Verkot, syksy 2015
Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Laskuharjoitus 1.
Ratkaisuedotukset.

1. Olkoon X kaikkien ihmisten joukko. Määritellään joukossa X relaatiot R, S ehdoilla

$$(x, y) \in R \iff y \text{ on } x\text{:n vanhempi},$$

$$(x, y) \in S \iff y \text{ on } x\text{:n äiti}.$$

Tällöin esimerkiksi $R \circ R$ on relaatio "y on x:n isovanhempi". Tulkitse samalla tavalla sanallisesti relaatiot $R \circ S$, $S \circ R$, $S \circ S$, R^{-1}, S^{-1}, $(R \circ S)^{-1}$, $R^{-1} \circ S^{-1}$.

Ratkaisu:
Määritelmän mukaan $(x, y) \in R \circ S$ jos ja vain jos on olemassa z jolle $(x, z) \in S$ ja $(z, y) \in R$ (tarkkana järjestyksen kanssa!). Tällöin z on x:n äiti ja y on z:n vanhempi. Näin ollen y on x:n äidin vanhempi, toisin sanoen isoäiti tai isoisä äidin puolelta. Näin ollen $R \circ S$ on relaatio "y on x:n isovanhempi x:n äidin puolelta".

Vastavaasti $S \circ R$ on relaatio "y on x:n vanhemman äiti" eli "y on x:n mummo". Relaatio $S \circ S$ on relaatio "y on x:n äidin äiti".

Määritelmän mukaan $(x, y) \in R^{-1}$ jos ja vain jos $(y, x) \in R$ eli jos ja vai jos x on y:n vanhempi. Toisin sanoen R^{-1} on relaatio "x on y:n vanhempi" eli "y on x:n lapsi".

Samalla tavalla nähdään, että S^{-1} on relaatio "x on y:n äiti". Sanallisesti se voidaan ilmaistaa myös muodossa "x on nainen ja y on x:n lapsi".

Koska tiedämme jo, että $R \circ S$ on relaatio "y on x:n isovanhempi äidin puolelta", tästä voidaan heti päätellä, että relaatio $(R \circ S)^{-1}$ on sanallisesti "x on y:n isovanhempi x:n äidin puolelta" eli "y on x:n tyttären lapsi".

Määritelmän mukaan $(x, y) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ jos ja vain jos on olemassa z jolle $(x, z) \in S^{-1}$ ja $(z, y) \in R^{-1}$. Tällöin x on z:n äiti ja y on z:n lapsi. Näin ollen x on y:n isoäiti eli $R^{-1} \circ S^{-1}$ on relaatio "x on y:n mummo".

Huomaa, että relaatio $S \circ R$ on relaatio "y on x:n isoäiti". Näin ollen, ainakin tässä tapauksessa pätee

$$R^{-1} \circ S^{-1} = (S \circ R)^{-1}.$$

Seuraavassa tehtävässä osoitetaan, että tämä yhtälö pätee itse asiassa aina (kun on määritelty).

Yhteenveto: Olkoot $x, y \in X$ (eli ihmisiä). Tällöin
$(x, y) \in R \circ S$ jos ja vain jos jos y on x:n äidin vanhempi,

$(x,y) \in S \circ R$ jos ja vain jos jos y on x:n isoäiti,
$(x,y) \in S \circ S$ jos ja vain jos jos y on x:n äidin äiti,
$(x,y) \in R^{-1}$ jos ja vain jos jos y on x:n lapsi,
$(x,y) \in S^{-1}$ jos ja vain jos jos y on x:n lapsi ja x on nainen,
$(x,y) \in (R \circ S)^{-1}$ jos ja vain jos jos y on x:n tyttären lapsi,
$(x,y) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ jos ja vain jos jos x on y:n isoäiti eli y on x:n lapsenlapsi ja x on nainen.

Huomautukset: Yleinen virhe on tulkita relaatioiden R ja S **järjestys** yhdistetyssä relaatiossa $R \circ S$ väärinpäin. Tästä syystä monilla meni ratkaisuissaan relaatioiden $R \circ S$ ja $S \circ R$ tulkinnat sekaisin.
Samoin relaatioiden $(R \circ S)^{-1}$ ja $R^{-1} \circ S^{-1}$ tulkinnoissa on ollut virheitä samasta syystä.

Hyvin monissa ratkaisuissa relaatioille R^{-1} ja S^{-1} oli annettu sama tulkinta - "y on x:n lapsi". Mutta tämähän tarkoittaisi, että ne ovat sama relaatio, jolloin myös R ja S olisivat sama relaatio. Näin ei kuitenkaan ole.

2. Olkoon S relaatio joukosta X joukkoon Y ja R relaatio joukosta Y joukkoon Z. Osoita, että
$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Muistutus: Relaatiot ovat (kuten oikeastaan kaikki objektit matematiikassa) *joukkoja*. Näin ollen kaksi relaatiota osoitetaan olevan samoja samalla tavalla kuin osoitetaan, että kaksi joukkoa ovat samoja. Väite $A = B$, missä A ja B ovat joukkoja, osoitetaan näyttämällä, että $A \subset B$ ja $B \subset A$. Toisin sanoen osoitetaan, että
1) jokainen joukon A alkio on myös joukon B alkio,
2) jokainen joukon B alkio on myös joukon A alkio.

Ratkaisu:
Oletetaan, että $(a,b) \in (R \circ S)^{-1}$. Tällöin $(b,a) \in R \circ S$. Yhdistetyn relaation määritelmän mukaan tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa $c \in Y$ jolle $(b,c) \in S$ ja $(c,a) \in R$. Tästä saadaan, että $(c,b) \in S^{-1}$ ja $(a,c) \in R^{-1}$. Kirjoittamalla nämä ehdot toisessa järjestyksessä - $(a,c) \in R^{-1}$ ja $(c,b) \in S^{-1}$, nähdään, että niistä seuraa (yhdistetyn relaation määritelmän mukaan) $(a,b) \in S^{-1} \circ R^{-1}$.

