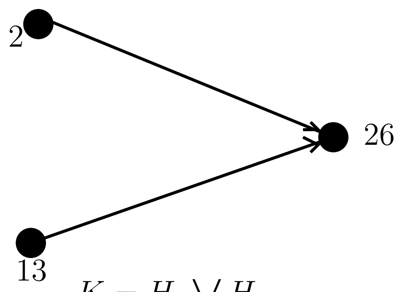
Toinen (kenties monimutkaisempi) tapa osoittaa, että K on yhtenäinen: Käytetään Lemmaa III 3.6. Tästä Lemmasta seuraa erityisesti, että *kahden* yhtenäisen suhteikon H_1, H_2 yhdiste $H_1 \bigvee H_2$ on yhtenäinen, **edellyttäen**, että $P_{H_1} \cap P_{H_2} \neq \emptyset$ eli jos niillä on yhteisiä pisteitä.
Sovelletaan tätä tulosta suhteikkoihin $H_1 = (\{2, 26\}, \{(26, 2)\})$, $H_2 = (\{13, 26\}, \{(26, 13)\})$. Näille suhteikoille pätee $H_1 \bigvee H_2 = K$ ja $26 \in P_{H_1} \cap P_{H_2}$, joten Lemman III 3.6 K on yhtenäinen, kunhan osoitetaan, että H_1 ja H_2 ovat yhtenäisiä.



Alisuhteikko H_1



Alisuhteikko H_2



$K = H_1 \bigvee H_2$

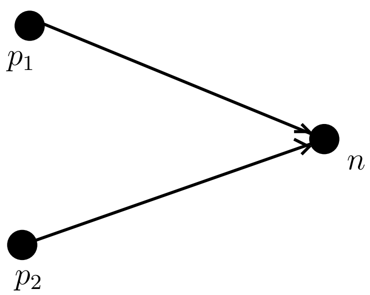
Molemmat suhteikot H_1 ja H_2 koostuvat yhdestä nuolesta $\overrightarrow{xy}$ ja sen kahdesta päätepisteestä x, y. Tälläinen verkko on aina yhtenäinen (mutta ei ole vahvasti yhtenäinen!). Tämä voidaan nähdä suoraan yhtenäisyyden määritelmästä - pistejoukon $P_G = \{x, y\}$ ainoat aidot epätyhjät osajoukot ovat $P_1 = \{x\}$ ja $P_2 = \{y\}$. Nuoli $\overrightarrow{xy}$ on tällöin sekä nuoli joukosta P_1 ja nuoli joukkoon P_2.

b) Solmuun 29 liittyy suhteikossa G vain yksi nuoli - se on silmukka $\overrightarrow{29, 29}$. Tämä johtuu siitä, että 29 on alkuluku, joten sillä ei ole joukossa J muita tekijöitä kuin 29 itse. Lisäksi 29 ei ole itse minkään muun J:n alkion tekijä, sillä $29 \cdot 2 = 58$ on jo suurempi kuin 50. Tästä seuraa, että suhteikossa J ei ole yhtäkään nuolta joukosta $\{29\}$ eikä yhtäkään nuolta joukkoon $\{29\}$. Osoitetaan tämän avulla, että pisteen 29 yhtenäinen komponentti K suhteikossa G ei voi sisältää muita solmuja kuin $\{29\}$. Nimittäin, oletetaan, että K sisältää muitakin solmuja. Tällöin $P = \{29\}$ on suhteikon K pistejoukon P_K aito ja epätyhjä osajoukko. Koska K on yhtenäisenä komponenttina yhtenäinen, suhteikossa K, erityisesti suhteikossa J on olemassa nuoli joukosta $\{29\}$ tai nuoli joukkoon $\{29\}$. Olemme yllä kuitenkin todenneet, että tämä ei pidä paikkaansa. Näin ollen pisteen 29 yhtenäinen komponentti ei sisällä muita pisteitä, erityisesti ei sisällä pistettä 2. Koska yhtenäiset komponentit ovat erillisiä, tästä seuraa, että pisteet 2 ja 29 eivät kuulu samaan yhtenäiseen komponenttiin.

c) Riittää selvittää mitkä pisteet kuuluvat pisteen 3 yhtenäiseen komponenttiin, koska Lemman II 3.5 nojalla yhtenäinen komponentti on pistejoukonsa virittämä.

