Verkot, syksy 2015
Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Laskuharjoitus 2.
Ratkaisuehdotukset.

1. Olkoon $G = ([9], R)$, missä

$$R = \{(x,y) \in [6]\times[6] \mid y \text{ on jaollinen } x\text{:llä ja } y \neq x\} \cup \{(x,y) \in [9]\times[9] \mid |x-y| \leqslant 1, 6 \leqslant y \leqslant 9\}.$$

Piirrä suhteikko G geometrisen kaavion muodossa. Muodosta jokaisen suhteikon pisteen seuraajaluettelo. Onko G verkko? Onko G yksisuuntainen suhteikko? Onko G täydellinen suhteikko?

Ratkaisu: Kirjotetaan näkyviin relaatio listana sen alkioista, vaikka tätä ei pyydetty (auttaa hahmotamista). Nyt

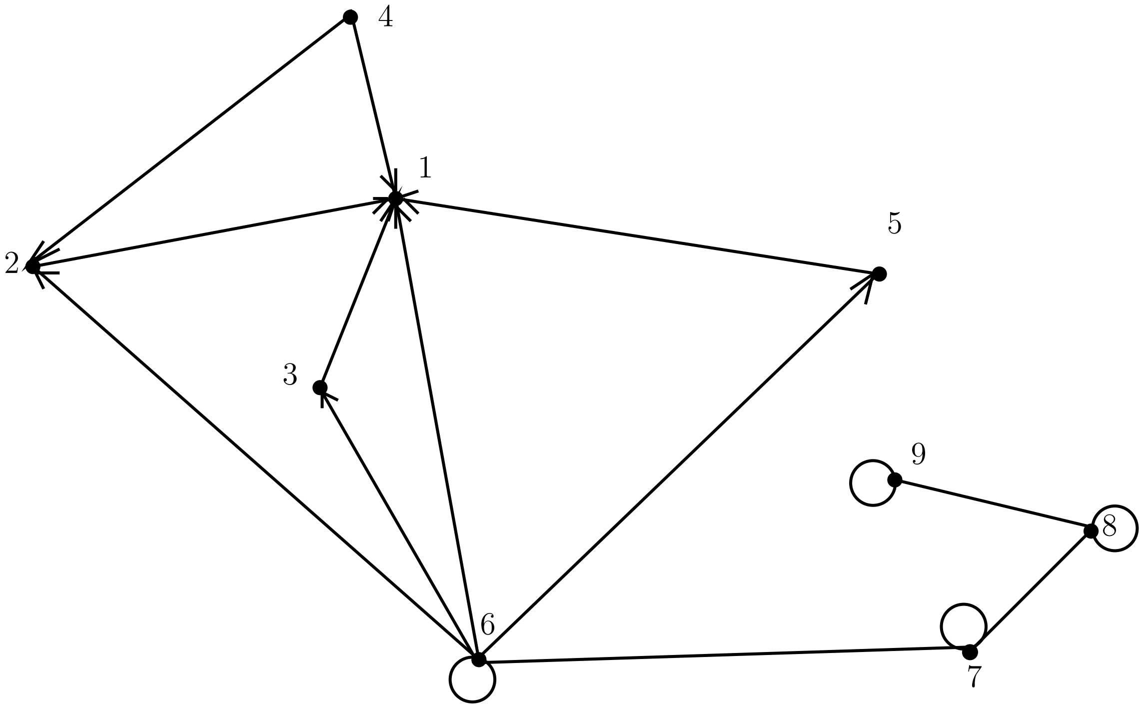
$$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,6),(3,6),(5,6),(6,6),(7,6),(6,7),(7,7),(8,7),$$
$$(7,8),(8,8),(9,8),(8,9),(9,9)\}.$$

Muistutus: Tämän kurssin sopimusten mukaisesti suhteikossa $G = (X, R)$ piste $x \in X$ on pisteen $y \in X$ seuraaja jos ja vain jos $(x,y) \in R$. Tämä on evivalenttia sen kanssa, että yRx ja myös sen kanssa, että $\overrightarrow{yx}$ on suhteikon nuoli. Voidaan myös sanoa, että pisteen y seuraajat ovat alkukuvan $R^{-1}(x)$ alkioita.