Olemme näyttäneet, että kaikille relaation $(R \circ S)^{-1}$ alkioille (a,b) pätee myös $(a,b) \in S^{-1} \circ R^{-1}$. Toisin sanoen olemme näyttäneet, että

$$(R \circ S)^{-1} \subset S^{-1} \circ R^{-1}. \tag{1}$$

Sisältyvyys toiseen suuntaan näytetään samalla tavalla. Oletetaan, että $(a,b) \in S^{-1} \circ R^{-1}$. Yhdistetyn relaation määritelmän mukaan tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa $c \in Y$ jolle $(a,c) \in R^{-1}$ ja $(c,b) \in S^{-1}$. Tästä seuraa, että $(c,a) \in R$ ja $(b,c) \in S$. Kirjoittamalla nämä ehdot toisessa järjestyksessä - $(b,c) \in S$ ja $(c,a) \in R$, nähdään, että niistä seuraa (yhdistetyn relaation määritelmän mukaan)

$(b, a) \in R \circ S$. Tämä taas tarkoittaa sitä, että $(a, b) \in (R \circ S)^{-1}$.
Olemme näyttäneet, että kaikille relaation $S^{-1} \circ R^{-1}$ alkioille (a, b) pätee myös $(a, b) \in (R \circ S)^{-1}$. Toisin sanoen olemme näyttäneet, että

$$S^{-1} \circ R^{-1} \subset (R \circ S)^{-1}. \tag{2}$$

Sisältyvyyksistä (1) ja (2) seuraa väite.

Lyhyempi tapa olisi hoitaa molemmat sisältyvyydet yhdellä kerralla käyttämällä **loogisia ekvivalenssejä**. Nimittäin jokaiselle alkiolle $(a, b) \in Z \times X$ pätee

$$(a, b) \in (R \circ S)^{-1} \textbf{ jos ja vain jos } (b, a) \in R \circ S.$$

Vastavaasti

$$(b, a) \in R \circ S \textbf{ jos ja vain jos } \text{on olemassa } c \in Y \text{ jolle } (b, c) \in S, (c, a) \in R,$$

$$\textbf{jos ja vain jos } \text{on olemassa } c \in Y \text{ jolle } (a, c) \in R^{-1}, (c, b) \in S^{-1},$$

$$\textbf{jos ja vain jos } (a, b) \in S^{-1} \circ R^{-1}.$$

Yleensä tällaisessa todistuksessa sanat "jos ja vain jos" korvataan symbolilla $\Leftrightarrow$ (yhtäpitävyys) eli esitetään seuraavassa muodossa:

$$(a, b) \in (R \circ S)^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in R \circ S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ on olemassa } c \in Y \text{ jolle } (b, c) \in S, (c, a) \in R,$$

$$\Leftrightarrow \text{ on olemassa } c \in Y \text{ jolle } (a, c) \in R^{-1}, (c, b) \in S^{-1},$$

$$\Leftrightarrow (a, b) \in S^{-1} \circ R^{-1}.$$

3. Olkoon $R \subset X \times Y$ relaatio joukolta X joukkoon Y. Olkoon $(a, b) \in X \times X$. Osoita, että $(a, b) \in R^{-1} \circ R$ jos ja vain jos $R(a) \cap R(b) \neq \emptyset$.

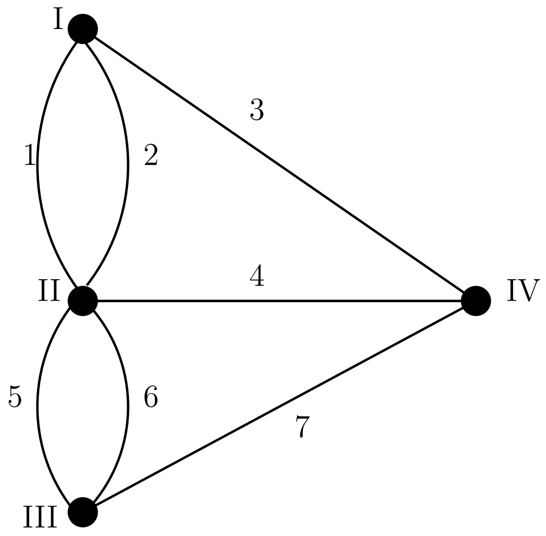
Ratkaisu:
Huomautus: $R(a)$ siis tarkoittaa samaa asiaa kuin $R(\{a\})$ eli kyse on osajoukon $\{a\}$ kuvasta relaatiossa R.

Määritelmän mukaan $(a, b) \in R^{-1} \circ R$ tarkoittaa sitä, että on olemassa $c \in Y$ jolle $(a, c) \in R$ ja $(c, b) \in R^{-1}$. Tällöin $(a, c), (b, c) \in R$, joten, osajoukkojen $R(a)$ ja $R(b)$ määritelmän mukaan $c \in R(a)$ ja $c \in R(b)$. Tämä tarkoittaa sitä, että $c \in R(a) \cap R(b)$, erityisesti tämä leikkaus on epätyhjä.

Kääntäen, oletetaan, että leikkaus $R(a) \cap R(b)$ on epätyhjä ja olkoon c jokin sen alkio. Tällöin $(a, c), (b, c) \in R$, joten $(a, c) \in R$ ja $(c, b) \in R^{-1}$. Yhdistetyn relaation määritelmän mukaan tällöin $(a, b) \in R^{-1} \circ R$.

Huomautus: Monissa ratkaisuissa käytettiin merkintöjä tyyliin $R(a) = c$ tarkoittamaan sitä, että $c \in R(a)$. Jos R on **funktio** tämä on oikein, mutta yleisen relaation R kohdalla alkion kuvassa voi olla enemmän kuin yksi alkio, eli siitä, että $c \in R(a)$ ei seuraa, että c olisi joukon $R(a)$ ainoa alkio.