Ajatus on seuraava: olkoon K pisteen 3 yhtenäinen komponentti suhteikossa G. Tällöin se sisältää myös solmun $6 = 2 \cdot 3$, sillä siihen pääsee nuolta pitkin solmusta 3. Samasta syystä se sisältää solmun 9, solmun 12 jne. Toisin sanoen K:n on pakko sisältää kaikki kolmosen monikerrat joukossa 50, eli solmut $3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots, 45, 48$. Nämä eivät kuitenkaan ole vielä kaikki komponentin K pisteet. Koska $6 = 2 \cdot 3$ eli on olemassa nuoli $\overrightarrow{2,6}$ ja $6 \in K$, yhtenäisen komponentin on pakko myös sisältää pisteen 2, sillä sen sekä nuolen $\overrightarrow{2,6}$ lisääminen komponenttiin K ei rikkoisi yhtenäisyyttä. Koska K sisältää pisteen 2, sen pitää sisältää kaikki sen monikerrat, samalla logiikalla kuten yllä nähtiin, että sen pitää sisältää kaikki kolmosen monikerrat. Samalla tavalla, koska $15 = 3 \cdot 5$, nähdään, että K:n on sisältävää piste 5, joten myös kaikki sen monikerrat jne.

Tässä vaiheessa huomataan yleisesti, että jos luvulla $n \in P_J$ on kaksi erilaista alkutekijää p_1, p_2 (esimerkiksi luvulla 6 on tekijöinä 2 ja 3), suhteikko J sisältää seuraavan osuuden



joka on yhtenäinen suhteikko (tämä nähdään samalla tavalla kuin a)-kohdan yhteydessä nähtiin, että pisteitä $2, 13, 26$ ja niiden välisiä nuolia sisältävä alisuhteikko on yhtenäinen).

Lauseen II 3.7 nojalla tämä yhtenäinen suhteikko sisältyy kokonaan erääseen yhtenäiseen komponenttiin. Erityisesti tästä nähdään, että tässä tilanteessa pisteet p_1, p_2, n kuuluvat kaikki samaan yhtenäiseen komponenttiin.

Näillä huomioilla varustettuna aloitetaan tarkastelu uudestaan. Olkoon siis K pisteen 3 yhtenäinen komponentti. Palautetaan mieleen, että P_J alkioista alkuluvut ovat tasan seuraavat luvut -

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.$$

Joukon P_J jokainen luku on jonkun alkuluvun monikerta ja alkuluvun $p \in P_J$ monikerrat joukossa P_J kuuluvat samaan suhteikon J yhtenäiseen komponenttiin luvun p kanssa. Kääntäen, jos luku n on jaollinen alkuluvulla p, suhteikossa J on nuoli $\overrightarrow{np}$, joten n ja p ovat tällöin täsmälleen samassa yhtenäisessä komponentissa. Näin ollen, riittää selvittää mitkä alkuluvut kuuluvat pisteen 3 kanssa samaan komponenttiin K.

Kaikki luvun 3 monikerrat (eli luvut, jotka ovat jaollisia kolmella) kuuluvat komponenttiin K, sillä tällaiseen lukuun on olemassa nuoli solmusta 3. Koska $6 = 2 \cdot 3$, edellisestä seuraa, että 2, joten myös sen kaikki monikerrat, ovat komponentissa K. Koska $15 = 5 \cdot 3$, samalla tavalla päätellään, että 5 ja kaikki sen monikerrat ovat komponentissa K. Koska $21 = 3 \cdot 7$, alkuluku 7 ja kaikki sen monikerrat ovat komponentissa K. Samalla tavalla nähdään, että lukujen 11, 13, 17, 19 ja 23 monikerrat kuuluvat komponenttiin K, koska

$$33 = 3 \cdot 11, 39 = 3 \cdot 13, 34 = 2 \cdot 17, 38 = 2 \cdot 19, 46 = 2 \cdot 23$$

(huomaa, että näistä kolmen viimeisen kohdalla vedotaan jo siihen, että $2 \in K$).