Suhteikon alkioiden seuraajaluettelot:

$$\begin{aligned}
1 &: \\
2 &: \; 1 \\
3 &: \; 1 \\
4 &: \; 1,2 \\
5 &: \; 1 \\
6 &: \; 1,2,3,5,6,7 \\
7 &: \; 6,7,8 \\
8 &: \; 7,8,9 \\
9 &: \; 8,9
\end{aligned}$$

Eräs tapa esittää suhteikko kaavion muodossa:



G ei ole verkko kahdesta syystä - siinä on silmukoita (esimerkiksi silmukka $\overrightarrow{66}$) ja sen relaatio ei ole symmetrinen (esimerkiksi $(1,2) \in R$, mutta $(2,1) \notin R$). *Riittää, tietysti, mainita jompikumpi perustelu.*

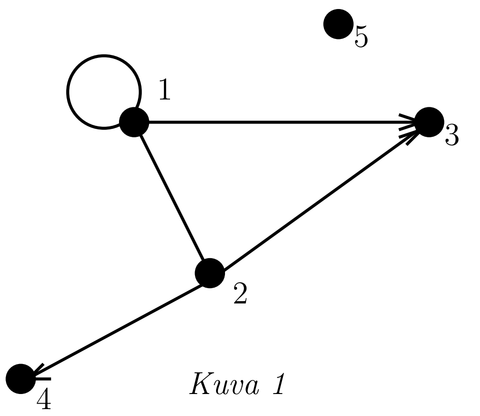
G ei ole yksisuuntainen, koska sen relaatio ei ole antisymmetrinen - esimerkiksi $(6,7)$ ja $(7,6)$ kumpikin kuuluvat suhteikon relaatioon, mutta $6 \neq 7$.

G ei ole täydellinen suhteikko, sillä on olemassa $x, y \in P_G$, $x \neq y$, joille kumpikin nuolista $\overrightarrow{xy}$, $\overrightarrow{yx}$ ei kuulu suhteikon nuolten joukkoon. Esimerkiksi $(1,7) \notin R$ ja $(7,1) \notin R$.

Yleiset virheet:

- Tulkitaan nuolten suunnat väärinpäin, esim. piirretään kaavioon nuoli $\overrightarrow{12}$ eikä $\overrightarrow{21}$.
- Sekoitetaan seuraajat ja edeltäjät keskenään, minkä seurauksena annetaan "edeltäjäluettelot" seuraajaluettelojen sijasta.
- Unohdetaan sulmukoista tai keksitään turhia silmukoita.
- Vastataan kysymykseen "onko G täydellinen **verkko**", vaikka tätä ei kysytty, kysytty onko se täydellinen **suhteikko**.

2. Kuvassa 1 alla on esitetty eräs suhteikko G geometrisen kaavion muodossa.



Kuva 1

a) Anna suhteikolle G formaali määritelmä muodossa (X, R). Toisin sanoen esitä solmujen joukko X ja relaatio R joukkoina.
b) Esitä suhteikon nuolten joukko N_G joukko-opillisessa muodossa **käyttämättä** yhdellekään nuolille merkintää $\overrightarrow{xy}$.
c) Esitä suhteikon viivojen joukko V_G joukko-opillisessa muodossa **käyttämättä** yhdellekään viivalle merkintää $\overline{xy}$.
d) Laske suhteikon G jokaisen pisteen tulo-ja lähtöasteet. Verifioi suoraan laskemalla, että Lemman II 2.1.(Junnila) väite on tosi suhteikossa G.

Ratkaisu: Kuvasta luetaan, että suhteikon solmujen joukko on

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ja relaatio on

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}.$$

Muista, että nuoli pisteestä x pisteseen y vastaa relaatiossa paria (y, x), ei toisinpäin! Esimerkiksi, koska kuvassa on nuoli pisteestä 2 pisteseen 3, relaatiossa R sitä vastaa piste $(3, 2)$ (ei $(2, 3)$).

Koska kaaviossa on piirretty viiva pisteiden 1 ja 2 välillä, sitä vastavat nuolet $\overrightarrow{21}$ ja $\overrightarrow{12}$, joten relaatiossa on pisteet $(1, 2)$ ja $(2, 1)$. Pari $(1, 1)$ vastaa silmukkaa pisteessä 1.

b) Jos nuolille käytetään merkintää $\overrightarrow{xy}$, niin nuolten joukko N_G voidaan esittää seuraavasti:

$$N_G = \{\overrightarrow{11}, \overrightarrow{21}, \overrightarrow{12}, \overrightarrow{13}, \overrightarrow{23}, \overrightarrow{24}\}.$$

Tehtävässä kuitenkin pyydettiin olla käyttämättä tällaista merkintää nuolille, joten korvaataan se joukko-opillisella määritelmällä

$$\overrightarrow{xy} = \{(y, x)\}.$$

Muista, että formaalin määritelmän mukaan nuoli $\overrightarrow{xy}$ **ei ole pari** (y, x), vaan on joukko, jonka ainoana alkiona on tämä pari!
Tästä saadaan

$$N_G = \{\{(1, 1)\}, \{(1, 2)\}, \{(2, 1)\}, \{(3, 1)\}, \{(3, 2)\}, \{(4, 2)\}\}.$$

Toisin sanoen joukko-opillinen esitys nuolten joukolle N_G saadaan relaation R joukko-opillisesta esityksestä laittamalla jokaisen alkion ympärille ”joukko”-sulut $\{\}$.

