Relaatiot ja äärelliset joukot

Aleksandr Pasharin

Tämä materiaali sisältää kuvausten, relaatioiden seä äärellisten joukkojen teorian *kertauksen*. Tässä osiossa sekä koko kurssilla muutenkin oletetaan tunnetuiksi perusjoukko-opin merkinnät, käsitteet ja määritelmät. Erityisesti oletetaan, että lukijalle ovat tuttuja muun muassa seuraavat käsitteet: joukko, alkio, osajoukko, joukkojen yhdiste, leikkaus, erotus, komplementti, tyhjä joukko, joukkojen sisältävyys, joukkojen yhtäsuuruus jne...

Kuvaukset

Kuvaus $f\colon X \to Y$ joukolta X joukkoon Y on **mikä tahansa** tapa liittää **jokaiseen** joukon X alkioon x **täsmälleen yksi** joukon Y alkio y. Tämä alkio y merkitään tällöin $f(x)$:llä ja sitä sanotaan alkion x *kuvaksi* kuvauksessa f.
Joukko X on kuvauksen f *lähtöjoukko*, merkitään $\operatorname{dom} f$ (engl. domain). Joukko Y on kuvauksen f *maalijoukko*.

Sana ”*funktio*” tarkoittaa (ainakin tällä kurssilla) sama asiaa kuin kuvaus.

Esimerkki 1. *Olkoon X kaikkien naisten ja Y kaikkien miesten muodostamat joukot. Sääntö, joka liittää jokaiseen naiseen hänen isänsä on eräs kuvaus $f\colon X \to Y$. ”Kaavana” se voidaan antaa lyhyemmin muodossa*

$$f(x) = x\text{:n } \textit{isä}.$$

Kyseessä todellakin on hyvinmääritelty kuvaus, koska jokaisella naisella on täsmälleen yksi isä.

”Sääntö” $f(x) = y$, missä y on x:n vanhin poika, **ei ole kuvaus** *$f\colon X \to Y$, koska jokaisella naisella ei välttämättä ole poikia (tai edes lapsia). On siis olemassa joukon X alkioita, joita ei voi liittää tällä säännöllä mihinkään Y:n alkioon.*
Ongelma on helppo korjata supistamalla *funktion lähtöjoukko. Olkoon X' kaikkien sellaisten naisten joukko, joilla on poikalapsia. Tällöin samalla säännöllä määritelty kuvaus $g\colon X' \to Y$ on hyvinmääritelty kuvaus. Vaikka naisella olisikin enemmän kuin yksi poika, niistä vain yksi on vanhin (jopa kaksosten kohdalla toinen syntyy hieman aikaisemmin kuin toinen). Näin ollen jokainen joukon X' alkio liitetään täsmälleen yhteen joukon Y alkioon.*

”Sääntö” $f(x) = y$, missä y on x:n poika, **ei ole kuvaus** *$f\colon X \to Y$ eikä edes kuvaus $f\colon X' \to Y$. Nyt ongelma on siinä, että samalla naisella voi olla enemmän kuin yksi poika, ja koska nyt ei ole mitenkään spesifioitu mikä pojista valitaan tällaisessa tapauksessa, kuvauksen määritelmän ehto ei toteudu. Samaan alkioon tällä säännöllä saatetaan yrittää*

liittää kaksi tai enemmän alkiota ja tämä ei käy. Kuva-alkion $f(x)$ on oltava **yksikäsitteinen** *jokaisella $x \in X$.*
Sääntö "y on x:n poika" on esimerkki **relaatiosta**, *joista puhutaan myöhemmin tässä materiaalissa.*

Matemaattisempi esimerkki samoista ilmiöistä:
Olkoon $X = Y = \mathbb{R}$ reaalilukujen joukko. "Sääntö" $f(x) = y$, missä y on sellainen, että $y^2 = x$, **ei ole kuvaus** *$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nimittäin, kun x on negatiivinen reaaliluku, ei löydy ollenkaan sellaista $y \in \mathbb{R}$ jolle $y^2 = x$. Kun taas x on positiivinen, löytyy kaksi sellaista y:tä, x:n neliöjuuri $\sqrt{x}$ ja sen vastaluku $-\sqrt{x}$. Ainoastaan nollalle tämä sääntö antaisi yksikäsitteisen arvon.*

Olkoon $X = Y = \mathbb{R}_+$ **ei-negatiivisten** *reaalilukujen joukko. Sääntö $f(x) = y$, missä y on sellainen, että $y^2 = x$,* **on kuvaus** *$f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Tämä johtuu yksinkertaisesti siitä, että jokaisella ei-negatiivisella reaaliluvulla on yksikäsitteinen ei-negatiivinen neliöjuuri.*

Olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus. Olkoot $A \subset X$ ja $B \subset Y$. Joukon A **kuva** kuvauksen f suhteen on joukon Y osajoukko

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{ on olemassa } x \in A \text{ siten, että } f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Joukon B **alkukuva** kuvauksen f suhteen on joukon X osajoukko

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid \text{ on olemassa } y \in B \text{ siten, että } f(x) = y\} = \{x \mid f(x) \in B\}.$$

Kun joukko $B = \{y\}$ on yksiö, eli sisältää täsmälleen yhden alkion y, joukkoa $f^{-1}(B)$ sanotaan alkion y alkukuvaksi ja merkitään yksinkertaisesti $f^{-1}(y)$. Määritelmän mukaan

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

Alkion alkukuva voi olla tyhjä tai sisältää enemmän kuin yhden alkion (päinvastoin kuin alkion kuva, joka on aina yksiö kuvauksen määritelmän mukaan).
Koko joukon X kuvaa $f(X)$ sanotaan funktion f *kuvajoukoksi.*

Esimerkki 2. *Olkoot $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A =]-2, 1]$, $B =]0, 1[$, $C = \{1\}$, $D = \{-1\}$. Tällöin*

$$\begin{aligned} f(A) &= [0, 4[, \\ f^{-1}(B) &=]-1, 0[\cup]0, 1[, \\ f^{-1}(C) &= \{-1, 1\}, \\ f^{-1}(D) &= \varnothing, \\ \operatorname{Im} f = \mathbb{R}_+ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

Identtinen kuvaus $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ joukolta X itselleen on annettu ehdolla $\mathrm{id}(x) = x$ kaikilla $x \in X$. Identtinen kuvaus siis kuvaa jokainen alkio itselleen.