Jäljellä alkuluvut $29, 31, 37, 41, 43, 47$, jotka ovat jo ”niin isoja”, että joukossa J niillä ei ole muita monikertoja, kuin ne itse. b)-kohdan ratkaisussa näytettiin, että luku 29 on itsensä komponentti, eikä siihen kuulu mitään muita lukuja, erityisesti 29 ei ole luvun 3 komponentissa K. Aivan samalla tavalla nähdään, että solmujen $31, 37, 41, 43, 47$ yhtenäiset komponentit sisältävät vain yhden pisteen, erityisesti nämä solmut eivät kuulu luvun 3 yhtenäiseen komponenttiin.

Näin ollen luvun 3 yhtenäinen komponentti suhteikossa on pistejoukon

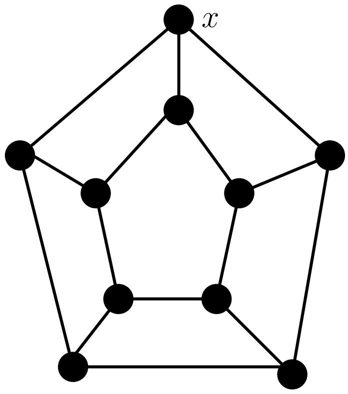
$$[50] \setminus \{1, 29, 31, 37, 41, 43, 47\} = P_J \setminus \{x \mid x \geqslant 25 \text{ ja on alkuluku}\}$$

virittämä J:n alisuhteikko. Tämä on itse asiassa suhteikon J ainoa yhtenäinen komponentti, joka sisältää enemmän kuin kaksi pistettä. Kaikkien muiden yhtenäisten komponenttien pistejoukko on yksiö.

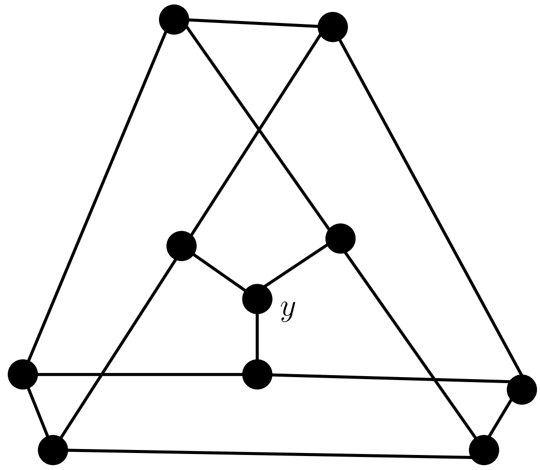
Yleisimmät virheet ja puutteet tämän tehtävän ratkaisussa:

- Ei esitetä tarpeeksi perusteluja ja selityksiä tai ei esitetä niitä lainkaan, annetaan vain suoraan vastaus (esimerkiksi c)-kohdassa). Komponenttien ja yhtenäisyyteen liittyvät kysymykset eivät ole ylensä niin itsestään selviä, että niitä voisi vaan kuitata vastauksella.
- c)-kohdassa väitetään, että komponentti koostuu vain kolmosen monikerroista, ei huomata, että siihen kuulu myös muitakin pisteitä.

7. Olkoot verkot G ja G' sekä pisteet $x \in P_G$, $y \in P_{G'}$ kuten kuvassa alla.
a) Laske jokaisen verkon G pisteen kulkuetäisyys pisteestä x.
b) Laske jokaisen verkon G' pisteen kulkuetäisyys pisteestä y.
c) Ovatko verkot G ja G' isomorfisia?