c) Suhteikossa on kaksi viivaa - viiva $\overline{12}$ ja viiva $\overline{11}$ (jokainen silmukka on myös viiva!). Kaivamalla esille viivan formaali joukko-opillinen määritelmä

$$\overline{xy} = \{(x, y), (y, x)\}$$

nähdään, että

$$V_G = \{\{(1, 1)\}, \{(1, 2), (2, 1)\}\}.$$

Huomaa, että silmukka $\overline{11}$ on viivana määritelmän mukaan joukko $\{(1, 1), (1, 1)\}$, mutta tämä on sama asia kuin joukko $\{(1, 1)\}$ (saman alkion toisto ei muuta joukkoa).

Yleiset virheet kohdissa a)-c):

- Yleisin virhe on se, että ei nähdä eroa relaation parin (x, y) ja vastaavan nuolen $\{(x, y)\}$ välillä. Tällöin joukot N_G (suhteikon nuolten joukko) ja R (suhteikon relaatio) näyttävät vastauksessa täsmälleen samoilta, mutta tämä on siis väärin. Relaatio koostuu joukkona järjestetyistä pareista, nuolten joukko taas nuolista. Jokainen nuoli on yksiö $\{(x, y)\}$, ei sen ainoa alkio eli järjestetty pari (x, y). Joukot N_G ja R ovat eri joukkoja (vaikka niiden välillä on selvä ja yksinkertainen yhteys).
- Samoin viivojen joukko **ei ole** vaan lista pareista, jotka vastaavat viivoja (esim. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ ei ole viivojen joukko).
- Monissa ratkaisuissa nuolten joukosta puutui kokonaan viivan $\overline{12}$ takana "piilossa olevat" nuolet eli nuolet $\overrightarrow{21}, \overrightarrow{12}$. Tämä on väärin - viiva koostuu kahdesta nuolista ja jokaisen viivan takana "kätketyt" nuolet ovat myös suhteikon nuolia! Vaikka nämä nuolet esiintyvät myös viivan osana, se ei tarkoita sitä, että niitä ei lasketa suhteikon nuoleiksi.
- Myös silmukka on aina erityisesti suhteikon nuoli.
- Silmukka on myös viiva. Itse asiassa nuoli ja viiva ovat täsmälleen sama asia (joukkona) silloin, kun kumpikin on silmukka.

d) Tuloasteet (muistutus: pisteen tuloaste on pisteseen saapuvien nuolten lukumäärä):

$$d_+(1) = 2, d_+(2) = 1, d_+(3) = 2, d_+(4) = 1, d_+(5) = 0.$$

Tässä täytyy olla erityisesti tarkkana silmukkojen ja viivojen kanssa - vaikka pisteseen 1 ei vie yhtään "nuolenpäätä" kuvassa, yksi nuoli pisteseen 1 on "kätketty" viivassa $\overline{12}$ ja toinen - silmukassa $\overline{11}$. Niitä täyttyy muistaa ottaa huomioon asteita laskiessa.

Lähtöasteet (muistutus: pisteen lähtöaste on pisteestä lähtevien nuolten lukumäärä):

$$d_-(1) = 3, d_-(2) = 3, d_-(3) = d_-(4) = d_-(5) = 0.$$

Tässäkin täytyy muistaa ottaa huomioon silmukat ja viivat.

Laskemalla nähdään, että

$$d_+(1) + d_+(2) + d_+(3) + d_+(4) + d_+(5) = 6 = d_-(1) + d_-(2) + d_-(3) + d_-(4) + d_-(5).$$

Suhteikossa on tasan 6 nuolta. Näin ollen Lemman II 2.1. väite on tosi suhteikossa G, kuten pitääkin olla (huom. tällaisia "triviaaleja" laskuja voi käyttää esim. tapana *tarkistaa* jälkikäteen, että kaikki asteet ovat varmasti laskettu oikein).

3. Jatkoa edelliselle tehtävälle.
a) Muodosta Kuvassa 1 esitetyn suhteikon G jokaisen pisteen seuraajaluettelo.
b) Muodosta suhteikon G yhteysmatriisi.
Käytä solmuille "luonnollista järjestystä" $1, 2, \ldots, 5$.
c) Onko suhteikon G insidenssimatriisi määritelty? Jos on, muodosta se, jos ei ole, selitä miksi.

Ratkaisu:
a) Seuraajaluettelot:

$$\begin{aligned} 1 &: \ 1, 2, 3 \\ 2 &: \ 1, 3, 4 \\ 3 &: \\ 4 &: \\ 5 &: \end{aligned}$$

Pisteiden $3, 4$ ja 5 seuraajaluettelo on *tyhjä* koska näillä pisteillä ei ole suhteikossa seuraajia.