Kuvaus $f\colon X \to Y$ on

- **injektio** jos kaksi eri alkiota eivät koskaan kuvaudu samalle alkiolle, eli jos $f(x) = f(x')$ ainoastaan kun $x = x'$. Yhtäpitävästi kuvaus on injektio jos jokaisella $y \in Y$ sen alkukuva

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

  sisältää **korkeintaan** yhden alkion.

- **surjektio** jos $f(X) = Y$. Yhtäpitävästi kuvaus on surjektio jos jokaisella $y \in Y$ sen alkukuva

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

  sisältää **ainakin** yhden alkion.

- **bijektio** jos se on injektio ja surjektio. Yhtäpitävästi kuvaus on bijektio jos jokaisella $y \in Y$ sen alkukuva

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

  sisältää **täsmälleen** yhden alkion.

Esimerkki 3. *Kuvaus* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ *ei ole injektio eikä surjektio. Sen osoittamiseksi, että kuvaus* $f\colon X \to Y$ *ei ole injektio, riittää löytää eri alkioita* $x, x' \in X$, $x \neq x'$ *joille pätee* $f(x) = f(x')$. *Valitaan* $x = 2$, $x' = -2$. *Tällöin* $f(x) = 4 = f(x')$. *Näin ollen* f *ei ole injektio.*

Kuvauksen f *kuvajoukolle pätee* $\operatorname{Im} f = [0, \infty[$. *Negatiiviset luvut eivät kuulu kuvauksen* f *kuvaan, joten kuvaus ei ole surjektio. Periaatteessa sen todistamiseen, että* f *ei ole surjektio riittää vain yksi vasta-esimerkki - alkion* -1 *alkukuva* $f^{-1}(-1)$ *on tyhjä.*

Määritellään kuvaus $g\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$ *samalla säännöllä* $g(x) = x^2$.
On tärkeätä ymmärtää, *että* g *ja* f *ovat eri kuvauksia, vaikka ne on annettu samassa lähtöjoukossa samalla säännöllä. Kuvauksen määritelmään liittyy siis aina (muun muassa) informaatio sen maalijoukosta. Muuttamalla maalijoukko saadaan eri kuvaus, vaikka se ei vaikuttaisi kuvauksen arvoihin.*

Kuvaus g *on surjektio, mutta se ei edelleenkään ole injektio. Itse asiassa muuttamalla jokaisen kuvauksen* $f\colon X \to Y$ *maalijoukko sen kuvajoukoksi* $\operatorname{Im} f$, *saadaan surjektiivinen kuvaus.*

Kuvaus $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(n) = 2n$ *on injektio, mutta se ei ole surjektio. Osoitetaan, että kuvaus on injektio. Olkoot* n, m *luonnollisia lukuja ja oletetaan, että*

$$h(n) = 2n = 2m = h(m).$$

Tällöin jakamalla kahdella saadaan $n = m$. *Alkiot siis kuvautuvat samalle alkiolle jos ja vain jos se ovat samat. Toisin sanoen kuvaus on injektio. Kuvaus ei ole surjektio, koska parittomat luvut eivät ole kuvauksen kuvajoukossa.*

Kuvaus $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = 2x$ *on bijektio. Nimittäin jos* $k(x) = 2x = 2y = k(y)$, *niin jakamalla kahdella saadaan* $x = y$, *joten* k *on injektio. Toisaalta, jos* y *on mielivaltainen reaaliluku, niin* $k(y/2) = y$. *Näin ollen* k *on myös surjektio.*

Jos kuvaus $f\colon X \to Y$ on bijektio, voidaan määritellä sen **käänteiskuvaus** $f^{-1}\colon Y \to X$ seuraavasti. Olkoon $y \in Y$. Tällöin, koska f on bijektio, alkion y alkukuva $f^{-1}(y)$ sisältää täsmälleen yhden alkion x. Asetetaan $f^{-1}(y) = x$. Tämä sääntö määrittelee kuvauksen $f^{-1}\colon Y \to X$, jota sanotaan funktion f käänteiskuvaukseksi.

Edellisessä esimerkissä tarkasteltiin bijektiota $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = 2x$. Sen käänteiskuvaus $k^{-1}\colon Y \to X$ on määritelty kaavalla $k^{-1}(y) = y/2$.

Kuvausten yhdistäminen

Olkoon $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$ kuvauksia. Oletamme siis, että kuvauksen g lähtöjoukko on sama kuin kuvauksen f maalijoukko. **Yhdistetty kuvaus** $g \circ f\colon X \to Z$ määritellään kaavalla

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Esimerkiksi olkoot $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$. Tällöin

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 1,$$

$$(f \circ g)(x) = (x + 1)^2.$$

Jos kuvaukset f, g ovat molemmat injektioita (surjektioita, bijektioita), myös yhdistetty kuvaus on injektio (surjektio, bijektio).

Pidämme tunnettuna seuraavan tavan karakterisoida bijektiiviset kuvaukset.

Lemma 1. *Kuvaus $f\colon X \to Y$ on bijektio jos ja vain jos on olemassa kuvaus $g\colon Y \to X$ jolle*

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \ \ \textit{ja}$$

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y\,.$$

Jos tällainen kuvaus on olemassa, se on yksikäsitteinen ja itse asiassa $g = f^{-1}$ on tällöin f:n käänteiskuvaus.

Äärelliset joukot

Koska tällä kurssilla päätutkimuskohteena olevia *suhteikkoja* oletetaan olevan joukkoina äärellisiä, palautetaan mieleen äärellisten joukkojen määritelmä sekä perusominaisuudet.