4. Lisää Könisbergin siltaongelmaan liittyvään verkkoon G (Kuva 1) yksi uusi kaksisuuntainen yhteys (eli uusi silta). Etsi sen jälkeen tästä uudesta verkosta G' Eulerin kulku eli sellainen reitti, joka käy jokaisen sillan yli täsmälleen kerran.
HUOM. Tämän reitin loppupisteen ei tarvitse olla sama kuin sen alkupiste.



Kuva 1

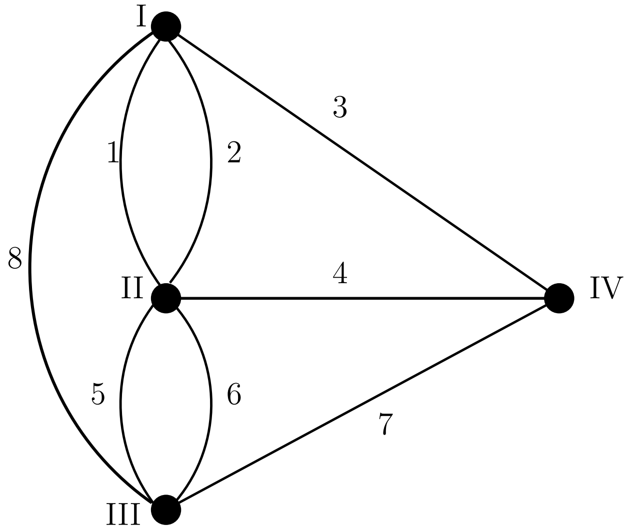
Ratkaisu:
Johdanto-materiaalissa on mainittu kaksi seuraavaa tulosta, jotka karakterisoivat täysin Eulerin kulkujen ja kierrosten olemassaoloa:

- *yhtenäisestä verkosta löytyy Eulerin kierros jos ja vain jos sen jokaiseen pisteseen liittyy* **parillinen** *määrä viivoja,*

- *yhtenäisestä verkosta löytyy Eulerin kulku, mutta ei Eulerin kierrosta, jos ja vain jos* **täsmälleen kahteen** *sen (eri) pisteseen x, y liittyy* **pariton** *määrä viivoja. Tällöin Eulerin kulku kuljee pisteestä x pisteseen y.*

Kuvan 1 verkossa jokaiseen pisteseen liittyy pariton määrä viivoja ja pisteitä on 4. Tämä on se syy, miksi Kuvan 1 verkosta ei löydy edes Eulerin kulkua.

Oletetaan, että Kuvan 1 kaaviossa on lisätty uusi viiva kahden **eri** pisteen välillä, esimerkiksi pisteiden I ja III välillä (Kuva 2, uusi yhteys on merkitty numerolla 8). Könisbergin kannalta se tarkoittaisi, että uusi silta kahden manner-alueen välillä on rakennettu.



Kuva 2

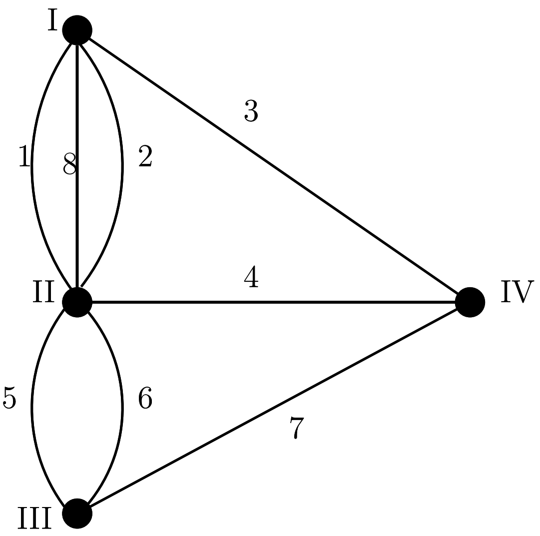
Uuden viivan lisääminen **kasvattaa** pisteisiin I ja III liittyvien viivojen lukumäärän **tasan yhdellä**. Tämän jälkeen kumpaankin pisteseen I ja III liittyy **parillinen** määrä viivoja (neljä kummankin kohdalla). Muiden pisteiden II ja IV aste pysyy samana kuin alkuperäisessä verkossa eli parittomana (muistutus: pisteen aste on siihen liittyvien viivojen lukumäärä). Näin ollen, tämän lisäyksen jälkeen verkosta täytyy löytyä Eulerin kulku (mutta ei Eulerin kierrosta!). Lisäksi sen pitäisi kulkea pisteestä II pisteseen IV. Itse reitti löytyy helpoiten yksinkertaisesti kokeilemalla. Vaihtoehtoja on paljon, esimerkiksi reitti joka kulkee siltoja seuraavassa järjestyksessä:

$$1-8-5-2-3-7-6-4$$

Pyydetty reitti löytyy tietysti ilmankin sitä, että ottaa huomioon teoreettisia tuloksia, mutta niiden tunteminen helpottaa asiaa.

Huomautus: Ratkaisussa lisättiin konkrettisuuden vuoksi viiva pisteiden I ja III välillä, mutta tehtävä ratkeaa yhtä hyvin lisäämällä **mikä tahansa** uusi silta, kunhan se ei ole ”silmukka” eli yhdistää kaksi **eri** pistettä. Tämä seuraa siitä, että minkä tahansa tällaisen uuden viivan lisääminen aina johtaa sellaiseen verkkoon, jossa tasan kahden pisteen aste on pariton ja sellaisessa Eulerin kulku aina löytyy.