Muista, että väite "solmu y on solmun x seuraaja"tarkoittaa sitä, että suhteikossa on nuoli $\overrightarrow{xy}$, mikä taas suhteikon relaation kielellä tarkoittaa sitä, että $(y, x) \in R$. Toisin sanoen pisteen x seuraajaluettelossa luetellaan alkukuvan $R^{-1}(x)$ alkioita.

Koska tässä tapauksessa meillä on käytössä suhteikon kuva (annettu edellisen tehtävän tehtävänannon yhteydessä), seuraajien määrittäminen onnistuu helpoiten katsomalla kuvasta - piste y on pisteen x seuraaja, jos x:stä vie kuvassa nuoli y:hyn. Tällöin täytyy muistaa ottaa huomioon viivassa kätkettyjä nuolia (sekä mahdollisia silmukkoja).

b) Palautetaan mieleen, että suhteikon relaatio on

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}.$$

Yhteysmatriisia muodostaessa käydään läpi relaation alkioita, relaation alkiota (x, y) vastaa tällöin ykkönen rivin x ja sarakkeen y leikkauskohdassa.

Yhteysmatriisi:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Yleinen virhe: Monissa ratkaisussa vastauksena annettu yhteysmatriisi oli oikean matriisin "transpoosi" eli siinä oli väärinpäin rivit ja sarakkeet.

c) Insidenssimatriisi suhteikolle ei ole määritelty, koska suhteikko sisältää silmukoita (insidenssimatriisi on määritelty tasan silloin kun suhteikko on silmukaton).

4. Olkoon $G = (X, R)$, missä $X = [4]$ ja

$$R = \{(x, y) \in [4] \times [4] \mid x \text{ on jaollinen } y\text{:llä}, x \neq y\} \cup \{(2, 4)\}.$$

Numeroi suhteikon nuolet jossakin järjestyksessä. Totea, että suhteikon G insidenssimatriisi on määritelty ja esitä suhteikon insidenssimatriisi. Käytä solmuille ”luonnollista järjestystä” $1, 2, 3, 4$ ja nuolille yllä määriteltyäsi järjestystä.

Ratkaisu:
Suhteikon relaatio (alkioiden listana esitettynä) on

$$R = \{(2, 1), (3, 1), (4, 2), (2, 4), (4, 1)\},$$

joten suhteikon nuolet ovat $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{12}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{13}$, $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{24}$, $\mathbf{e}_4 = \overrightarrow{42}$, $\mathbf{e}_5 = \overrightarrow{14}$. Käytetään tässä ratkaisussa tätä nuolten järjestystä (omasta ratkaisussasi saatat käytä toista järjestystä nuolille). Tämän järjestyksen suhteen insidenssimatriisi on matriisi

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

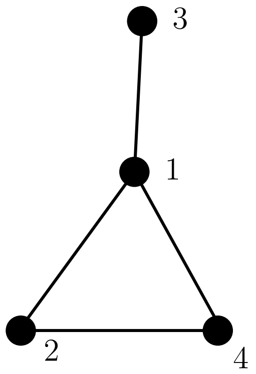
(Huom., ei ole väliä mikä järjestys nuolille valitaan, kunhan valitaan joku ja selkeästi määritellään tämä järjestys ratkaisussa).

Huomautus: Tässäkin on tärkeätä muistaa, että suhteikon viivaa $\overline{24}$ vastaa kaksi nuolta ja kummallakin on oltava oma sarakkeensa insidenssimatriisissa! Joissakin ratkaisuissa niitä ei huomioitu matriisissa lainkaan, ”koska se on viiva, ei nuoli”. Tämä on väärin. Matriisilla on oltava tasan 5 saraketta, koska suhteikolla on tasan 5 nuolta.

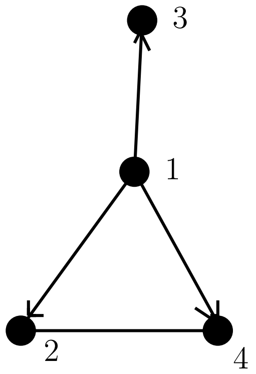
5. Jatkoa edelliselle tehtävälle. Olkoon G kuten edellisessä tehtävässä. Tarkastellaan suhteikon G symmetristä sulkeumaa G^s.
a) Miksi G^s on verkko?
b) Piirrä geometrinen kaavio verkosta G^s. Esitä sen jälkeen verkon G^s verkkoinsidenssimatriisi jonkun viivojen järjestyksen suhteen (jonka saat määritellä itse vapaasti).
c) Esitä verkon G^s astejono. Mikä on G^s:n pisteiden asteiden summa? Kuinka monen pisteen aste on pariton? Ovatko tulokset sopusoinnissa Lemman II 2.3. sekä Kättelylemman kanssa?