Pidämme tunnettuna luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ja sen ominaisuudet. Niistä kenties tärkein ominaisuus on seuraava, jota sanotaan myös **induktioaksioomaksi**:
Jokaisessa joukon $\mathbb{N}$ epätyhjässä osajoukossa on (yksikäsitteinen) pienin alkio.

Induktioperiaate:
Olkoon $l \in \mathbb{N}$ ja olkoon $P(n)$ mikä tahansa väite, joka koskee luonnollisia lukuja $n \geqslant l$. Oletetaan, että seuraavat väitteet pitävät paikkaansa.

1. *$P(l)$ on tosi (***alkuaskel***).*
2. *Jokaisella $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant l$ siitä, että $P(k)$ on tosi, seuraa, että myös $P(k+1)$ on tosi (***induktioaskel***).*

Tällöin $P(n)$ on tosi kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geqslant l$.

Induktioperiaate voidaan helposti johtaa induktioaksioomasta, mutta sivuutamme tarkan todistuksen. Intuitiivisesti induktioperiaate voidaan perustella seuraavasti. Alkuaskeleen nojalla $P(l)$ on tosi. Tällöin soveltamalla induktioaskelta arvolla $k = l$ saadaan, että $P(l+1)$ on tosi. Soveltamalla induktioaskelta arvolla $k = l+1$ saadaan, että $P(l+2)$ on tosi jne. Tässä mielessä induktioperiaate muistuttaa dominoefektiä.

Esimerkki 4. *Todistetaan induktiolla, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geqslant 1$ pätee*

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Jokaisella luonnollisella luvulla $n \geqslant 1$ merkitään siis $P(n)$:llä yhtälöä

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tässä vasemmalla puolella on summa kaikista luonnollisista luvuista luvusta 1 lukuun n asti.

Alkuaskel: *Kun $n = 1$ väite on muotoa*

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2},$$

josta nähdään suoraan, että $P(1)$ pätee.

Induktioaskel: *Oletetaan, että $P(k)$ on tosi jollekin luonnolliselle luvuille $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$. Oletamme siis todeksi yhtälön*

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Tehtävänä on osoittaa (tämän tiedon avulla), että myös $P(k+1)$ on tosi eli yhtälö

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

pätee arvolla $n = k+1$. Induktio-oletuksesta seuraa, että

$$1 + 2 + \ldots + (k+1) = (1 + 2 + \ldots + k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

Tämä on juuri väite $P(k+1)$.

Induktioperiaatteesta on olemassa myös toinen muoto, joka on toisinaan hyödyllinen.

Induktioperiaate, versio 2:
Olkoon $l \in \mathbb{N}$ ja olkoon $P(n)$ mikä tahansa väite, joka koskee luonnollisia lukuja $n \geqslant l$. Oletetaan, että seuraavat väitteet pitävät paikkaansa.

*1. $P(l)$ on tosi (***alkuaskel***).*

*2. Olkoon $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant l$. Oletetaan, että $P(m)$ on tosi kaikilla $l \leqslant m < k$. Tällöin $P(k)$ on tosi (***induktioaskel***).*

Tällöin $P(n)$ on tosi kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geqslant l$.

Jokaisella luonnollisella luvulla $n \in \mathbb{N}$ merkitään

$$[n] = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\} = \{1, \ldots, n\}.$$

Tällöin

$$[0] = \varnothing,$$
$$[1] = \{1\},$$
$$[2] = \{1, 2\}$$

ja niin edelleen.

Määritelmä 1. *Joukkoa A sanotaan* **äärelliseksi**, *jos jollakin $n \in \mathbb{N}$ on olemassa bijektio $f\colon [n] \to A$.*

Bijektio $f\colon [n] \to A$ antaa erään tavan numeroida äärellisen joukon A alkioita luonnollisilla luvuilla $1, \ldots, n$. Lukua n sanotaan tällöin joukon A **kooksi** tai **alkioiden lukumääräksi**. Voidaan osoittaa, että äärellisen joukon koko on **yksikäsitteisesti määritelty** eli jos on olemassa bijektio $f\colon [n] \to A$, niin ei ole olemassa bijektioita $f\colon [m] \to A$ millään toisella luonnollisella luvulla $m \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Äärellisen joukon A kokoa merkitsemme symbolilla $|A|$.

Äärellisille joukoille voi todistaa väitteitä *induktiolla joukon koon suhteen.*

Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja. Tällöin on olemassa bijektio $f\colon A \to B$ jos ja vain jos $|A| = |B|$. Toisin sanoen äärelliset joukot ovat samankokoisia jos ja vain jos niiden välillä on bijektio. Äärettömien joukkojen kohdalla tämä ominaisuus otetaan ”samankokoisuuden” määritelmän lähtökohdaksi.

Induktioaksiooman nojalla jokaisessa N:n epätyhjässä osajoukossa A on pienin alkio. Suurinta alkiota sen sijaan $\mathbb{N}$:n epätyhjässä osajoukossa ei välttämättä ole. Esimerkiksi koko luonnollisten lukujen joukossa $\mathbb{N}$ ei ole suurinta alkiota. Kuitenkin pätee seuraava: **Olkoon $A \subset \mathbb{N}$ äärellinen. Tällöin joukossa A on suurin alkio**.

Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja ja olkoon $f\colon A \to B$ kuvaus. Tällöin

- Jos $|A| < |B|$, kuvaus f ei voi olla surjektio.
- Jos $|A| > |B|$, kuvaus f ei voi olla injektio (”lokeroperiaate”).
- Jos $|A| = |B|$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
  - f on injektio.
  - f on surjektio.
  - f on bijektio.

