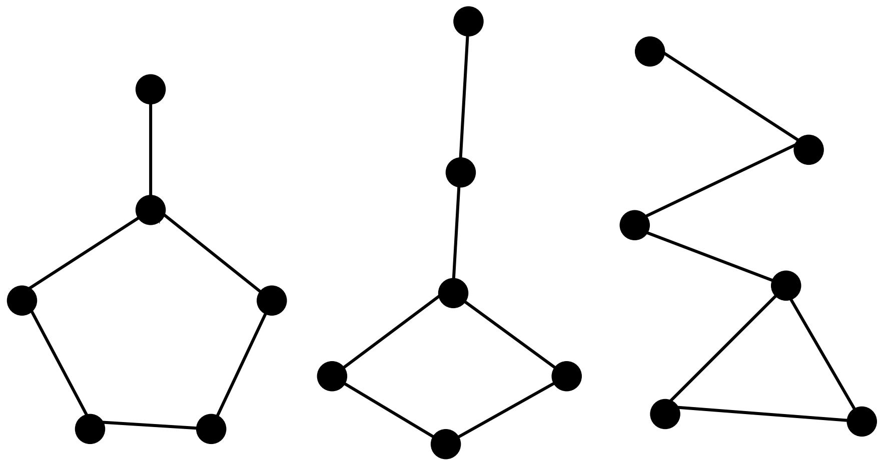
Verkot, syksy 2015
Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Laskuharjoitus 3.
Ratkaisuehdotukset.



Verkko A Verkko B Verkko C

1.

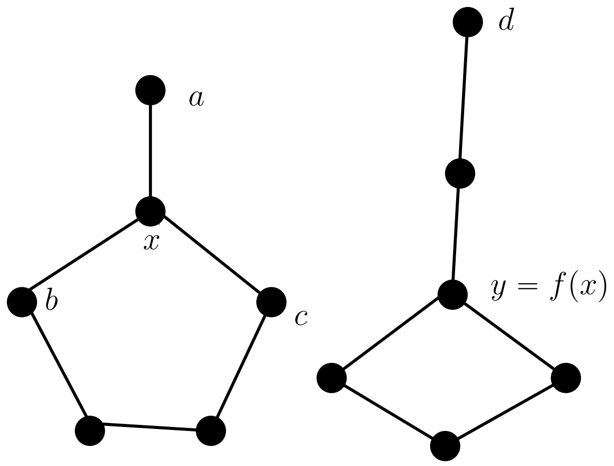
a) Osoita, että verkoilla A, B, C on sama astejono. Mikä se on?
b) Osoita, että verkoista A, B, C mitkään kaksi eivät ole isomorfisia keskenään.

Ratkaisu: a) Kaikkien verkkojen astejono on $(3, 2, 2, 2, 2, 1)$ (riittää todeta tämä kuvaesityksen perusteella).

b) Osoitetaan, että A ja B eivät ole isomorfisia keskenään. Oletetaan, että $f\colon A \to B$ on isomorfismi ja johdetaan tästä ristiriita.

Verkossa A on tasan yksi piste, jonka aste on 3, kuvassa alla se on merkitty x:llä. Samoin verkossa B on tasan yksi piste, jonka aste on 3, kuvassa alla se on merkitty y:llä. Koska isomorfismi säilyttää pisteiden asteita, täytyy olla $f(x) = f(y)$.
Verkossa A pisteen x naapureille a, b, c pätee $d(a) = 1, d(b) = d(c) = 2$ (merkinnät kuten kuvassa alla). Koska isomorfismi kuvaa naapurit naapureiksi, $f(a), f(b), f(c)$ ovat pisteen y (eri) naapureita verkossa B. Isomorfismi säilyttää asteet, joten $d(f(a)) = d(a) = 1$ ja $d(f(b)) = d(b) = 2 = d(c) = d(f(c))$. Mutta verkossa B pisteellä y ei ole lainkaan naapureita, joiden aste olisi 1. Saatu ristiriita osoittaa sen, että f ei ole olemassa eli verkot eivät ole isomorfisia.

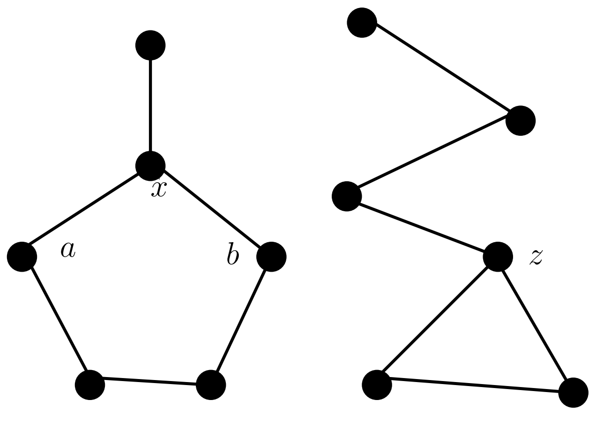
Lyhyemmin - pisteiden x ja y on vastaava isomorfismissa toisiaan, joten niiden naapureillakin on oltava samoja verkkoteorettisia ominaisuuksia, esim. asteet. Koska nämä eivät ole samoja, verkot eivät ole isomorfisia.



Verkko A Verkko B

Toinen tapa - kummassakin verkossa on tasan yksi piste, jonka aste on yksi, piste a verkossa A ja piste d verkossa B. Isomorfismin $f\colon A \to B$ on tällöin kuvattavaa $f(a) = d$, jolloin pisteen a ainoan naapurinkin on kuvauttuvaa pisteen d ainoaksi naapuriksi. Mutta pisteen a ainoalla naapurilla on aste kolme, kun taas ainoalla pisteen d naapurilla on aste kaksi. Tämä on ristiriita.