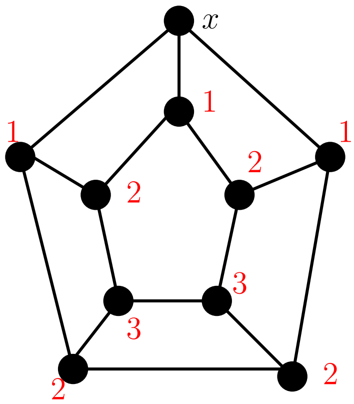


Verkko G

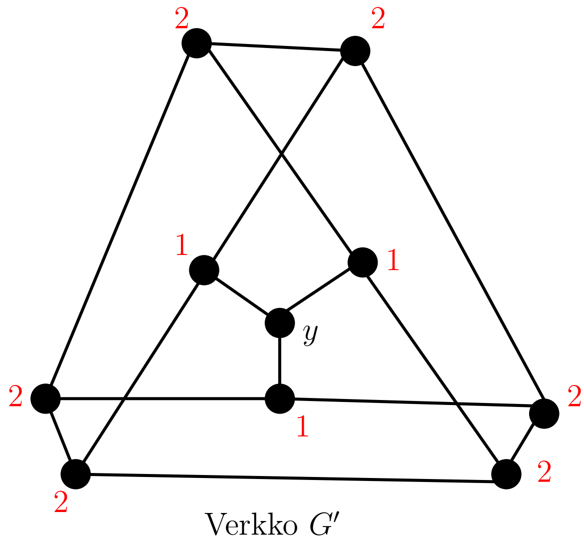


Verkko G'

Ratkaisu:
a-b) Verkkojen pisteiden kulkuetäisyydet pisteestä x/y on esitetty seuraavassa kuvassa:

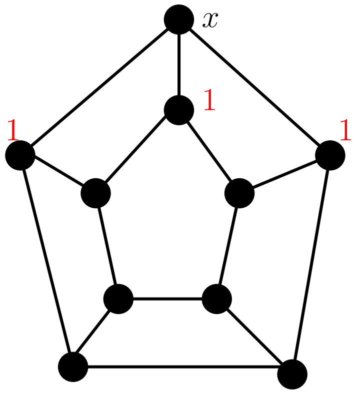


Verkko G

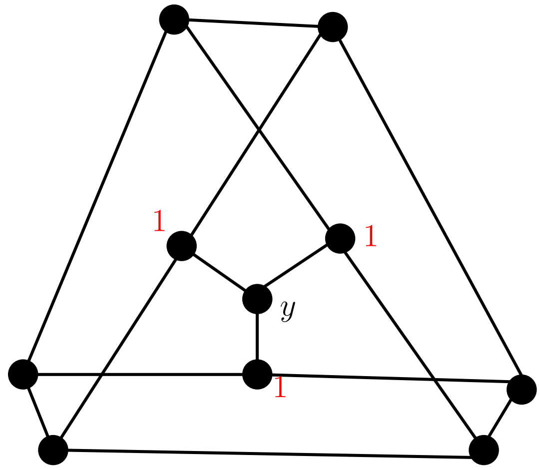


Verkko G'

Kulkuetäisyydet määrätään rekursiivisesti. Ensin kaikki pisteen x/y naapurit saavat kulkuetäisyyden arvoksi 1:

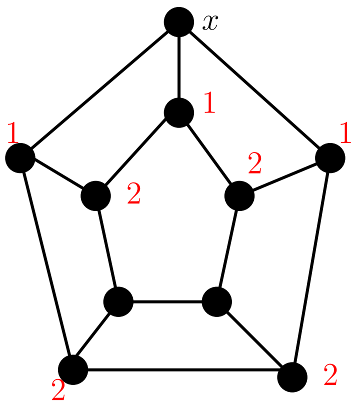


Verkko G

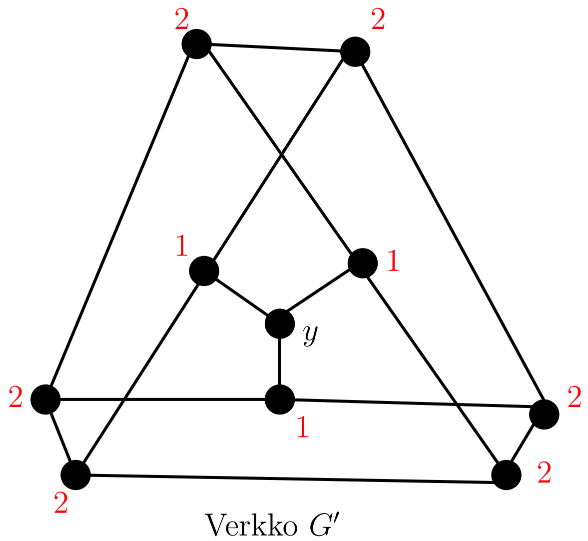


Verkko G'

Seuraavaksi annetaan leima 2 näiden pisteiden naapureille, joilla ei vielä ole määrätty kulkuetäisyys:

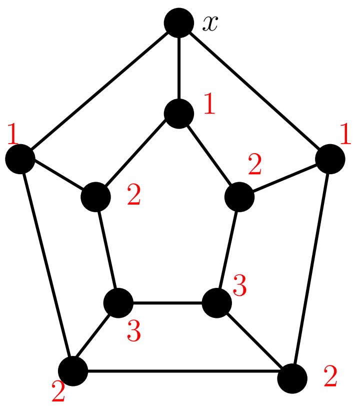


Verkko G



Verkko G'

Verkon G' kaikkienpisteiden kulkuetäisyys pisteessä y laskettu. Verkossa G on vielä kaksi pistettä jäljellä, ne saavat leiman 3 seuraavassa vaiheessa:



Verkko G

c) Oletetaan, että on olemassa isomorfismi $f\colon G \to G'$. Osoitetaan ensin, että tällöin voidaan tietyssä mielessä olettaa, että $f(x) = y$. Nimittäin verkko G on (geometrisessa mielessä) täysin *symmetrinen*. Tässä symmetrisyys ei viita relaation ominaisuuksiin, vaan kyse on siitä, että verkon G kaikki pisteet ovat "samanarvoisia". Esimerkiksi "ulko"-viisikulmio voidaan vaihtaa "sisä"-viisikulmion kanssa ilman, että verkon rakenne muuttuu - sen kaaviokin näyttää sen jälkeen täysin samalta kuin alussa. Verkoa esittävä kaavio voidaan myös "kiertää", jolloin esim. jokainen "ulko"-viisikulmion alkio voidaan asettaa pisteen x kohdalle. Tästä seuraa, että kaikki, mikä pätee pisteelle x verkossa G, pätee myös tämän verkon *jokaiselle* pisteelle. Erityisesti, jos x' on verkon G mielivaltainen piste, niin verkossa G on olemassa pisteitä, joiden kulkuetäisyys pisteestä x' on 3. Tästä seuraa, että, jos f on isomorfismi, niin $f(x')$:lle pätee verkossa G' sama. Jos kuitenkin valitaan x' niin, että $f(x') = y$ (tämä on mahdollista, koska f on surjektio), niin saadaan ristiriita, sillä b)-kohdan laskun nojalla ei ole olemassa sellaisia pisteitä $z \in P_{G'}$ joille pätee $d(y, z) = 3$ (ja isomorfismi säilyttää kulkuetäisyyksiä). Saatu ristiriita osoittaa sen, että isomorfismi f ei ole olemassa, joten verkot eivät ole isomorfisia.

Tärkeä Huomautus: Ei voi olettaa, että $f(x) = y$ pätisi automaattisesti, vaan pitää perustella miksi näin voidaan olettaa. Yleinen puute ratkaisuissa liittyi juuri tähän. a) ja b)-kohtien ratkaisuista ei voida päätellä vielä suoraan c)-kohdan väite.