Ratkaisu:
a) Symmetrinen sulkeuma G^s on aina symmetrinen suhteikko. Se on verkko, jos ja vain jos se ei sisällä silmukoita. Koska suhteikko G ei sisällä silmukoita, myös G^s ei sisällä silmukoita. Toisin sanoen G^s on verkko.

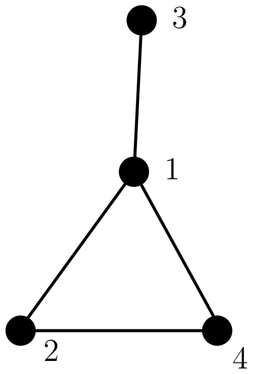
b) Koska suhteikko G (kts. edellisen tehtävän ratkaisua) sisältää nuolet $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{12}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{13}$, $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{24}$, $\mathbf{e}_4 = \overrightarrow{42}$, $\mathbf{e}_5 = \overrightarrow{14}$, verkon G^s viivat ovat $\overline{12}$, $\overline{13}$, $\overline{24}$, $\overline{14}$. Verkon G^s pistejoukko on $X_G = \{1, 2, 3, 4\}$. Nyt voidaan piirtää kuva verkosta:



Toinen tapa - piirretään ensin kaavio suhteikosta G ja sitten ”muutetaan kaikki nuolet viivoiksi”:



Suhteikko G



Verkko G^s

Esitetään vielä verkon G^s verkkoinsidenssimatriisi. Sitä varten numeroidaan verkon viivat esimerkiksi seuraavalla tavalla: $\mathbf{e}_1 = \overline{12}$, $\mathbf{e}_2 = \overline{13}$, $\mathbf{e}_3 = \overline{24}$, $\mathbf{e}_4 = \overline{14}$ (huom., ei ole väliä mikä järjestys viivoille valitaan, kunhan valitaan joku ja selkeästi määritellään tämä järjestys ratkaisussa). Verkon verkkoinsidenssimatriisi tämän järjestyksen suhteen on

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Yleinen virhe: Annetaan G:n insidenssimatriisi suhteikkona, eli sellainen, jossa sarakkeet vastaavat nuolia. Tässä on kuitenkin pyydetty *verkko*insidenssimatriisi, joka on eri asia kuin pelkkä insidenssimatriisi (ja määritelty vain verkoille).

c) Verkon G^s astejono on $(3, 2, 2, 1)$. Asteiden summa $3 + 2 + 2 + 1 = 8 = 2 \cdot 4$ on kaksi kertaa viivojen lukumäärä (joita on neljä). Tasan kahden pisteen aste on pariton. Tulokset ovat sopusoinnissa Lemman II 2.3. ja Kättelylemman (Seuraus II 2.7) kanssa.

Yleisesti esiintyvä puute ratkaisussa: Lemmna II 2.3. verifiointi ei tarkoita ainoastaan sitä, että tarkistetaan, onko asteiden summa parillinen. Lemma II 2.3. sanoo enemmän - sen mukaan tämä asteiden summa on sama kuin kaksi kertaa viivojen lukumäärä.

6. Olkoon $G = (X, R)$ kuten kahdessa edellisissä tehtävissä,

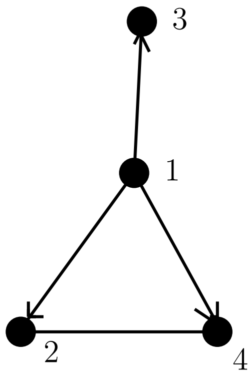
$$R = \{(x, y) \in [4] \times [4] \mid x \text{ on jaollinen } y\text{:llä}, x \neq y\} \cup \{(2, 4)\}.$$

a) Anna kolme erilaista esimerkkiä sellaisesta suhteikon G alisuhteikosta H, jonka solmujen joukko on $\{1, 2, 4\}$ ja joka on yksisuuntainen suhteikkona. Kaavio-esitys jokaisesta esimerkistä riittää.
b) Olkoon H_1 pistejoukon $\{1, 2, 3\}$ virittämä suhteikon G alisuhteikko. Olkoon H_2 nuolijoukon

$$\{\overrightarrow{24}, \overrightarrow{12}\}$$

virittämä suhteikon G alisuhteikko. Piirrä H_1, H_2 ja yhdiste $H_1 \bigvee H_2$. Onko yhdiste $H_1 \bigvee H_2$ pistejoukkonsa virittämä alisuhteikko? Miksi/miksi ei?