Esimerkiksi jos uusi yhteys rakennetaan pisteiden I ja II välillä (kuten kuvassa 3), yksi mahdollisuus kulkea kaikki sillat täsmälleen kerran olisi kulku $(7, 5, 1, 8, 2, 3, 4, 6)$.

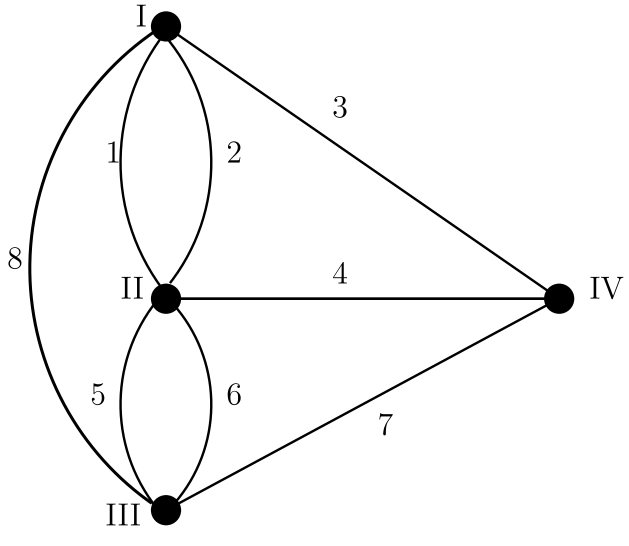


Kuva 3

Huomatus 2: Verkon ”yhtenäisyys” tarkoittaa sitä, että jokaisesta pisteestä pääsee jokaiseen toiseen pisteseen kulkua pitkin. Könisbergin siltaongelman verkko on ilman muuta yhtenäinen.

5. Jatkoa edellisen tehtävään: Lisää tehtävässä 1. konstruoimaasi verkoosi G' vielä yksi yhteys niin, että sen jälkeen uudessa verkossa G'' on olemassa Eulerin **kierros** eli sellainen reitti, joka käy jokaisen sillan yli täsmälleen kerran ja palaa alkupisteseen. Esitä kyseinen Eulerin kierros verkossa G''.

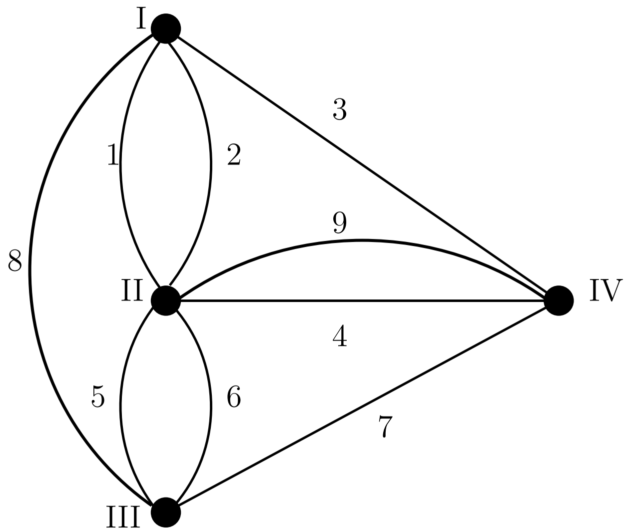
Ratkaisu:
Lähdetään kuvan 2 verkosta, jossa Könisbergin alkuperäiseen silta-verkkoon on lisätty uusi yhteys 8: I-III. Tässä verkossa kahden pisteen (I ja III) aste on parillinen, ja kahden (II ja IV) aste on pariton:



Kuva 2

Tästä voidaan päätellä, että jos pisteiden II ja IV väliin rakennetaan uusi yhteys 9

(kts. kuva 4 alla), kummankin pisteen aste kasvaa yhdellä, eli muuttuu parilliseksi. Pisteiden I ja III asteet taas eivät muutu miksikään. Toisin sanoen saadaan verkko, jonka jokaisen pisteen aste on parillinen. Tällaisesta verkosta pitäisi teorian mukaan löytyä Eulerin kierros.
Itse kierros löytyy tässä vaiheessa käyttämällä hyväksi tehtävässä 1 rakennettua Eulerin kulkua $1-8-5-2-3-7-6-4$. Nimittäin tämä reittihan alkaa pisteestä II ja loppuu pisteseen IV, joten, jos se jatketaan tällä uudella yhteydellä 9, saadaan kulku $1-8-5-2-3-7-6-4-9$, joka käy kaikki yhteydet tasan kerran läpi ja palaa alkupisteseen (piste II tässä tapauksessa).



Kuva 4

Samanlainen temppu onnistuu riippumatta siitä, minkälainen ratkaisu edelliselle tehtävälle ehdotetiin (kunhan se oli oikea). Jos tehtävän 4 ratkaisussa oli rakenettu Eulerin kulku (eri) pisteiden x ja y väliin, tehtävä 5 ratkaistaan lisämällä verkkoon uusi yhteys pisteiden x ja y väliin ja jatketaan tehtävässä 4 konstruoitu kulku tällä uudella yhteydellä.

6. Määritellään reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ relaatio R ehdolla

$$yRx \iff x^2 + y^2 = 2.$$

a) Määritä $R(]0,1[)$, $R^{-1}([2,4])$, $\operatorname{dom} R$, $\operatorname{Im} f$.
b) Osoita, että $(x,y) \in R \circ R$ jos ja vain jos $y = \pm x$ ja $x \in \operatorname{dom} R$.
c) Onko relaatio R refleksiivinen? Symmetrinen? Irrefleksiivinen? Transitiivinen? Antisymmetrinen?