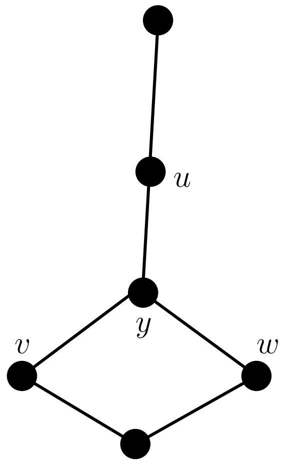
Seuraavaksi osoitetaan, että A ei ole isomorfinen verkon C kanssa. Se voidaan tehdä samalla periaattella kuin yllä. Tarkastellaan taas pisteitä, joiden aste on kolme, eli pistettä x verkossa A ja pistettä z (kts. kuva alla) verkossa C. Isomorfismille $f\colon A \to C$ on oltava $f(x) = z$, sillä kumpikin piste on verkkonsa ainoa piste, jonka aste on kolme. Tällöin x:n naapurit a, b, c kuvautuvat z:n naapureiksi. Mutta z:n jokaisen naapurin aste on 2, kun taas x:n naapurin a aste on 1.



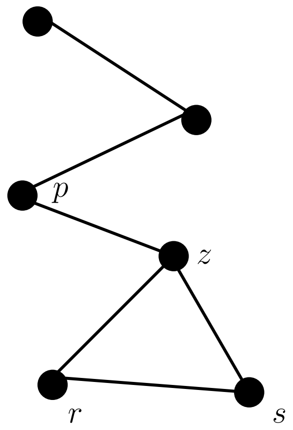
Verkko A Verkko C

Toinen tapa olisi huomata, että verkon A ainoan 1-asteisen pisteen ainoan naapurin aste on kolme, kun taas verkossa C ainoan 1-asteisen pisteen ainoan naapurin aste on kaksi.

Lopuksi osoitetaan, että verkot B ja C eivät ole isomorfisia. Tarkastellaan taas pisteitä $y \in P_B$ ja $z \in P_C$, jotka ovat vastaavasti verkon B ja verkon C ainoat pisteet, joiden asteet ovat kolme. Molemmilla on kummassakin verkossa kolme naapuria, joiden kaikkien asteet ovat 2. Verkossa B ne ovat u, v, w ja verkossa C pisteet p, r, s (kts. kuva alla). Koska kaikkien näiden pisteiden asteet ovat kaksi, tästä ei vielä saada suoraan ristiriitaa. Kuitenkin, verkossa B kaikki y:n naapurit u, v, w ovat toisistaan erillään, eli mitkään kaksi niistä eivät ole toistensa naapureita. Verkossa C taas pisteen z naapurit r ja s ovat toistensa naapureita.



Verkko B



Verkko C

Toinen tapa olisi taas tarkastella verkkojen pisteitä, joiden asteet ovat 1. Kummassakin verkossa tällaisia pisteitä on tasan yksi. Verkossa B tällaisella pisteellä on naapurin naapuri, jonka aste on 3 (y kuvassa). Verkossa C taas 1-asteisen pisteen ainoa naapurin naapuri on 2-asteinen.

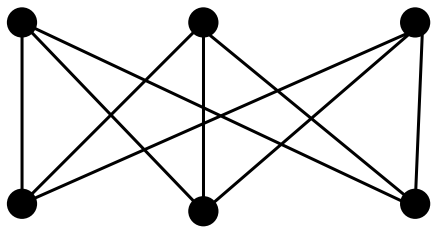
Huomautus: Vielä yksi lähestymistapa, joka on esiintynyt joissakin ratkaisuissa perustuu niin sanottujen *renkkaiden* bongaamiseen verkosta. n-renkaaksi verkossa G (tai n-sykliksi) sanotaan suljettuja ketjua $(x_0, \ldots, x_n)$ verkon G pisteitä, joku koostuu eri pisteistä, paitsi, että $x_0 = x_n$ (eli palataan alkupisteeseen) siten, että $\overline{x_i x_{i+1}} \in V_G$ kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$. Renkaita, joilla on sama vastaava viivojen joukko, ajatellaan samoiksi renkkaiksi (toisin sanoen syklin alkupisteen valinnalla ei ole merkitystä). n-renkaan pituus on n, eli siinä esiintyvien eri pisteiden lukumäärä, 3-rengas on *kolmio*, 4-rengas *neliö* jne. Renkaat ja niiden pituudet säilyvät isomorfismeissa.

Huomataan, että verkossa A on olemassa kolmio eli 3-rengas, verkossa B on neliö eli 4-rengas, verkossa C on viisikulmio eli 5-rengas, eikä muita renkaita verkoissa ole. Näin ollen verkon ainoan renkkaan pituus erottaa sen isomorfian mielessä muista kahdesta verkosta.

Kolmioista puhutaan myös tehtävien 4 ja 5 yhteydessä. Renkaista yleisesti puhutaan kurssilla myöhemmin, Junnilan monisteen luku III on omistettu kokonaan renkkaille. Renkkaan käsite liittyy myös *Eulerin kulkujen* olemassaolo-ongelmaan.

Tämän näkökulman huono puoli tässä vaiheessa on, että renkaan käsite ei ole käsitteellisesti niin yksinkertainen, kuin asteen käsite. Voidaan kysyä, mistä esimerkiksi tiedämme, että verkoista A, B, C ei löydy muita renkaita, kuin edellä mainittuja. Vaikka tämä on ”kuvasta ilmeistä”, tarkka perustelu voi olla hankala tai ainakin veisi enemmän aikaa ja paperitilaa, kuin asteiden perustuvassa ratkaisussa. Renkkaiden tarkasteluun perustuva ratkaisutapa on kuitenkin yhtä arvokas ja mielenkiintoinen näkökulma kuin mikä tahansa muu. Lisäksi se muuttuu selkeämäksi ja luonnollisemaksi silloin kun myöhemmin tiedämme renkkaiden teoriasta enemmän.