Esimerkki 5. *Tarkastellaan jotakin (tietysti äärellistä) epätyhjää ihmisten muodostamaa joukkoa X, esimerkiksi isoissa juhlissa läsnä olevien ihmisten joukkoa. Oletetaan, että $|X| > 1$. Jokaisella $x \in X$ merkitään $k(x)$:llä kuinka monta tuttavaa x:llä on joukossa X. Tuttavuussuhde oletetaan tässä olevan molemminpuolinen. Olkoon $|X| = n$. Tällöin $0 \leqslant k(x) \leqslant n-1$ jokaisella $x \in X$ (ei voi olla itsensä tuttu). Tuttavien lukumäärä on siis kuvaus $k\colon X \to Y$, missä*

$$Y = \{l \in \mathbb{N} \mid 0 \leqslant l \leqslant n-1\}.$$

Kumpikin joukoista X ja Y on äärellinen. Lisäksi niillä on sama koko, $|X| = n = |Y|$. Edellisen nojalla kuvaus k on injektio jos ja vain jos se on surjektio.

Osoitetaan, että k ei ole surjektio. Tehdään vasta-oletus: k on surjektio. Tällöin erityisesti on olemassa $x \in X$ jolle $k(x) = 0$ sekä $x' \in X$ jolle $k(x') = n-1$. Koska oletamme, että $n > 1$, $x \neq x'$. Kuvauksen k määritelmästä seuraa, että x ei tunne joukosta X ketään ja x' taas tuntee kaikki X:n jäsenet (itsensä lukuunottamatta). Mutta tämä on mahdotonta - jos x' tuntee kaikki muut ihmiset joukosta X, hän tuntee myös x:n, jolla ei pitäisi olla tuttavia joukossa X. Koska päädyttiin ristiriitaan, k ei ole surjektio.

Näin ollen k ei myöskään voi olla injektio. Tämä tarkoittaa sitä, että joukossa X on olemassa alkiot x, x', $x \neq x'$ joille $k(x) = k(x')$. Olemme todistaneet, että missään tahansa ihmisten joukossa, jossa on ainakin kaksi ihmistä, on aina olemassa kaksi eri ihmistä, joilla on tässä joukossa täsmälleen sama tuttavien lukumäärä (mahdollisesti nolla).

Summa-ja erotusperiaate:
Olkoot A ja B äärellisiä joukkoja. Tällöin myös niiden yhdiste $A \cup B$ on äärellinen ja

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Tämän yhtälön perustelu ja ymmärtäminen on helppoa - jos joukon A alkioiden lukumäärä lasketaan vaikkapa yksi kerrallaan ja sitten tehdään samoin joukon B alkioiden kohdalla, joukoille yhteiset alkiot, eli leikkauksen $A \cap B$ alkiot, joutuvat lasketuksi kaksi kertaa. Näin ollen kompensoimalla tämä eli vähentämällä leikkauksen koon $|A \cap B|$ saadaan yhdisteen alkioiden lukumäärä.

Induktiolla voidaan yleistää summa-ja erotusperiaatetta mielivaltaisen monen äärellisen joukon tapaukseen. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_n$ äärellisiä joukkoja. Tällöin

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq J \subset [n]} (-1)^{|J|+1} |\bigcap_{j \in J} A_j|.$$

Esimerkiksi tapauksessa $n = 3$ saadaan

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Yleisen summa-ja erotusperiaatteen todistus löytyy esim. H. Junnilan monisteesta ”Kombinatoriikka”.

Relaatiot

Yllä annettu määritelmä kuvaukselle ei ole matemaattisesti tarkka - mitä ”sääntö” tai ”tapa liittää alkioita toisiinsa” tarkoittaa matemaattisena operaationa? Nykymatematiikassa on tapana pyrkiä koodamaan kaikki käsitteet joukko-opillisiksi ja kaikkien käsiteltävien objektien on oltava joukkoja.

Nykyään kuvauksia yllensä määritellään formaaliesti relaatioiden erikoistapauksena. Tästä syystä, ja koska tämän kurssin keskeiset oliot suhteikot ja verkot määritellään relaatioiden kautta, kerrataan relaatioiden perusteoria.

Järjestetty pari (x, y) on otus, joka koostuu kahdesta alkiosta x, y, jotka **luetellaan järjestyksessä**, ensimmäisenä x ja toisena y. Alkio x on tällöin parin (x, y) **ensimmäinen koordinaatti** ja alkio y **on toinen koordinaatti**. **Järjestyksellä on väliä**, eli (järjestetty) pari (x, y) ei ole sama kuin pari (y, x) **paitsi**, kun $x = y$.
Tässä mielessä järjestetty pari (x, y) eroaa joukosta $\{x, y\}$ (”järjestämätön” pari), sillä joukko $\{x, y\}$ on sama asia kuin joukko $\{y, x\}$.

Järjestettyjen parien tärkeä **karakteristinen ominaisuus** on seuraava.
Olkoot (x, y) ja (z, u) kaksi järjestettyä paria. Tällöin

$$(x, y) = (z, u)$$

pätee **jos ja vain jos** $x = z$ ja $y = u$.
Käytännössä kaikki järjestämättömien parien ominaisuudet seuraavat tästä karakteristisesta ominaisuudesta. On mahdollista antaa järjestetylle parille täysin joukko-opillinen määritelmä, mutta yleensä ilman sitä pärjätään, kunhan pidetään mielessä karakteristisen ominaisuuden.

Olkoot X ja Y joukkoja. **Karteesinen tulo** $X \times Y$ saadaan muodostamalla kaikki mahdolliset järjestetyt parit (x, y), missä x on joukon X alkio ja y on joukon Y alkio. Joukko-opillisen notaation mukaisesti karteesisen tulon $X \times Y$ määritelmä voidaan kirjoittaa lyhyemmin muodossa

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Relaatio R joukkojen X ja Y välillä on mikä tahansa karteesisen tulon $X \times Y$ **osajoukko**. Näin ollen R on joukko, joka koostuu *joistakin* järjestetyistä pareista (x, y), missä $x \in X$, $y \in Y$. Kun pari (x, y) kuuluu relaatioon R, voidaan havainnollisesti ajatella, että alkio y *on liitetty* alkioon x ja niiden välille on muodostettu ”yhteys” eli ”suhde”. Englanninkielinen termi matemaattiselle relaatiolle onkin ”relation” eli kirjaimellisesti ”suhde”. Koska järjestetyssä parissa järjestyksellä on merkitystä, täytyy ehdottomasti muistaa, että tämä yhteys on yleisesti ottaen *yksisuuntainen*. Toisin sanoen, jos (x, y) kuuluu relaatioon R, ”käänteinen” pari (y, x) ei välttämättä enää ole relaatiossa R.