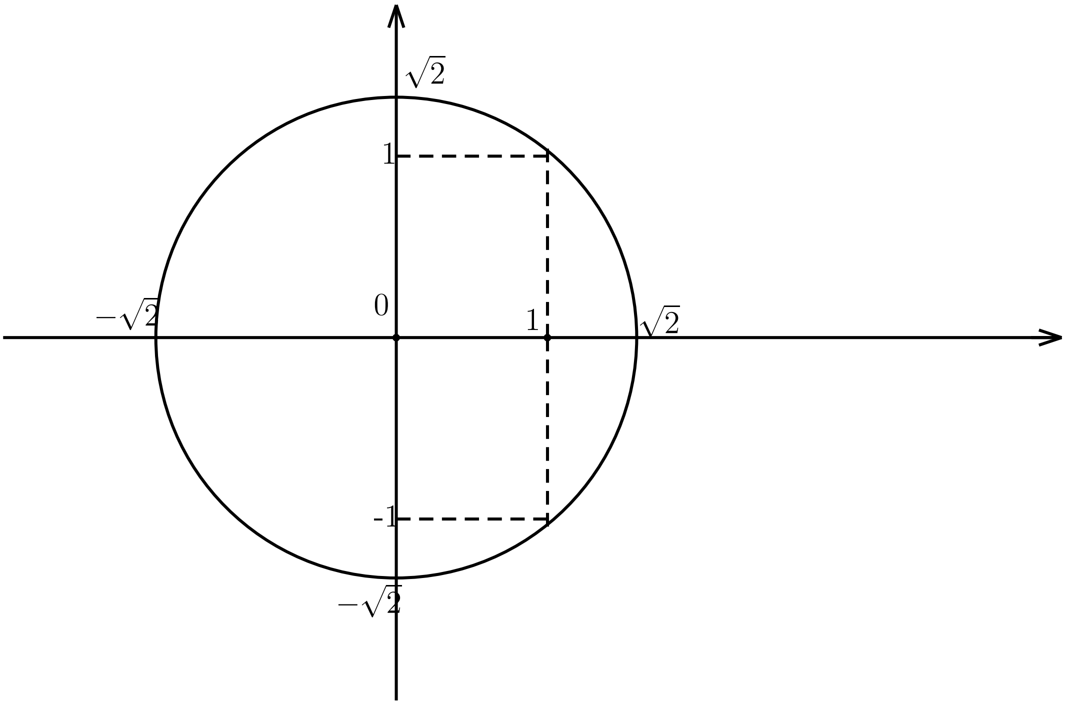
Ratkaisu:
a) Reaaliluvulle y pätee $y \in R(]0,1[)$ jos ja vain jos on olemassa jokin $x \in]0,1[$ jolle

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Tällöin $y^2 = 2 - x^2$. Kun x käy läpi avoimen välin $]0,1[$ lukuja, $y^2 = 2 - x^2$ saa kaikki arvot väliltä $]1,2[$. Kun y on positiivinen, tämä on yhtäpitävä sen kanssa, että $y \in]1, \sqrt{2}[$. Kun y on negatiivinen, tämä on yhtäpitävä sen kanssa, että $y \in]-\sqrt{2}, -1[$. Näin ollen

$$R(]0,1[) =]1, \sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2}, -1[.$$

Ratkaisun "näkee" helpoimmin, jos piirtää ensin relaation kuvaajan tasossa:



Reaaliluvulle x pätee $x \in R^{-1}([2,4])$ jos ja vain jos on olemassa jokin $y \in [2,4]$ jolle

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Mutta kun $y \geqslant 2$, niin $y^2 \geqslant 4$, joten yhtälö $x^2 + y^2 = 2$ on tällöin mahdoton. Näin ollen mikään x ei voi kuulua joukkoon $R^{-1}([2,4])$. Toisin sanoen

$$R^{-1}([2,4]) = \varnothing.$$

Määritelmän mukaan $\operatorname{dom} R = R^{-1}(\mathbb{R})$. Yhtäpitävästi: $x \in \operatorname{dom} R$ jos ja vain jos on olemassa y siten, että $(x, y) \in R$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa y jolle $x^2 = 2 - y^2$ jos ja vain jos $x^2 \leqslant 2$ eli jos ja vain jos $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. Nimittäin jos $x^2 = 2 - y^2$, niin erityisesti $x^2 \leqslant 2$. Toisaalta, jos $x^2 \leqslant 2$, luku $t = 2 - x^2$ on ei-negatiivinen, joten on olemassa y siten, että $y^2 = t$, jolloin $x^2 + y^2 = 2$.
Näin ollen

$$\operatorname{dom} R = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

Kuvajoukko $\operatorname{Im} R$ koostuu niistä $y \in \mathbb{R}$, joille on olemassa $x \in \mathbb{R}$ siten, että $x^2 + y^2 = 2$. Vaihtamalla x:n ja y:n roolit edellisen kappaleen perustelussa (relaatio on täysin symmetrinen!), saadaan, että

$$\operatorname{Im} R = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

b) $(x,y) \in R \circ R$ jos ja vain jos on olemassa $z \in \mathbb{R}$ jolle $(x,z),(z,y) \in R$. Toisin sanoen jos $(x,y) \in R \circ R$, niin jollakin $z \in \mathbb{R}$ pätee

$$x^2 + z^2 = 2,$$

$$z^2 + y^2 = 2.$$

Vähentämällä toinen yhtälö ensimmäisestä saadaan $x^2 - y^2 = 0$ eli $x^2 = y^2$. Tämä on tunnetusti yhtäpitävä sen kanssa, että $y = \pm x$. Lisäksi $x \in \operatorname{dom} R$, koska $(x,z) \in R$.

Kääntäen oletetaan, että $x \in \operatorname{dom} R$ ja $y = \pm x$. Tällöin $y^2 = x^2$. Koska $x \in \operatorname{dom} R$, on olemassa $z \in \mathbb{R}$ jolle $(x,z) \in R$ eli $x^2 + z^2 = 2$. Koska $y^2 = x^2$, tällöin myös $z^2 + y^2 = 2$. Toisin sanoen $(x,z) \in R$ ja $(z,y) \in R$. Tämä tarkoittaa sitä, että $(x,y) \in R \circ R$.