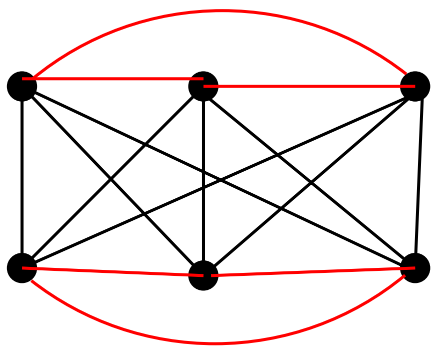
2. Piirrä seuraavassa kuvassa esitetyn verkon H komplementti $\tilde{H}$.



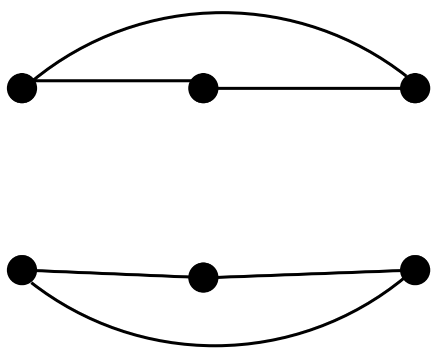
Verkko H

Ovatko verkot H ja $\tilde{H}$ isomorfisia?

Ratkaisu: Lisätään ”puuttuvia” yhteyksiä (kuvassa punaisena):

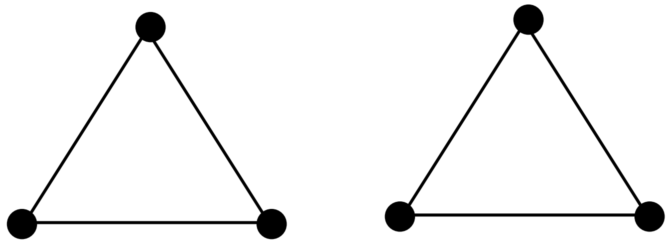


Tämän jälkeen poistetaan alkuperäisen verkon viivoja, saadaan komplementiksi seuraava verkko:



Huomautus: Komplementti voidaan muodostaa tietysti myös ”suoraan”, ilman, että ensin lisää alkuperäiseen verkkoon ”puuttuviä yhteyksiä”. Ehdotettu ratkaisutapa on vain yksi mahdollinen.

Saatu verkko voidaan piirtää myös seuraavalla tavalla:

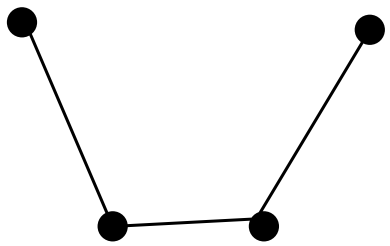


Komplementti $\tilde{H}$

Havainnollisesti verkon H komplementti $\tilde{H}$ on siis kahden "kolmion" erillinen yhdiste.

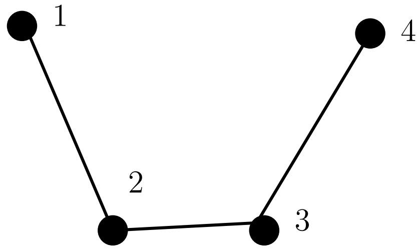
Verkot H ja $\tilde{H}$ eivät ole isomorfisia. Tämän voi nähdä hyvin monella tavalla. Esimerkiksi verkossa H jokaisen pisteen aste on kolme, kun taas verkossa $\tilde{H}$ jokaisen pisteen aste on kaksi. Verkoissa on eri määrä viivoja - verkossa H niitä on 9, kun taas verkossa $\tilde{H}$ - vain kuusi. Verkko $\tilde{H}$ sisältää "kolmioita", kun taas H:ssä ei ole kolmioita lainkaan (tämäkin vaatisi ehkä vähän tarkemmin perustelun - miksi verkossa H ei ole kolmioita?). Vielä yksi perustelu - verkko H on yhtenäinen, kun taas $\tilde{H}$ on selvästi epäyhtenäinen ja koostuu kahdesta erillisestä komponentista. Tämän ratkaisutavan ymmärtäminen toki edellyttää, että yhtenäisyyden käsite ja siihen liittyvät käsitteet ovat tuttuja (niistä kursilla puhutaan isomorfia-aiheen jälkeen ja käsitellään kunnolla seuraavissa laskareissa).

3. Osoita, että seuraavassa kuvassa esitetty verkko G on isomorfinen komplementinsa $\tilde{G}$ kanssa.



Verkko G

Ratkaisu: Nimitetään ensin verkon G solmut:



Verkko G

Tällöin G voidaan määritellä formaalisti parina (X, R), missä

$$X = P_G = \{1, 2, 3, 4\} = [4],$$

$$R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\}.$$

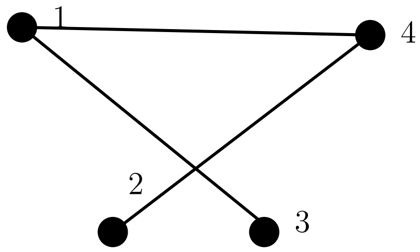
Vaihtoehtoisesti verkko G voidaan määritellä antamalla sen solmujen joukko $X = P_G = [4]$ ja sen *viivojen* joukko

$$V_G = \{\overline{12}, \overline{23}, \overline{34}\}.$$

(Muista - verkko G määräytyy täysin kun tunnetaan pari (P_G, V_G). Yleiselle suhteikolle tämä ei tietysti päde, yleisen suhteikon G sen sijaan määrää täysin pari (P_G, N_G)).