8. Olkoon G verkko ja v jokin sen viiva. Merkinnällä $G - v$ tarkoitamme verkon G aliverkkoa, joka saadaan poistamalla G:stä viiva v (säilytetään kaikki G:n pisteet ja kaikki muut viivat).

   Oletetaan, että G on yhtenäinen. Osoita, että verkolla $G - v$ on korkeintaan kaksi yhtenäistä komponenttia.

Ratkaisu: Olkoot a ja b viivan v päätepisteet, $v = \overline{ab}$. Riittää osoittaa, että jokainen piste $x \in P_G = P_{G-v}$ on joko pisteen a tai pisteen b komponentissa verkossa $G - v$. Lauseen II 4.6 Korollaarin mukaan tämä tarkoittaa sitä, että verkossa $G - v$ on löydettävä joko kulku pisteestä x pisteeseen a tai kulku pisteestä x pisteeseen b.

Koska G on yhtenäinen, verkossa G on olemassa kulku $\bar{x} = (x_0 = x, x_1, \dots, x_n = a)$ pisteestä x pisteeseen a. Olkoon $(e_1, \dots, e_n)$ sen askelten jono, jolloin $e_i = \overrightarrow{x_{i-1}x_i}$. Jos tässä askelten jonossa ei esiinny nuolta $\overrightarrow{ab}$ tai nuolta $\overrightarrow{ba}$, niin $\bar{x}$ on kulku myös verkossa $G - v$ pisteestä x pisteeseen a ja ollaan valmiit. Muuten olkoon i *pienin* luvuista $i = 1, \dots, n$ jolla $e_i = \overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ on joko nuoli $\overrightarrow{ab}$ tai nuoli $\overrightarrow{ba}$. Tällöin osakulku $(x_0 = x, x_1, \dots, x_{i-1})$ on kulku verkossa $G - v$, joka alkaa x:ssä ja päättyy joko a:han tai b:hen (koska x_{i-1} on nuolen e_i alkupiste, eli a tai b). Olemme löytäneet verkossa $G - v$ kulun joka alkaa x:ssä ja loppuu a:han tai b:hen.

Huomautus: Renkkaiden teoria yhteydessä myöhemmin palataan kysymykseen siitä, millä ehdoilla yllä tarkastelussa tilanteissa verkko $G - v$ on yhtenäinen. Osoittautuu, että kun G on yhtenäinen, niin $G - v$ on yhtenäinen jos ja vain jos v kuuluu johonkin verkon *renkkaaseen* (eli on osa jotakin yksinkertaista epätriviaalia kierrosta, jonka pituus on vähintään kolme).

9. Olkoon G sellainen verkko, jolla on tasan kaksi paritonasteista solmua a, b. Osoita, että G:ssä on olemassa kulku pisteestä a pisteseen b.

Ratkaisu: Olkoon H pisteen a yhtenäinen komponentti verkossa G. Tällöin jokaisen verkon H pisteen $x \in P_H$ aste $d_H(x)$ verkossa H on sama kuin sen aste $d_G(x)$ verkossa G (koska H on pistejoukonsa virittämä, erityisesti jokainen x:han liittyvä viiva G:ssä on myös viiva H:ssä). Tästä seuraa, että jos $b \notin H$, niin a on verkon H ainoa paritonasteinen piste. Tämä on kuitenkin ristiriidassa Kättelylemman kanssa. Näin ollen $b \in H$. Koska a ja b ovat samassa yhtenäisessä komponentissa, niiden välillä on olemassa kulku verkossa G.

Huomautus: Helposti jää huomamatta sen mainitseminen, että komponentin H pisteiden asteet H:ssä ovat samoja kuin G:ssä. Tämä ei kuitenkin päde automaattisesti aliverkolle. Pisteen aste on "subjektiivinen" käsite - sen arvo voi riippua siitä, minkä verkon pisteenä solmu ajatellaan.