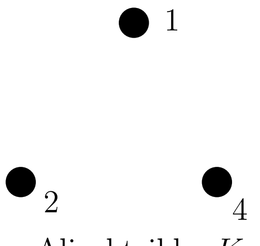
Ratkaisu: Piirretään ensin kaavio suhteikosta G (ei ole pakko, mutta helpottaa tilanteen hahmottamista).



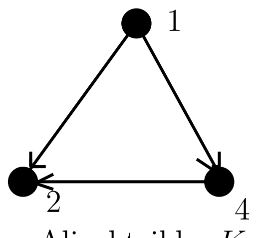
Suhteikko G

a) Kuvassa alla on esitetty kuusi esimerkkejä suhteikon G alisuhteikoista, joiden solmujoukko on $\{1, 2, 4\}$ ja jotka ovat yksisuuntaisia (tehtävässä pyydetty vain kolme). Nämä eivät ole kaikki mahdolliset esimerkit, joten jos sinun esimerkki ei esiinny näiden joukossa, se ei vielä tarkoita sitö, että sinun esimerkki ei olisi korrekti.

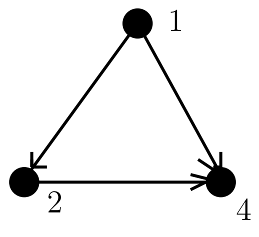
Huomaa, että yksisuuntaisuuden ehto tarkoittaa käytännössä sitä, että alisuhteikko ei saa sisältää **molempia** nuolia $\overrightarrow{24}$ ja $\overrightarrow{42}$ eli ei voi sisältää kokonaisen viivan $\overline{24}$.



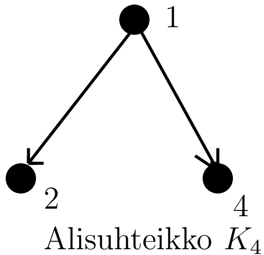
Alisuhteikko K_1



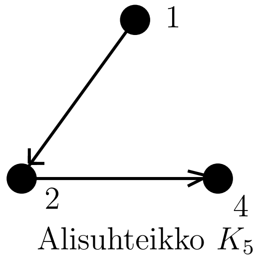
Alisuhteikko K_2



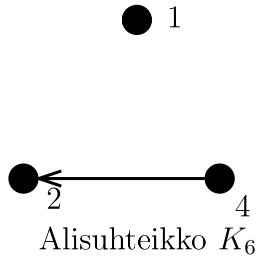
Alisuhteikko K_3



Alisuhteikko K_4

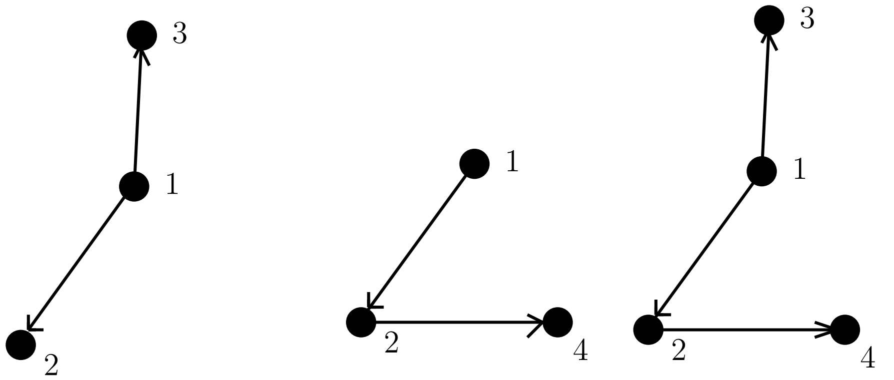


Alisuhteikko K_5



Alisuhteikko K_6

b)



Alisuhteikko H_1 Alisuhteikko H_2 Suhteikko $H_1 \bigvee H_2$

Yhdiste $H = H_1 \bigvee H_2$ ei ole pistejoukkonsa virittämä G:n alisuhteikko, sillä siitä puuttuu esimerkiksi nuoli $\overrightarrow{14}$, joka on G:n nuoli, vaikka $1, 4 \in P_G$. Myös $\overrightarrow{42}$ ei ole suhteikon H nuoli, vaikka $\overrightarrow{42} \in N_G$ ja $2, 4 \in P_H$.

Itse asiassa $H = H_1 \bigvee H_2$ sisältää kaikki suhteikon G pisteet, joten jos se olisi pistejoukonsa virittämä, se olisi sama kuin alkuperäinen suhteikko G.