Verkon G formaali esitys toki ei ole välttämätön ratkaisun kannalta, tässä se on annettu selkeyden vuoksi. Lisäksi, kun myöhemmin konstruoidaan isomorfismi, verkon G formaali määritelmä helpottaa eksaktin todistuksen sille, että konstruoitu kuvaus todellakin on isomorfismi.

Muodostetaan verkon G komplementti $\tilde{G}$:



Verkko $\tilde{G}$

Formaalisti komplementti $\tilde{G}$ on pari $\tilde{G} = (X, R')$, missä

$$X = P_{\tilde{G}} = P_G = \{1, 2, 3, 4\} = [4],$$

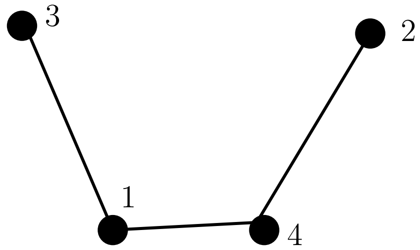
$$R = \{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (1, 4), (4, 1)\}.$$

Vaihtoehtoisesti verkko $\tilde{G}$ voidaan määritellä antamalla sen solmujen joukko $X = [4]$ ja sen *viivojen* joukko

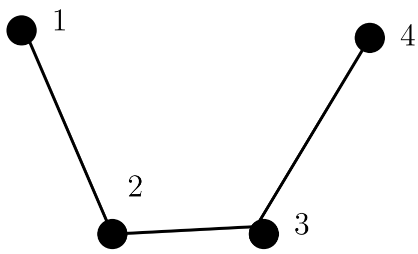
$$V_G = \{\overline{24}, \overline{41}, \overline{13}\}.$$

Huomautus: Formaalin määritelmän mukaan komplementin $\tilde{G}$ pistejoukko $P_{\tilde{G}}$ on täsmälleen sama kuin verkon G pistejoukko P_G. Näin ollen, jos verkon G solmuille on keksinyt joitakin nimityksiä, esimerkiksi $1, 2, 3, 4$, kuten ratkaisussa yllä, niin samat solmujen nimetykset on periaatteessa käytettävää myös komplementissa $\tilde{G}$. Hyvin monessa ratkaisussa G:n ja sen komplementin pisteille käytettiin eri nimityksiä. Jos niitä komplementin pisteitä haluaa nimetä uudella tavalla (esim. a, b, c, d) se on ok, kunhan kertoo eksplisittisesti mitkä uudet symbolit vastaavat mitäkin vanhoja. Muuten ei voida esim sanoa varmuudella, onko komplementti edes muodostettu oikein. Suositeltava on, että komplementin pisteille käytetään samoja nimityksiä kuin alkuperäisen verkon pisteille (näinhän se pitää olla, jos pysytään jyrkästi formaalissa määritelmässä).

"Vääntämällä" yllä konstruoitu kaavio komplementista $\tilde{G}$ eli liikkumalla pisteitä tasossa sopivasti, verkon $\tilde{G}$ geometrinen kaavio helposti saadaan verkon G näköiseksi:



Verkko $\tilde{G}$



Verkko G

Tästä nähdään, että kuvaus $f\colon P_G \to P_{G'}$, joka on määritelty ehdoilla

$$f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 2$$

on verkkojen välinen isomorfismi $f\colon G \to \tilde{G}$.

Katsotaan vielä, miten osoitetaan formaalisti, että tämä kuvaus todellakin on isomorfismi $f\colon G \to \tilde{G}$.

Verkko G määräytyy parilla (P_G, V_G), missä $P_G = [4]$ ja

$$V_G = \{\overline{12}, \overline{23}, \overline{34}\}.$$

Verkko $\tilde{G}$ taas määräytyy parilla $(P_{\tilde{G}}, V_{\tilde{G}})$, missä $P_{\tilde{G}} = [4] = P_G$ ja

$$V_{\tilde{G}} = \{\overline{31}, \overline{14}, \overline{42}\}.$$

Määritellään kuvaus $f\colon P_G \to P_{G'}$ ehdoillad

$$f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 2.$$

Tämä kuvaus on selvästi bijektio $[4] \to [4]$. Jos kaikista verkon G viivoista $\overline{xy}$ muodostetaan vastaavat viivat $\overline{f(x)f(y)}$ saadaan joukko viivoja

$$\{\overline{f(1)f(2)}, \overline{f(2)f(3)}, \overline{f(3)f(4)}\} = \{\overline{31}, \overline{14}, \overline{42}\}$$

mikä on *täsmälleen* verkon $\tilde{G}$ viivojen joukko $V_{\tilde{G}}$. Tästä seuraa, että

$$\overline{xy} \in V_G \text{ jos ja vain jos } \overline{f(x)f(y)} \in V_{\tilde{G}}.$$

Olemme näyttäneet, että f on isomorfismi.

Tärkeä Huomautus: Muista, että isomorfismin määritelmän mukaan f:n täytyy säilyttää viivat *molempiin suuntiin.* Näin ollen **ei riitä** tarkistaa, että jokaista lähtöpuolen G viivaa $\overline{xy}$ kohti maalipuolella on viiva $\overline{f(x)f(y)}$, vaan pitää myös tarkistaa, että maalipuolella ei ole muita viivoja, toisin sanoen myös toinen suunta - jos $\overline{f(x)f(y)} \in V_{\tilde{G}}$ niin $\overline{xy} \in V_G$. Tämä puuttuu hyvin monista ratkaisusta tai ei ainakaan ole selkeästi ilmaistu tai perusteltu.