Huomautus: Monissa ratkaisuissa b)-kohdan todistus oli hoidettu ekvivalensseilla tyyliin

$$(x,y) \in R \circ R \iff$$

$$\text{on olemassa } z \in \mathbb{R} \text{ s.e. } (x,z),(z,y) \in R \iff$$

$$\text{on olemassa } z \in \mathbb{R} \text{ s.e. } x^2 + z^2 = 2 = z^2 + y^2 \overset{*}{\iff}$$

$$x^2 = y^2 \iff x = \pm y.$$

Tämä on periaatteessa oikein, mutta ekvivalenssiketjussa kohdassa * päättelyn suunta $\Leftarrow$ ei ole itsestään selvää ja vaatii lisää perusteluja. On selvä, että jos on olemassa z jolle $x^2 + z^2 = 2 = z^2 + y^2$, niin $x^2 = y^2$. Kääntäen kuitenkin ei ole enää niin selvää, miten yhtälöstä $x^2 = y^2$ seuraa vaaditun z olemassaolo. Se vaatii sen, että tämä z konstruoidaan ja tässä kohdassa tarvitaan myös oletusta $x \in \operatorname{dom} R$ (kts. todistus yllä).
Tarinan opetus: Jos käytät ekvivalensseja mieti onko jokaisen välivaiheen *kumpikin päättelysuunta* tarpeeksi hyvin perusteltu ja selvä.

c) Relaation refleksivisyys tarkoittaa sitä, että jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee $(x,x) \in R$. Relaation irrefleksiivisyys tarkoittaa sitä, että jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee $(x,x) \notin R$. Tutkitaan milloin $(x,x) \in R$. Tämä ehto on yhtäpitävä sen kanssa, että $x^2 + x^2 = 2$ eli $x^2 = 1$. Tällä yhtälöllä on ratkaisuja $x = 1$, $x = -1$. Näin ollen

(1) on olemassa $x \in \mathbb{R}$ joille $(x,x) \notin R$ (mikä tahansa $x \neq \pm 1$, esimerkiksi $x = 0$, kelpaa esimerkiksi),

(2) on olemassa $x \in \mathbb{R}$ joille $(x,x) \in R$, esimerkiksi $x = 1$ tai $x = -1$.

Kohdasta (1) seuraa, että relaatio ei ole refleksiivinen. Kohdasta (2) seuraa, etä relaatio ei ole irrefleksiivinen.

Huomautus: Jos relaatio R olisi refleksiivinen, niin olisi $\operatorname{dom} R = \mathbb{R}$. Koska tiedämme jo, että näin ei ole, tästäkin voidaan päätellä, että R ei ole refleksiivinen.

Relaatio R on symmetrinen. Nimittäin oletetaan, että $(x, y) \in R$. Tällöin $x^2+y^2 = 2$. Tämä yhtälö voidaan yhtä hyvin kirjoittaa muodossa $y^2 + x^2 = 2$, mistä seuraa, että tällöin myös $(y, x) \in R$.

Relaation R antisymmetrisyys tarkoittaisi sitä, että ehdot $(x, y) \in R$ ja $(y, x) \in R$ voivat olla molemmat voimassa samanaikaisesti ainoastaan silloin kun $x = y$. Toisin sanoen, relaatio **ei ole** antisymmetrinen jos ja vain jos pystytään löytämään sellaiset x, y joille $x \neq y$, mutta $(x, y) \in R$ ja $(y, x) \in R$. Tehtävän relaatiolle R tämä toteutuu kun valitaan (esimerkiksi) $x = 1$, $y = -1$. Näin ollen R ei ole antisymmetrinen.

Huomautus: Perustelu ”relaatio ei voi olla antisymmetrinen, koska se on symmetrinen” **on virheellinen**, koska nämä käsitteet eivät ole toistensa vastakohtia. Esimerkiksi identtinen relaatio

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

missä tahansa joukossa X on sekä symmetrinen, että antisymmetrinen. Myös tyhjä relaatio on aina symmetrinen ja antisymmetrinen.

Lopuksi tutkitaan onko relaatio R transitiivinen. Oletetaan, että $(x, y) \in R$ ja $(y, z) \in R$. Onko tällöin aina $(x, z) \in R$? Oletuksistamme seuraa, että $x^2 + y^2 = 2$ ja $y^2 + z^2 = 2$. Vähentämällä toinen yhtälö ensimmäisestä saadaan $x^2 - z^2 = 0$, mikä on sama asia kuin $z = \pm x$. Toisaalta $(x, z) \in R$ jos ja vain jos $x^2 + z^2 = 2$. Ehdot $z = \pm x$ ja $x^2 + z^2 = 2$ toteuttuvat samanaikaisesti jos ja vain jos $x^2 = 1$ eli $x = \pm 1$ (ja $z = \pm x$). Näin ollen, jos valitaan esimerkiksi $x = 0$, $y = \sqrt{2}$, $z = 0$, niin $(x, y) \in R$ ja $(y, z) \in R$, mutta $(x, z) = (0, 0) \notin R$. Relaatio ei ole transitiivinen.

7. a) Olkoon $A \subset \mathbb{N}$ äärellinen joukko, jolle pätee $|A| \geqslant 101$. Osoita, että joukosta A löytyy kaksi erilaista lukua, joiden erotus on jaollinen luvulla 100.

Ratkaisu:
Laatikkoperiaate (tai lokeroperiaate) sanoo, että jos kahdelle äärelliselle joukolle A, B pätee $|A| > |B|$, niin mikään kuvaus $f\colon A \to B$ ei voi olla injektio. Havainnollisesti - alkio $x \in A$ laitetaan lokeroon $f(x)$. Jos oletetaan, että lokeroita on vähemmän kuin alkioita, johonkin lokeroon väistämättä joutuu kaksi eri alkiota.