7. Selvitä onko olemassa verkkoa, jonka astejono on
a) $(4, 3, 2, 1, 1)$
b) $(4, 2, 2, 1, 1)$

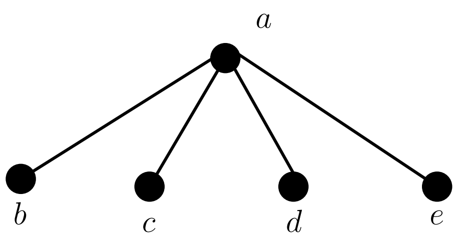
Ratkaisu: a) Tällaisen verkon asteiden summa

$$4 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$$

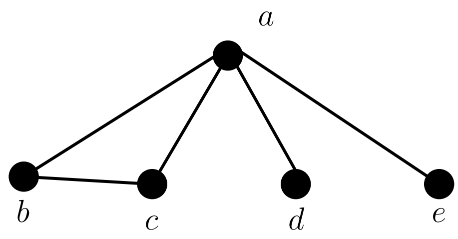
olisi pariton luku, mikä on mahdotonta Lauseen II 2.3 (verkon pisteiden asteiden summa on aina parillinen).

Vaihtoehtoisesti voi huomata, että annetussa jonossa on pariton määrä parittomia lukuja, mikä on ristiriidassa Kättelylemman kanssa.

b) Nopea tarkistus näyttää sen, että asteiden summa on parillinen eikä mitään muuta ristiriitaa huomata ainakaan heti. Yritetään konstruoida verkko. Verkossa on 5 pistettä, joista täsmälleen yhden aste on 4. Merkitään tämä piste a:lla. Tällöin a on yhteydessä kaikkiin muihin (verkossa jäljellä 4 pistettä) verkon pisteisiin b, c, d, e. Sovitaan, että ne on nimetetty sillä tavalla, että $d(b) = 2 = d(c)$ ja $d(d) = 1 = d(e)$. Toistaiseksi meillä on valmiina seuraava "osa" verkosta:



Tässä kuvassa pisteisiin a, d, e vie jo vaadittu määrä viivoja. Pisteen b aste on kaksi ja toistaiseksi kuvassa on vain viiva $\overline{ab}$. Pisteen b on oltava yhteydessä vielä yhteen pisteseen eli yhteen pisteistä c, d, e. Toisaalta se ei voi olla yhteydessä pisteeseen d tai pisteseen e, koska muuten tämän pisteen aste olisi suurempi kuin yksi. Näin ollen b:n on oltava yhteydessä c:hen, jolloin saadaan seuraava verkko:



Toisaalta tämä verkko toteuttaa jo vaaditut ehdot - nyt myös pisteen c aste on kaksi ja konstruoidun verkon astejono on $(4, 2, 2, 1, 1)$. Verkko on siis olemassa ja esimerkki on konstruoitu.

Huomautus: Ratkaisun välivaiheesta helposti seuraa, että vaadittu verkko on yksikäsitteinen isomorfiaa vaille.

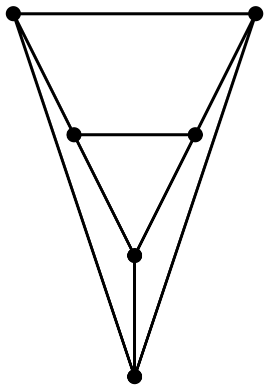
8. a) Osoita, että ei ole olemassa verkkoa, jonka astejono on $(3, 3, 3, 1)$.
b) Osoita a)-kohdan tuloksen avulla, että ei ole olemassa verkkoa, jonka astejono on $(3, 3, 3, 1, 0)$.
c) Onko olemassa verkkoa, jonka astejono on $(3, 3, 3, 3)$? Konstruoi esimerkki tai osoita, että verkko on mahdoton.

Ratkaisu: a) Olkoon G verkko, jonka astejono on $(3, 3, 3, 1)$ ja olkoot a, b, c, d sen pisteet, $d(a) = d(b) = d(c) = 3$, $d(d) = 1$. Tällöin pisteet a, b, c ovat yhteydessä kaikkiin muihin verkon pisteisiin, erityisesti pisteeseen d. Näin ollen d:llä on ainakin kolme naapuria - a, b, c, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $d(d) = 1$.

b) Olkoon G verkko, jonka astejono on $(3, 3, 3, 1, 0)$. Tällöin verkossa on yksi eristetty piste (jonka aste on 0) ja loput neljä pistettä virittävät aliverkon, jonka astejono on $(3, 3, 3, 1)$ (poistetaan verkosta eristetty piste, jätetään muut pisteet ja kaikki viivat). a)-kohdan mukaan tällainen aliverkko on kuitenkin mahdoton.