Kun $R \subset X \times Y$ on relaatio joukkojen X ja Y välillä sanomme joukkoa X relaation *lähtöjoukoksi* ja joukkoa Y sen *maalijoukoksi*. Kuten kuvaustenkin tapauksessa, tässä yhteydessä ajatellaan, että relaatioon sisältyy myös informaatio sen lähtö- ja maalijoukoista (jotka eivät välttämättä näy, jos R annetaan pelkästään järjestettyjen parien joukkona).

Esimerkki 6. *(1) Olkoon X kaikkien naisten ja Y kaikkien miesten muodostamat joukot. Ehto ”x on y:n äiti” määrittelee erään relaation R joukkojen X ja Y välillä. Pari (x, y) kuuluu tähän relaatioon jos ja vain jos x on y:n äiti. Joukko-opillisen notaation mukaisesti R:n määritelmä voidaan kirjoittaa lyhyemmin muodossa*

$$R = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, x \text{ on } y\text{:n äiti}\}.$$

(2) *Olkoot X ja Y kuten yllä. Määritellään relaatio S joukkojen X ja Y välillä seuraavasti:*

$$S = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, x \text{ on } y\text{:n äiti ja } y \text{ on vanhempi kuin } x\}.$$

Tämä relaatio on niin sanottu **tyhjä relaatio**, *sillä se on joukkona tyhjä - kukaan ei voi olla vanhempi kuin oma äitinsä*[1]. *Tämä on täysin sallittua relaation määritelmän mukaan - onhan tyhjä joukko jokaisen joukon osajoukko, muun muassa joukon $X \times Y$ osajoukko.*

(3) *Toinen "ääripää"-esimerkki relaatiosta joukkojen X ja Y välillä on koko karteesinen tulo $X \times Y$.*

Huomaa, että "relaatio joukkojen X ja Y välillä" on (yleisesti ottaen) eri asia kuin "relaatio joukkojen Y ja X välillä". Relaatio joukkojen X ja Y välillä on joukon $X \times Y$ osajoukko, kun taas relaatio joukkojen Y ja X välillä on joukon $Y \times X$ osajoukko. Yleisesti ottaen karteesiset tulot $X \times Y$ ja $Y \times X$ ovat eri joukkoja. Yksi huomattava ja tärkeä poikkeus tästä on tapaus jossa $X = Y$.

Kun $R \subset X \times X$, relaatiota R sanotaan yksinkertaisesti joukon X relaatioksi. Relaatiota $R \subset X \times Y$ joukkojen X ja Y sanotaan myös *relaatioksi joukolta X joukkoon Y*. Tällaisesta nimitystavasta selviää heti joukkojen X ja Y järjestys tarkasteltavassa kontekstissa.

Olkoon $R \subset X \times Y$ relaatio. Olkoot $A \subset X$ ja $B \subset Y$. Joukon A **kuva** relaatiossa R on joukon Y osajoukko

$$R(A) = \{y \in Y \mid \text{ on olemassa } x \in A \text{ siten, että } (x, y) \in R\}.$$

Joukon B **alkukuva** relaatiossa R on joukon X osajoukko

$$R^{-1}(B) = \{x \in X \mid \text{ on olemassa } y \in B \text{ siten, että } (x, y) \in R\}.$$

Esimerkki 7. *Olkoon X kaikkien naisten ja Y kaikkien miesten muodostamat joukot. Määritellään relaatio R seuraavasti:*

$$R = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, x \text{ on } y\text{:n sisko}\}.$$

Olkoon

$$A = \{x \in X \mid x\text{:llä on tasan kaksi velejä}\},$$

Tällöin kuvajoukko $R(A)$ koostuu sellaisista miehistä y, joilla on olemassa ainakin yksi sisko x joukossa A. Koska tällöin joukon A määritelmän mukaan x:llä on tasan kaksi veliä, toinen niistä on y, joten $R(A)$ itse asiassa koostuu tasan niistä miehistä, joilla on tasan yksi veli ja ainakin yksi sisko.

Olkoon

$$B = \{y \in Y \mid y\text{:llä ei ole siskoa}\}.$$

Tällöin alkukuva $R^{-1}(B)$ on tyhjä.

Kaikkien miesten joukon Y alkukuva $R^{-1}(Y)$ koostuu tasan niistä naisista, jotka ovat jonkun miehen sisko eli sellaisista naisista joilla on ainakin yksi veli.

[1] Aikamatkailua ei oteta huomioon!

Erikoistapauksina kuvista ja alkukuvista määritellään joukkojen X ja Y välisen relaation R kuvajoukko $\operatorname{Im} R$ ja lähtöjoukko $\operatorname{dom}(R)$ seuraavasti:

$$\operatorname{Im} R = R(X),$$

$$\operatorname{dom}(R) = R^{-1}(Y).$$

Edellisessä esimerkissä relaation R kuva koostuu tasan niistä miehistä, joilla on ainakin yksi sisko ja lähtöjoukko koostuu sellaisista naisista joilla on ainakin yksi veli.

Jokaiselle relaatiolle $R \subset X \times Y$ voidaan määritellä sen **käänteisrelaatio** $R^{-1} \subset Y \times X$. Tämä tehdään yksinkertaisesti ”kääntämällä” jokainen relaation R alkio. Täsmällisemmin

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

Huomaa, että alkukuva $R^{-1}(B)$ on sama asia kuin joukon B kuva relaation R^{-1} suhteen, joka myös merkitään $R^{-1}(B)$. Näin ollen merkintätavat eivät johda sekaannuksiin tässä yhteydessä.