Olkoon A kuten tehtäväannossa ja olkoon $B = \{0, 1, \ldots, 99\}$. Joukko B koostuu kaikista mahdollisista *jakojäännöksistä* sadalla jaettaessa. Voidaan määritellä kuvaus $f\colon A \to B$ asettamalla $f(x)$:ksi **jakojäännös**, joka saadaan kun x jaetaan sadalla.

Koska $|A| \geqslant 101 > 100 = |B|$, laatikkoperiaatteen mukaan kuvaus f ei ole injektio, joten on olemassa kaksi lukua $x, y \in A$, $x \neq y$ joille $f(x) = f(y)$. Toisin sanoen luvuilla x ja y on sama jakojäännös r sadalla jaettaessa. Määritelmän mukaan se tarkoittaa sitä, että joillakin kokonaisluvuilla n, m pätee

$$x = 100 \cdot n + r,$$

$$y = 100 \cdot m + r.$$

(sata "mahtuu" lukuun x kokonaan n kertaa, lukuun y kokonaan m kertaa).
Tällöin

$$x - y = 100n - 100m = 100(n - m)$$

on jaollinen sadalla.

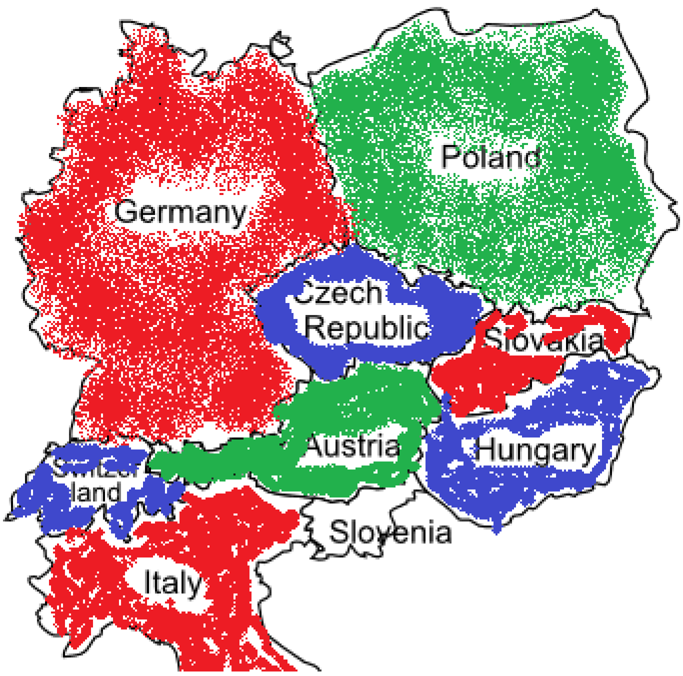
8. Kuvassa alla on esitetty erään Euroopan osan kartta. Väritä se neljällä eri värillä. Onnistuuko värittäminen kolmella eri värillä? Jos onnistuu, esitä yksi tapa värittää kartta kolmella värillä, jos ei onnistu selitä miksi.

Ratkaisu:
Kartan värittäminen käytännössä kannattaa tehdä "step-by-step"-menetelmällä. Aloitetaan jostakin maasta ja väritetään se ensimmäisellä värillä. Sen jälkeen väritetään sen naapureita yksi kerralla ja joka vaiheessa yritetään pysyä niin pienessä määrissä värejä kun tarvitaan. Uusi väri otetaan käyttöön ainoastaan kun "on pakko". Tällöin samalla nähdään riittävätkö kolme väriä vai onko jossakin vaiheessa pakko ottaa käyttöön myös neljäs väri.

Aloitetaan esimerkiksi Saksasta ja väritetään se värillä 1 (kuvassa alla punainen). Sen naapurit eivät sen jälkeen voi olla punaisia, siirrytään seuraavaksi esim. Puolaan ja annetaan sille seuraava väri 2 (kuvassa vihreä). Nyt Tsekki on sekä punaisen Saksan, että vihreän Puolan naapuri, joten se ei voi olla väriltään punainen tai vihreä, Tsekkiä varten tarvitaan väri 3 (kuvassa sininen). Näin ollen ainakin kolme väriä tarvitaan. Tilanne tähän mennessä on esitetty seuraavassa kuvassa.

Yritetään jatkossa pärjätä kolmella värillä, ainakin niin kuin se on mahdollista. Seuraavaksi yritetään väritä Itävalta. Sillä on jo väritetyistä naapureista Saksa (väri 1) ja Tsekki (väri 3). Näin ollen, voidaan värittää se värillä 2 (kuvassa vihreä), joutumatta ainakin tässä vaiheessa ristiriidaan. **Huomaa, että jos yritetään pärjätä kolmella värillä, niin tämä on ainoa vaihtoehto**. Sen jälkeen ainoa vaihtoehto Sveitsille on väri 3 (sininen) ja Slovakialle - väri 1 (punainen). Tilanne tässä vaiheessa:

Jatketaan. Koska Italialla on naapurina sininen Sveitsi ja vihreä Itävalta, ainoa vaihtoehto on väritä Italia punaiseksi. Koska Unkarilla on naapureina punainen Slovakia ja vihreä Itävalta, ainoa vaihtoehto on väritä Unkari siniseksi.