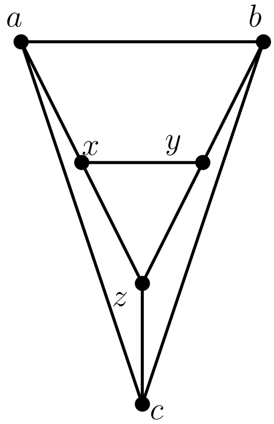
c) Olkoon G verkko, jonka astejono on $(3, 3, 3, 3)$. Tällöin verkossa on 4 pistettä ja jokainen piste on yhteydessä kaikkiin muihin (ainoa tapa saavuttaa aste kolme neljän pisteen verkossa). Toisin sanoen verkon on oltava täydellinen neljän pisteen verkko K_4. Kääntäen tällaisen verkon astejono on selvästi $(3, 3, 3, 3)$. Toisin sanoen verkko on olemassa.

9. Olkoon verkko G kuten seuraavassa kuvassa:

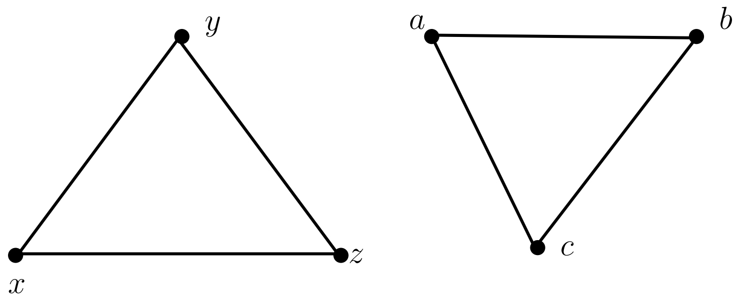


a) Anna esimerkkejä kolmen alkion osajoukosta $A \subset P_G$, jonka virittämä G:n alisuhteikko on täydellinen verkko sekä kolmen alkion osajoukosta $B \subset P_G$, jonka virittämä G:n alisuhteikko ei sisällä yhtäkään nuolta, tai osoita, että sellaista osajoukkoa ei ole olemassa.
b) Onko olemassa sellaista neljän alkion osajoukkoa $C \subset P_G$, jonka virittämä G:n alisuhteikko on täydellinen? Perustele.

Ratkaisu: Nimitetään verkon pisteet, niin, että niihin voidaan viitata:



a) Osajoukot $A_1 = \{a, b, c\}$ ja $A_2 = \{x, y, z\}$ kumpikin virittää täydellisen aliverkon. Itse asiassa nämä ovat ainoat esimerkit tämän verkon pistejoukon kolmen alkion osajoukoista, jotka virittävät täydellisen aliverkon.



H_1 H_2

Tässä kuvassa H_1 on joukon A_1 virittämä aliverkko ja H_2 on joukon A_2 virittämä aliverkko.

Kolmen pisteen osajoukkoja $B \subset P_G$, jotka virittäisivät suhteikon, jossa ei olisi yhtäkään nuolta, ei ole olemassa. Osoitetaan tämä. Koska $|B| = 3$, joukossa B on oltava ainakin kaksi alkiota osajoukosta $A_1 = \{a, b, c\}$ tai ainakin kaksi alkiota osajoukosta $A_2 = \{x, y, z\}$. Mutta a)-kohdan nojalla kumpikin virittää täydellisen aliverkon, toisin sanoen kummassakin kaksi pistettä ovat aina yhteydessä toisiinsa. Tästä seuraa, että B:ssä on varmasti kaksi pistettä, jotka ovat yhteydessä toisiinsa verkossa G, jolloin B:n virittämä alisuhteikko sisältää ainakin yhden viivan. Erityisesti se sisältää ainakin kaksi nuolta (ne, jotka muodostavat tämän viivan).

b) Osoitetaan, että ei ole olemassa neljän alkion osajoukkoa $C \subset P_G$, jonka virittämä G:n alisuhteikko on täydellinen. Koska $|C| = 4$, C sisältää ainakin kaksi alkiota osajoukosta $A_1 = \{a, b, c\}$ tai ainakin kaksi alkiota osajoukosta $A_2 = \{x, y, z\}$. Voidaan olettaa (tilanne on symmetrinen), että C sisältää ainakin kaksi alkiota joukosta A_1. Lisäksi, koska A_1:ssä on vain kolme alkiota, C:n täytyy sisältää ainakin yhden pisteen toisesta osajoukosta, eli joukosta A_2, kutsutaan tätä pistettä w (se on yksi pisteistä x, y, z). Nyt, kuten verkon geometrisesta esityksestä huomaa, w on yhteydessä vain yhteen joukon A_1 pisteeseen. Koska C sisältää ainakin kaksi eri joukon A_1 pistettä, w ei siis voi olla yhteydessä kaikkiin C:n alkioihin (verkossa G). Erityisesti C:n virittämässä alisuhteikossa H on olemassa kaksi eri pistettä (w ja jokin joukon A_1 piste), joiden välillä ei ole tässä alisuhteikossa minkäänlaista yhteyttä. Erityisesti H ei voi olla täydellinen.