Jos tarkistaa vain, että jokaista lähtöpuolen G viivaa $\overline{xy}$ kohti maalipuolella on viiva $\overline{f(x)f(y)}$, niin periaatteessa voi käydä niin, että maalipuolella eli verkossa G' on joitakin ”ylimääräisiä” viivoja, jolloin verkot eivät olekaan isomorfisia!

On totta, että näin ei voi käydä, jos a priori tiedetään, että kummassakin verkossa on sama määrä viivoja. Tämä on mainittu (ilman perustelua, joten on hyvä miettiä miksi tämä toimii!) materiaalissa ”Isomorfismit” sivulla 8. Jos haluaa vetoa tähän, niin se on selkeästi mainittava.

4. Sanomme, että verkossa G eri pisteet a, b, c muodostavat **kolmion** verkossa G, jos verkossa on viivat $\overline{ab}, \overline{ac}$ ja $\overline{bc}$.
   a) Olkoot a, b, c verkon G eri pisteitä. Osoita, että nämä pisteet muodostavat kolmion verkossa G jos ja vain jos näiden pisteiden virittämä verkon G aliverkko on täydellinen.
   b) Osoita, että verkon G piste a on jonkun kolmion piste jos ja vain jos pisteellä a on verkossa kaksi naapuria b, c, jotka ovat toistensa naapureita.
   c) Olkoon $f\colon G \to G'$ verkkojen välinen isomorfismi. Osoita, että jos verkon G pisteet a, b, c muodostavat kolmion verkossa G, niin verkon G' pisteet $f(a), f(b), f(c)$ muodostavat kolmion verkossa G'.

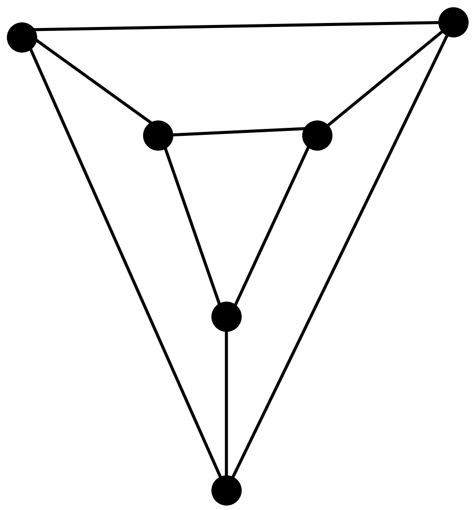
   Ratkaisu:
   a) Olkoon $H = G(A)$ pistejoukon $A = \{a, b, c\} \subset G$ virittämä aliverkko, missä a, b, c ovat verkon G eri pisteitä. Tällöin H sisältää täsmälleen ne viivat pisteiden a, b, c välillä, jotka löytyvät näiden pisteiden välillä verkossa G. Näin ollen pisteet a, b, c muodostavat kolmion verkossa G jos ja vain jos H:ssä on viivat $\overline{ab}, \overline{ac}$ ja $\overline{bc}$. Koska nämä ovat kaikki mahdolliset viivat H:n pisteiden välillä, ehto on yhtäpitävä sen kanssa, että H on täydellinen kolmen pisteen verkko.

   b) Oletetaan, että $a \in P_G$ muodostaa pisteiden $b, c \in P_G$ kanssa kolmion. Tällöin verkosta G löytyvät viivat $\overline{ab}$ ja $\overline{ac}$, joten b ja c ovat a:n naapureita. Lisäksi viiva $\overline{bc}$ on verkossa G, joten b ja c ovat toistensa naapureita. Näin ollen pisteellä a on verkossa kaksi naapuria b, c, jotka ovat toistensa naapureita.

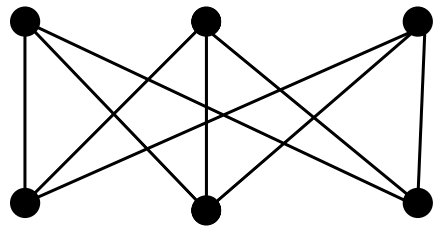
   Kääntäen oletetaan, että verkon G pisteellä a on verkossa kaksi naapuria b, c, jotka ovat toistensa naapureita. Tällöin, naapurin käsitteen määritelmän nojalla, verkossa on viivat $\overline{ab}, \overline{ac}$ ja $\overline{bc}$. Näin ollen a on erään verkon kolmion piste.

   c) Koska pisteet a, b, c muodostavat **kolmion** verkossa G, verkossa G on viivat $\overline{ab}, \overline{ac}$ ja $\overline{bc}$.
   Koska f on isomorfismi, tästä seuraa, että verkossa G' on viivat $\overline{f(a)f(b)}, \overline{f(a)f(c)}$ ja $\overline{f(b)f(c)}$. Lisäksi, koska f on injektio, pisteet $f(a), f(b), f(c)$ ovat kaikki eri pisteitä. Näin ollen pisteet $f(a), f(b), f(c)$ muodostavat kolmion verkossa G'.

5. Osoita, että kuvassa alla esitetyt verkot G ja G' eivät ole isomorfisia.



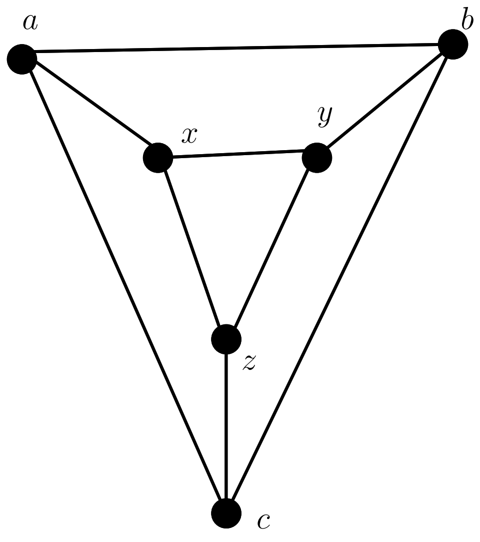
Verkko G



Verkko G'

Ratkaisu: Kummassakin verkossa on 6 pistettä ja jokaisen pisteen aste on 3. Verkoilla on siis sama astejono $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

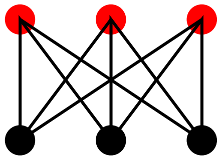
Näytetään, että verkot eivät kuitenkaan ole isomorfisia. Yksi tapa on käyttää edellisen tehtävän c)-kohta hyväksi. Helposti nähdään, että verkossa G **jokainen** piste on jonkun kolmion piste. Nimittäin (merkinnät kuten kuvassa alla) pisteet a, b, c muodostavat kolmion ja pisteet x, y, z muodostavat kolmion.