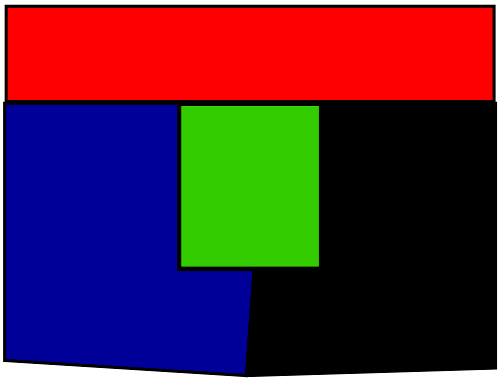


Tässä vaiheessa huomataan, että Slovenialle ei enää löydy väriä kolmesta käytetyistä väreistä, sillä sillä on sininen naapuri Unkari, vihreä naapuri Itävalta ja punainen naapuri Italia. Näin ollen ei ole mahdollista väritä annettu kartta kolmella eri värillä. Ottamalla käyttöön neljäs väri Sloveniaa varten (kuvassa keltainen), saadaan väritys valmiiksi (kts. kuva seuraavalla sivulla).

Toinen tapa: Toinen hauska vaihtoehtoinen tapa todistaa, että kolme väriä eivät riitä on seuraavanlainen. Oletetaan taas, että meillä on käytössä vain kolme väriä 1, 2, 3, väritetään Itävalta värillä 1 ja tarkastellaan Itävallan naapureita. Niitä on seitsemän ja ne on väritettävää käyttämällä ainoastaan värejä 2 ja 3. Huomataan, että Itävallan naapurit muodostavat **suljetun ketjun** (eli verkkoteorian kielellä niin sanotun ”kierroksen”), jossa ketjun jokainen jäsen on seuraavan jäsenen naapuri:
Italia - Sveitsi - Saksa - Tsekki - Slovakia - Unkari - Slovenia - Italia.
Olkoon Italian väri 2, tällöin Sveitsin väri on välttämättä 3, joten Saksan väri on välttämättä 2 jne. Koska ketjussa on pariton määrä maita (seitsemän) viimeisen jäsenenen Slovenia värin on oltava 2, sama kuin ensimmäisen, eli Italian. Mutta kierros on suljettu - Slovenia on Italian naapuri, joten päädytään ristiriitaan - kummankin värin on oltava väri 2.

9. Piirrä esimerkki kartasta, jossa on tasan neljä eri maata ja jota ei pysty väritämään kolmella eri värillä.

Ratkaisu:
Jos neljästä maasta **jokainen maa on jokaisen toisen maan naapuri**, niin kartassa jokaisella neljästä maasta on oltava oma väri. Toisin sanoen kolme väriä ei tällöin voi riittää. Näin ollen riittää piirtää sellainen kartta, jossa on neljä maata ja jossa kaikki maat ovat toistensa naapureita. Tässä on yksi esimerkki:



Huomautus: Kaikki esimerkit ovat olellisesti tällaisia. Jos kartassa on neljä eri maata ja niistä ainakin kahdella, A ja B, ei ole yhteistä rajaa, ne voidaan värittää samalla värillä 1. Sen jälkeen jäljellä olevaa kaksi maata voidaan värittää väreillä 2 ja 3. Tällaisessa tapauksessa kolme väriä siis riittäisi. Näin ollen, ainoa toimiva esimerkki on sellainen kartta jossa jokainen maa on jokaisen toisen maan naapuri. Verkkojen kielellä se tarkoittaa täsmälleen sitä, että karttaa vastaava verkko on *täydellinen* verkko.

10. a) Anna esimerkki kuvauksesta $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ joka on surjektio, mutta ei ole injektio. Miksi tästä seuraa, että luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ ei ole äärellinen?
a) Anna esimerkki kuvauksesta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joka on injektio, mutta ei ole surjektio. Miksi tästä seuraa, että reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ei ole äärellinen?

Ratkaisu:
Muistutus: tällä kurssilla $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, \}$.

Palautetaan mieleen seuraava tärkeä äärellisten joukkojen ominaisuus (kts. materiaali ”kuvaukset ja relaatiot”): Olkoon $f\colon A \to B$ kuvaus, missä A ja B ovat **samankokoisia** äärellisiä joukkoja, $|A| = |B|$. Tällöin f on injektio jos ja vain jos f on surjektio. Erityisesti, jos A on äärellinen joukko ja $f\colon A \to A$ on mikä tahansa kuvaus, niin se on injektio jos ja vain jos se on surjektio.

Tästä seuraa: jos joukolle A löydetään kuvaus $f\colon A \to A$, joka on injektio, mutta ei ole surjektio, niin joukko A ei voi olla äärellinen. Samoin, jos joukolle A löydetään kuvaus $f\colon A \to A$, joka on surjektio, mutta ei ole injektio, niin joukko A ei voi olla äärellinen.

a) Esimerkki: kuvaus $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, joka on määritelty ehdoilla

$$f(0) = 0,$$

$$f(n) = n - 1, \ n \geqslant 1.$$

Tällöin $f(0) = 0 = f(1)$, vaikka $0 \neq 1$. Näin ollen f ei ole injektio.
Osoitetaan, että f on surjektio. Olkoon $m \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots, \}$. Määritellään $n = m + 1$, tällöin $n \in \mathbb{N}$ ja $n \geqslant 1$. Kuvauksen f määritelmän mukaan $f(n) = n - 1 = (m + 1) - 1 = m$.

Koska jokaisella $m \in \mathbb{N}$ löydettiin $n \in \mathbb{N}$ jolle $f(n) = m$, kuvaus f on surjektio.

Yllä mainitun nojalla kuvauksen f olemassaolo takaa sen, että joukko $\mathbb{N}$ ei voi olla äärellinen (on tietysti muitakin syitä, miksi se ei ole äärellinen, mutta tässä pyydettiin johtamaan tämä väite kuvauksen f olemassaolosta).

b) Esimerkki: eksponenttikuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ on injektio, koska se on aidosti monotoninen. Kuvaus ei ole surjektio, koska se saavuttaa vain positiivisia arvoja, $\operatorname{Im} f =]0, \infty[$.

Yllä mainitun nojalla kuvauksen f olemassaolo takaa sen, että joukko $\mathbb{R}$ ei voi olla äärellinen.