Esimerkiksi jos R on relaatio ”y on x:n veli” naisten joukon X ja miesten joukon Y välillä, niin käänteisrelaatio R^{-1} on relaatio ”x on y:n sisko”.

Kuvauksen määritelmä relaationa

Olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus joukolta X joukkoon Y. Tällöin voidaan konstruoida joukkojen X ja Y välinen relaatio

$$R_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}.$$

Tätä relaatiota sanotaan kuvauksen f **graafiksi**. Kuvauksen määritelmästä seuraa, että kuvauksen graafilla on seuraavia ominaisuuksia:

1. $\operatorname{dom} R_f = X$,
2. jos joillakin $x \in X$, $y, z \in Y$ pätee $(x, y), (x, z) \in R_f$, niin $y = z$.

Näistä ensimmäisen ehto sanoo tasan sen, että jokaisella lähtöjoukon X alkiolla x on kuva $f(x)$. Toinen taas sanoo sen, että tämä kuva on yksikäsitteinen.

Nämä graafin ominaisuudet otetaan kuvauksen formaalin määritelmän lähtökohdaksi. Virallisesti kuvaukselle annetaan siis seuraava määritelmä.

Määritelmä 2. *Kuvaus $f\colon X \to Y$ on sellainen joukkojen X ja Y välinen relaatio, jolle pätee seuraavat ehdot:*

1. $\operatorname{dom} f = X$,
2. *jos joillakin $x \in X$, $y, z \in Y$ pätee $(x, y), (x, z) \in f$, niin $y = z$.*

Ehto 1. ilmaisee, että jokaiseen lähtöjoukon alkioon x on liitetty *ainakin yksi* maalijouon alkio y. Ehto 2. taas kertoo sen, että tällainen alkio y on yksikäsitteinen. Yhdessä ne siis ilmaisevat sen, että funktio liittää jokaiseen $x \in X$ **täsmälleen yhden** $y \in Y$. Tämä on juuri sitä, mitä funktion ”pitäisi tarkoittaa”.

Määritelmän mukaan kuvaus ja sen graafi siis samastetaan täysin - joukko-opillisena otuksena kuvaus **on** täsmälleen sama asia kuin sen graafi.

Käytännössä kuvauksia annetaan ja käsitellään harvoin formaalisti relaationa, vaan ajatellaan yleensä niiden olevan eräs "sääntö", joka liittää alkioon x sen kuva-alkion $f(x)$. Tällöin kuva-alkion $f(x)$ on oltava hyvin määritelty, olemassa ja yksikäsitteinen jokaisella $x \in X$. Formaali joukko-opillinen määritelmä tarvitaan siihen, että olisi mahdollista tehdä kuvauksiin liittyvien väitteiden tarkastelu ja todistus täysin aukottomaksi formaalista näkökulmasta.

Esimerkki 8. *Olkoon X kaikkien naisten ja Y kaikkien miesten muodostamat joukot. Relaatio*

$$R = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \text{ on } x\text{:n isä}\}$$

on funktio - onhan jokaisella naisella tasan yksi isä. Relaatio

$$S = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \text{ on } y\text{:n äiti}\}$$

ei ole funktio, sillä ei kaikilla naisilla on poikia (tai edes lapsia). Näin ollen S ei toteuda kuvausen ehtoa 1. Myös ehto 2. ei toteudu, koska naisella voi olla useampi poika, jolloin "kuva-alkio" ei olisi yksikäsitteinen.

Identtisen kuvauksen $\mathrm{id}_X : X \to X$ graafia

$$\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$$

sanotaan joukon $X \times X$ **diagonaaliksi**.

Aikaisemmin kuvaukselle annetut joukkojen kuvien ja alkukuvien määritelmät antavat saman tuloksen kuin relaatiolle annetut kuvan ja alkukuvan määritelmät, jos kuvaus ajatellaan relaationa.

Koska jokainen kuvaus $f : X \to Y$ on myös relaatio $f : X \times Y$, erityisesti jokaisella kuvauksella $f : X \to Y$ on olemassa sen käänteisrelaatio $f^{-1} \subset Y \times X$. **Tämä relaatio ei kuitenkaan yleensä ole itse kuvaus**. Itse asiassa pätee seuraava tulos.

Lemma 2. *Olkoon $f : X \to Y$ kuvaus. Tällöin sen käänteisrelaatio f^{-1} on itse kuvaus $f^{-1} : Y \to X$ jos ja vain jos f on bijektio. Tällöin käänteisrelaatio f^{-1} on sama asia kuin kuvauksen f käänteiskuvaus.*

Relaatio kuvauksen yleistyksenä

Kuvaus on siis relaation erikoistapaus. Asiaa voidaan ajatellaan myös toisesta näkökulmasta - relaatio on kuvauksen yleistys. Historiallisesti näin olikin, kuvauksia (funktioita) on käsitelty ja sovellettu vuosisatoja ennen kuin relaatiot ja ylipäätään joukko-opillinen lähestymistapa keksittiin. Siihen mennessä monet kuvauksiin liittyvät merkintätavat ja määritelmät (esim. kuva, alkukuva, kuvausten yhdistäminen, kuvauksen kääntäminen) olivat niin vakiintuneita, että niitä ei kannattanut enää muuttaa, vaan vastaavat relaatioille tehdyt yleistykset oli pakko saattaa sopusointuun vanhojen käsitteiden ja merkintöjen kanssa. Jossain tapauksessa tämä saattaa johtaa omituisilta vaikuttaviin asioihin.

Hyvä esimerkki tästä on seuraava sopimus, jota käytämme tällä kurssilla.