Verkossa G' taas mikään piste ei ole kolmion osa. Tämän näkee helpoiten käyttämällä edellisen tehtävän kohtaa b) - jos otetaan mikä tahansa verkon G' piste, niin sen naapurit (joita on aina kolme kappaletta) eivät koskaan ole yhteydessä toisiinsa.

Näin ollen G ja G' eivät voi olla isomorfisia.

Huomautus 1: Verkko G' on niin sanottu *kaksijakoinen verkko*, itse asiassa täydellinen kaksijakoinen verkko $K_{3,3}$, kuten seuraavasta värityksestä voidaan havaita (kaksijakoisista verkkoista puhutaan myöhemmin Hamiltonin kulkujen yhteydessä):



Kaksijakoisuus tarkoittaa sitä, että verkon pisteet voidaan värittää kahdella eri värillä, niin, että naapurit eivät koskaan ole samanvärisiä.

Koska kolmio on käytännössä sama asia kuin 3-sykli, Lauseesta III 2.8. seuraa, että G' ei voi sisältää kolmioita. Verkko G sen sijaan ei ole kaksijakoinen, juuri siitä syystä, että se sisältää ainakin yhden 3-syklin (Lause III 2.8. taas).

Näin ollen, toinen tapa perustella, että G ja G' eivät ole isomorfisia olisi vedota suoraan siihen, että toinen verkoista on kaksijakoinen ja toinen ei ole (kuten kaikki verkkoteorettiset ominaisuudet kaksijakoisuus säilyy isomorfismeissa). Tämä tietysti edellyttää sen, että kaksijakoisten verkkojen teoria on tuttu (joten tähän huomautukseen kannattaa palata myöhemmin, jos se kuulostaa nyt heprealta).

6. Osoita, että isomorfiaa vaille on olemassa tasan kaksi sellaista verkkoa, jossa on 6 pistettä ja 13 viivaa. Piirrä esimerkki kummastakin tyypistä.

7. Osoita, että isomorfiaa vaille on olemassa tasan kaksi sellaista verkkoa, jossa on 6 pistettä ja 13 viivaa. Piirrä esimerkki kummastakin tyypistä.

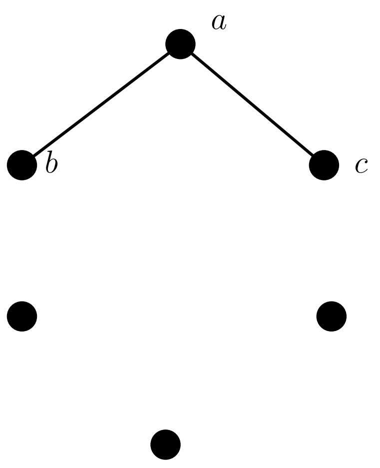
Ratkaisu: Täydellisessä kuuden pisteen verkossa K_6 on

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

viivaa. Tästä seuraa, että jos G on verkko, jossa on 6 pistettä ja 13 viivaa, sen komplementissa $\tilde{G}$ on $15 - 13 = 2$ viivaa. Koska $G_1 \approx G_2$ pätee jos ja vain jos $\tilde{G_1} \approx \tilde{G_2}$, riittää osoittaa, että isomorfiaa vaille on olemassa tasan kaksi sellaista verkkoa, jossa on 6 pistettä ja 2 viivaa.

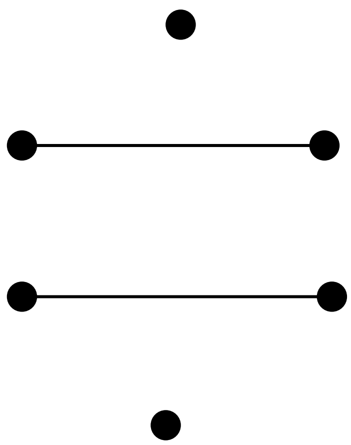
Tämä on helppoa. Nimittäin olkoot $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ tällaisen verkon ainoat kaksi viivaa. Tällöin on olemassa kaksi vaihtoehtoa:

<u>Vaihtoehto 1</u>: Viivat $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ ”leikkaavat” eli niillä on tasan yksi yhteinen päätepiste. Olkoon tämä yhteinen päätepiste a, tällöin $\mathbf{v}_1 = \overline{ab}$ ja $\mathbf{v}_2 = \overline{ac}$, missä $b \neq c$. Verkko tällöin näyttää seuraavanlaiselta:



Verkko H_1

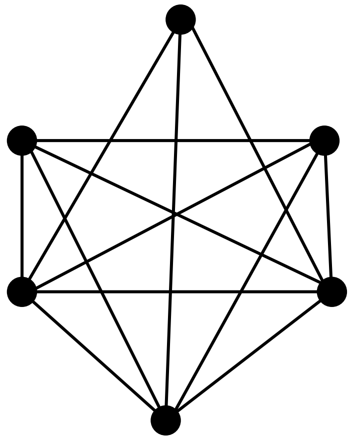
<u>Vaihtoehto 2</u>: Viivat $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ ovat "erillisiä" eli niillä ei ole yhteisiä päätepisteitä. Tällöin verkko näyttää seuraavanlaiselta:



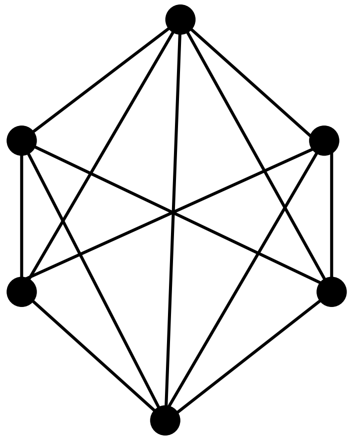
Verkko H_2

Verkot H_1 ja H_2 eivät ole isomorfisia - esimerkiksi siitä syystä, että verkossa H_1 on piste, jonka aste on 2 (piste a kuvassa), kun taas verkossa H_2 tällaista pistettä ei ole.

Siirtymällä komplementteihin saadaan ainoat isomorfiaa vaille erilaiset kuuden pisteen ja 13 viivan verkot $G_1 = \tilde{H}_1$ ja $G_2 = \tilde{H}_2$:



Verkko G_1



Verkko G_2

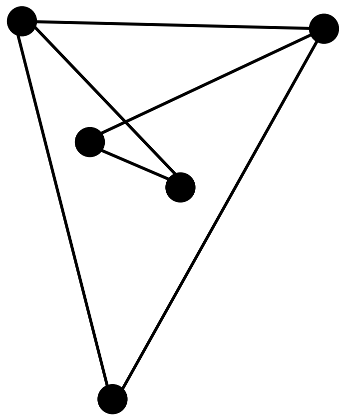
Verkon G_1 astejono on $(5, 5, 5, 4, 4, 4, 3)$ ja verkon G_2 astejono on $(5, 5, 5, 4, 4, 4, 3)$.

Huomautus 1: Tehtävä voidaan ratkaista myös käyttämättä komplementteja ”suoraan”, mutta se on vaikeata. Esimerkiksi käyttämällä sitä, että kuuden pisteen verkon jokaisen pisteen aste on korkeintaan 5 ja yhtälöä

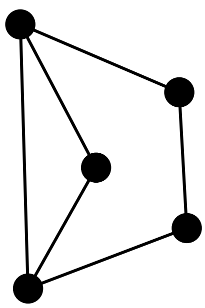
$$\sum_{x \in P_G} d(x) = 2 \cdot 13 = 26,$$

voidaan osoittaa (käymällä läpi mahdollisia vaihtoehtoja, tämä tietysti vaatii analyysia ja perusteluja), että 6 pisteen ja 13 viivan verkon ainoat mahdolliset astejonot ovat $(5, 5, 5, 4, 4, 4, 3)$ ja $(5, 5, 4, 4, 4, 4)$. Tästä ei vielä suoraan seuraa, että ollaan valmiit - kuten esimerkkien kautta olemme oppineet, **astejono ei välttämättä määrä verkko yksikäsitteisesti isomorfiaa vaille** vaan ei-isomorfisilla verkoilla voi olla sama astejono. Näin ollen seuraavaksi pitää vielä osoittaa, että tässä tapauksessa kumpikin kahdesta mahdollisesta astejonosta vastaa täsmälleen yhtä verkkoa (isomorfiaa vaille).

8. Osoita, että kuvassa alla esitetyt verkot G ja G' ovat isomorfisia keskenään.



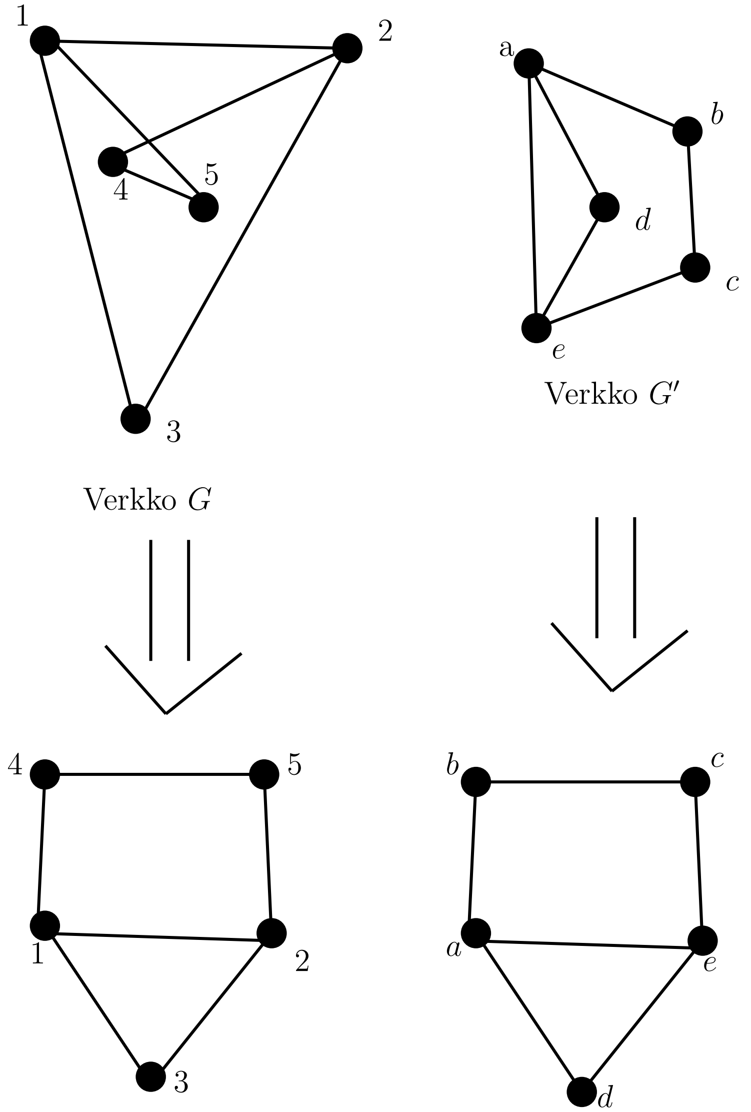
Verkko G



Verkko G'

Kuva 3

Ratkaisu: Yksi toimiva tapa on yksinkertaisesti huomata, että liikkumalla molemman kaavion pisteitä sopivasti saadaan molemmasta verkosta samannäköisiä:



Sen jälkeen on selvää, että esimerkiksi kuvaus $f\colon P_G \to P_{G'}$, joka on määritelty ehdoilla (merkinnät kuten kuvassa yllä)

$$f(1) = a, f(2) = e, f(3) = d, f(4) = b, f(5) = c$$

on isomorfismi. Sen jälkeen kun kuvauksen keksii, voi vielä perustella täsmällisesti, että se todellakin on isomorfismi. Siinä pitää taas muistaa, että on tarkistettava isomorfisuuden määritelmän **molemmat suunnat**. Käytännössä toimiva tapa on seuraava. Ensinnäkin f on bijektio. Huomataan, että verkon G viivojen joukko on tasan

$$V_G = \{\overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{45}\}.$$

Muodostetaan tämän joukon alkioiden "kuvia" kuvauksen f suhteen:

$$\{\overline{f(1)f(2)}, \overline{f(1)f(3)}, \overline{f(1)f(4)}, \overline{f(2)f(3)}, \overline{f(2)f(5)}, \overline{f(4)f(5)}\} = \{\overline{ae}, \overline{ad}, \overline{ab}, \overline{ed}, \overline{ec}, \overline{bc}\}.$$

Huomataan, että tämähän on *täsmälleen* verkon G' viivojen joukko $V_{G'}$.

HUOM Verkkojen G ja G' välillä on muitakin isomorfismia, esimerkiksi kuvaus $g\colon P_G \to P_{G'}$, joka on määritelty ehdoilla (merkinnät kuten kuvassa yllä)

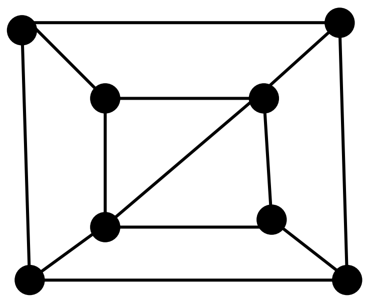
$$g(1) = e, g(2) = a, g(3) = d, g(4) = c, g(5) = b.$$

Itse asiassa ei ole vaikeata nähdä, että f ja g ovat *ainoat* isomorfismit verkkojen G ja G' välillä.

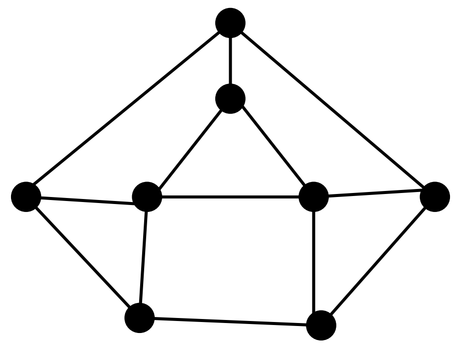
Tämän väitteen todistuksen idea: pisteet 3 ja d ovat verkkojensa ainoat kaksiasteiset pisteet, jolla on kaksi kolmeasteista naapuria, joten isomorfismi kuvaa 3 d:ksi. Sen jälkeen pisteen 3 naapurit $1, 2$ kuvautuvat pisteille a, e. Kun valitaan tapa kuvata 1 (a:lle tai e:lle), kuvaus määräytyy sen jälkeen yksikäsitteisesti.

Tehtävän ratkaisussa riittää tietysti antaa vain toinen näistä isomorfismeista.

9. Tutki ovatko kuvassa alla esitetyt verkot G, G' isomorfisia.



Verkko G



Verkko G'

Ratkaisu: Eräs tapa tutkia asiaa on verrata verkkojen pisteitä, joiden aste on 4. Kummassakin verkossa on tasan kaksi tällaista pistettä. Verkossa G näillä pisteillä on kaksi yhteistä naapuria, kun taas verkossa G' tällaisilla pisteillä on vain yksi yhteinen naapuri. Näin ollen verkot eivät voi olla isomorfisia.

Toinen suosittu ratkaisutapa, joka esiintyi monissa ratkaisuissa perustui verkon "kolmioiden" lukumäärän laskemiseen - verkon G sisältää löytyy tasan kaksi erilaista kolmiota (kts. teht. 4), kun taas verkko G' sisältää tasan kolme erilaista kolmiota. Tämä on erittäin arvokas ja tärkeä lähestysmitapa, se on kuitenkin käsittellisesti hieman vaikeampi kuin asteiden analyysiin perustuva ratkaisu. Esimerkiksi voidaan kysyä mistä me tiedetään, että mikään kolmio ei jäänyt vahingossa huomaamatta. Toisin sanoen tämä ratkaisutapa on vaikeampaa "puolustaa" ja perustella täysin toimivaksi. Tämä ei kuitenkaan tarkoita, että tällaisia ratkaisutapoja ja näkökulmia ei saisi pitää mielessä, päinvastoin! "Reaalielämässä" (esim. tieteellisessä tutkimuksessa) tällaisista argumenteista voi olla suuri hyöty.