Olkoon $R \subset X \times Y$ relaatio. Kun $(x, y) \in R$ merkitään yRx.
Tämä merkintätapa näyttää ”nurinkuriselta” ja hyvin usein kirjallisuudessa käytetäänkin toista, ”suoraa” merkintätapaa, jonka mukaan yRx tarkoittaa samaa asiaa kuin $(y, x) \in R$. Seuraamme kuitenkin yllämainittua Heikki Junnilan ”Kombinatoriikka” ja ”Verkot”-monisteissa sovittua ja käytettyä notataatiota. Syy tähän on siinä, että tämä ”nurinkurinen” merkintätapa sopii hyvin monien kuvausten maailmasta relaatioille periytyville käsitteille.

Kun kuvausta $f\colon X \to Y$ ajatellaan relaationa $f \subset X \times Y$, merkintä $(x, y) \in f$ eli, uuden sopimuksen mukaan yfx, tarkoittaa samaa asiaa kuin $y = f(x)$. Huomaa, että molemmissa merkintätavoissa symbolit y, f, x esiintyvät samassa järjestyksessä. Olennaisesti tämä on se syy, miksi valitaan myös relaatiolle ”nurinkuriselta” näyttävän merkintätavan.

Yksi esimerkki käsitteestä, jonka näkökulmasta tämä uusi merkintätapa näyttääkin luontevalta on **yhdistetyn relaation** käsite.

Olkoon $R \subset X \times Y$ relaatio joukolta X joukkoon Y ja $S \subset Y \times Z$ relaatio joukolta Y joukkoon Z. Tällöin **yhdistetty relaatio** $S \circ R \subset X \times Z$ määritellään seuraavasti:

$$S \circ R = \{(x, z) \in X \times Z \mid \text{ on olemassa } y \in Y \text{ siten, että } (x, y) \in R, (y, z) \in S\}.$$

Kuten kuvaustenkin kohdalla yhdistämisen symboli $\circ$ usein jätetään kirjoittamatta ja merkitään $S \circ R$ yksinertaisesti SR. Edellä sovittua merkintätapaa käyttäen voidaan yhdistetyn relaation määritelmä kirjoittaa alkioiden tasolla seuraavassa muodossa:

$$z(SR)x \Leftrightarrow \text{ on olemassa } y \in Y \text{ siten, että } zSy \text{ ja } yRx.$$

Havainnollisesti ajatelleen siis y ikään kuin ”supistetaan” relaatioiden zSy, yRx ”keskeltä”, jolloin saadaan $zSRx$.

Helposti nähdään, että kun S ja R ovat molemmat kuvauksia, myös $S \circ R$ on sama asia kuin vanha kunnon yhdistetty kuvaus.

Täytyy muistaa, että yhdistetty relaatio SR on määritelty ainoastaan silloin kun relaation S lähtöjoukko on sama kuin relaation R maalijoukko.

Esimerkki 9. *Olkoon X kaikkien ihmisten muodostama joukko, Y kaikkien naisten muodostama joukko ja Z kaikkien miesten muodostama joukko. Olkoot $R \subset X \times Y$, $S \subset Y \times Z$ relaatiot joille*

$$yRx \Leftrightarrow y \text{ on } x\text{:n äiti.}$$

$$zSy \Leftrightarrow z \text{ on } y\text{:n veli,}$$

Tällöin $z(SR)x$ tarkoittaa sitä, että z on x:n eno.

Relaatio joukolta itseensä

Relaatiota $R \subset X \times X$ joukolta X itseensä sanotaan usein yksinkertaisesti joukon X relaatioksi. Helposti nähdään, että kun R ja S ovat joukon X relaatioita, niin yhdistetty relaatio SR sekä käänteisrelaatio R^{-1} ovat myöskin joukon X relaatiota.

Esimerkiksi diagonaalirelaatio

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

on relaatio joukossa X (mille tahansa joukolle X).

Joukon X relaatio R voidaan aina yhdistää itsensä kanssa, toisin sanoen voidaan muodostaa relaatio $R \circ R$. Tästä relaatiosta käytetään luonnollista merkintää R^2. Vastaavasti merkitään $R^2 \circ R = R^3$ ja niin edelleen. Yleisesti voidaan induktiolla määritellä relaation R *n's potenssi* R^n kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \in \mathbb{N}$:

$$R^0 = \Delta_X,$$

$$R^1 = R,$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Olkoon R relaatio joukossa X. Tällöin sanotaan, että

- R on *refleksiivinen* jos kaikilla $x \in X$ pätee xRx.
- R on *symmetrinen* jos ehdosta yRx aina seuraa xRy.
- R on *transitiivinen* jos ja vain jos ehdoista xRy, yRz seuraa aina xRz.
- R on *antisymmetrinen* jos ehdoista yRx ja xRy aina seuraa $x = y$.
- R on *irrefleksiivinen* jos xRx ei päde millään $x \in X$.

Voidaan helposti tehdä seuraavia havaintoja:

- Joukon X relaatio R on refleksiivinen jos ja vain jos $\Delta_X \subset R$ ja on irrefleksiivinen jos ja vain jos $\Delta_X \cap X = \emptyset$.
- Joukon X relaatio R on symmetrinen jos ja vain jos $R^{-1} = R$ ja on antisymmetrinen jos ja vain jos $R \cap R^{-1} \subset \Delta_X$.
- Joukon X relaatio R on transitiivinen jos ja vain jos $R \circ R \subset R$.

Mielivaltainen joukon X relaatio R ei välttämättä ole refleksiivinen, symmetrinen tai transitiivinen. Tällöin voidaan ”täydentämällä” R, eli lisäämällä siihen uusia pareja, tehdä siitä kuitenkin refleksiivinen, symmetrinen tai transitiivinen. Tarkemmin sanottuna tehdään seuraavia määritelmiä.

- Joukon X relaation R **refleksiivinen sulkeuma** on relaatio $R \cup \Delta_X$. Se on pienin X:n relaatio, joka on refleksiivinen ja sisältää relaation R kaikki alkiot.
- Joukon X relaation R **symmetrinen sulkeuma** on relaatio $R \cup R^{-1}$. Se on pienin X:n relaatio, joka on symmetrinen ja sisältää relaation R kaikki alkiot.
- Joukon X relaation R **transitiivinen sulkeuma** on relaatio

  $$R^\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup \dots.$$

  Se on pienin joukon X relaatio, joka on transitiivinen ja sisältää relaation R kaikki alkiot.

Relaation R transitiivisen sulkeuman R^∞ määritelmä voidaan esittää alkioiden tasolla seuraavasti. Olkoon $k \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$. Tällöin pätee yR^kx jos ja vain jos on olemassa sellaiset $x_1, \ldots, x_{k+1} \in X$ (ei välttämättä erilaiset!) joille $x_1 = y$, $x_{k+1} = x$ ja x_iRx_{i+1} kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Tämä nähdään helposti induktiolla k:n suhteen.

Tästä seuraa, että ehto $yR^\infty x$ on tosi jos ja vain jos on olemassa $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 1$ ja sellaiset $x_1, \ldots, x_{k+1} \in X$ (ei välttämättä erilaiset!) joille $x_1 = x$, $x_{k+1} = y$ ja x_iRx_{i+1} kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Voidaan ajatella, että alkiot x_i muodostavat *ketjun* $(x_1, \ldots, x_{k+1})$, jonka pituus on $k + 1$. Transitiivisessa sulkeumassa alkiosta y ikään kuin kuljetaan alkion x asti tällaista ketjua pitkin.

Yleensä, jos X on ääretön joukko, voi hyvinkin käydä, että transitiivisen sulkeuman muodostamiseksi täytyy käydä läpi mielivaltaisen pitkiä ketjuja. Äärelliselle joukolle kuitenkin pätee seuraava tulos.

Lemma 3. *Olkoon X äärellinen joukko, $|X| = n \in \mathbb{N}$. Olkoon R mikä tahansa relaatio joukossa X. Tällöin relaation R transitiiviselle sulkeumalle pätee*

$$R^\infty = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^{n-1} \cup R^n.$$

Todistus. Aloitamme osoittamalla seuraavan väitteen. Oletetaan, että $m > n$. Osoitetaan, että jos yR^mx, niin on olemassa $m' < m$ siten, että $yR^{m'}x$.

Oletetaan, että yR^mx, missä $m > n$. Tällöin on olemassa $(m+1)$-pituinen ketju $(x_1, \ldots, x_{m+1})$, jolle $x_1 = y$, $x_{m+1} = x$ ja x_iRx_{i+1} kaikilla $i = 1, \ldots, k$. Tarkastellaan kuvausta $\alpha\colon [m] \to X$,

$$\alpha(i) = x_i.$$

Tämä kuvaus käy läpi kaikki ketjun $(x_1, \ldots, x_{m+1})$ jäsenet **paitsi viimeisen**.

Koska $m > n = |X|$, kuvaus α ei voi olla injektio (laatikkoperiaate). Näin ollen joillakin $i, j \in [m]$, $i \neq j$ pätee $x_i = x_j$. Voidaan olettaa, että $i < j$. Tällöin ketju $(x_1, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_{m+1})$ on ketju y:stä x:ään ja tämän ketjun pituus on $m' < m + 1$. Väite on osoitettu.

On näytetty, että jos $m > n$ ja yR^mx, niin on olemassa $m' < m$ siten, että $yR^{m'}x$. Osoitetaan tämän avulla, että

$$R^\infty \subset \bigcup_{i=1}^{n} R^i.$$

Oletetaan, että $yR^\infty x$. Tällöin transitiivisen sulkeuman määritelmän nojalla on olemassa $m \in \mathbb{N}$ jolle pätee yR^mx. Induktioaksiooman nojalla on olemassa **pienin** tällainen $m \in \mathbb{N}$. Tällöin $m \leqslant n$, koska muuten, edellä osoitetun nojalla on olemassa $m' < m$ jolle $yR^{m'}x$ ja tämä on ristiriidassa sen kanssa, että m on *pienin* tällainen luku. Näin ollen $m \leqslant n$, mistä seuraa, että.

$$(x, y) \in \bigcup_{i=1}^{n} R^i.$$

Tämä todistaa sen, että

$$R^\infty \subset \bigcup_{i=1}^{n} R^i.$$

Käänteinen sisältävyys $\bigcup_{i=1}^{n} R^i \subset R^\infty$ on selvä. $\square$

Jonot

Järjestetty pari (x, y) voidaan ajatella **jonona** (listana) alkioista x, y, koska ne luetellaan tietyssä järjestyksessä - ensimmäisenä alkiona x ja toisena y.
Luonnollinen yleistys tästä on mielivaltaisen pituinen **jono** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (joita olemme käyttäneet jo aikaisemmin yllä).

n-jono, missä $n \in \mathbb{N}$, on järjestetty luettelo objekteista $x_1, \ldots, x_n$. Hieman täsmällisemmin n-jono voidaan ajatella kuvauksena α, jonka lähtöjoukko on $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Tällöin $x_i = \alpha(i)$. Koska kuvauksen ei tarvitse olla injektio, jonossa alkiot voi hyvinkin toistua. Jos α on injektio, jonoa sanotaan *yksinkertaiseksi*. Luonnollinen luku n on jonon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **pituus**.

Esimerkiksi $(1, 2, 1)$ on 3-jono, joka ei ole yksinkertainen. Mikä tahansa järjestetty pari (x, y) on 2-jono. Se on yksinkertainen jos ja vain jos $x \neq y$. 1-jono on muotoa (x). Sallimme myös tapauksen $n = 0$ eli **tyhjän jonon** $()$.

Jonojen karakteristinen ominaisuus on yleistys parien karakteristista ominaisuudesta. Käytämme sitä jonojen yhtäsuuruuden määritelmänä. Jonojen karakteristinen ominaisuus sanoo seuraavaa. Olkoot $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ jonoja. Tällöin

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

jos ja vain jos $n = m$ ja $x_i = y_i$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$.
Toisin sanoen jonot ovat samoja silloin ja vain silloin kun ne ovat samanpituisia ja niissä luetellaan samoja alkioita täsmälleen samassa järjestyksessä.