Heikki Junnila

VERKOT

LUKU I JOUKOISTA JA RELAATIOISTA

LUKU II SUHTEIKOT JA VERKOT

LUKU III VERKON RENKAAT

LUKU IV PUUT

I

Joukoista ja relaatioista

1. Joukkojen symmetrinen erotus.

Seuraavassa määrittelemme laskutoimituksen käsitteen ja tarkastelemme eräitä laskutoimituksella varustettuja joukkoja, nk. “ryhmiä”. Lopuksi määrittelemme annetun joukon potenssijoukossa laskutoimituksen, joukkojen “symmetrisen erotuksen”, jolla varustettuna potenssijoukosta tulee ryhmä.

I 1.1 Määritelmä Olkoon A joukko. *Binäärioperaatio* eli *(kaksipaikkainen) laskutoimitus* joukossa A on kuvaus $A \times A \to A$.

Seuraavassa tarkoitamme termillä “laskutoimitus” aina kaksipaikkaista laskutoimitusta. Toisinaan puhumme “joukon A laskutoimituksista” kun tarkoitamme laskutoimituksia joukossa A.

Kun $\otimes$ on laskutoimitus joukossa A, käytämme joukon $A \times A$ alkion (a, b) kuva–alkiolle $\otimes((a, b))$ yleensä lyhennettyä merkintää $a \otimes b$.

Joukon A laskutoimituksen $\otimes$ *rajoittuma* joukkoon $B \subset A$ on kuvaus $\otimes|B \times B$; tämä kuvaus on joukon B laskutoimitus jos ja vain jos $\otimes(B \times B) \subset B$, toisin sanoen, jos ja vain jos kaikilla $b, b' \in B$ on voimassa $b \otimes b' \in B$.

I 1.2 Esimerkkejä **(a)** Merkitsemme Rel_A:lla kaikkien joukon A relaatioiden muodostamaa joukkoa, ts., $\mathrm{Rel}_A = \mathcal{P}(A \times A)$. Relaatioiden yhdisteleminen $\circ : (R, Q) \mapsto R \circ Q$ on laskutoimitus joukossa Rel_A. Koska kahden kuvauksen $A \to A$ yhdistelmä on kuvaus $A \to A$, näemme, että laskutoimituksen $\circ$ rajoittuma kaikkien kuvausten $A \to A$ muodostamaan joukkoon on kyseisen joukon laskutoimitus. Koska kahden injektion (kahden surjektion) yhdistetty kuvaus on

injektio (surjektio), niin myös laskutoimituksen $\circ$ rajoittuma kaikkien injektioiden (tai kaikkien surjektioiden, tai kaikkien bijektioiden) muodostamaan joukkoon on kyseisen joukon laskutoimitus.
(b) Kuvaukset $(B, C) \mapsto B \cup C$, $(B, C) \mapsto B \cap C$ ja $(B, C) \mapsto B \setminus C$ ovat joukon $\mathcal{P}(A)$ laskutoimituksia jokaisella joukolla A. $\square$

Tarkastelemme nyt eräitä laskutoimitusten ominaisuuksia.

I 1.3 Määritelmä Olkoon $\otimes$ joukon A laskutoimitus.
Laskutoimitus $\otimes$ on *assosiatiivinen* eli *liitännäinen*, mikäli kaikilla $a, b, c \in A$ on voimassa $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$.
Laskutoimitus $\otimes$ on *kommutatiivinen* eli *vaihdannainen*, mikäli kaikilla $a, b \in A$ on voimassa $a \otimes b = b \otimes a$.

Määritelmistä seuraa suoraan, että laskutoimitus on assosiatiivinen (kommutatiivinen), mikäli se on jonkun assosiatiivisen (kommutatiivisen) laskutoimituksen rajoittuma.

I 1.4 Esimerkkejä **(a)** Relaatioiden yhdisteleminen $\circ$ on kombinatoriikan kurssimonisteen Lauseen I 1.6 nojalla assosiatiivinen laskutoimitus joukossa Rel_A. Tämä laskutoimitus ei yleensä ole kommutatiivinen: esimerkiksi kuvauksille $f, g : [3] \to [3]$, missä $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$ ja $g(1) = 2$, $g(2) = 1$, $g(3) = 3$, on voimassa $f \circ g \neq g \circ f$.
(b) Joukon $\mathcal{P}(A)$ laskutoimitukset $\cup$ ja $\cap$ ovat assosiatiivisia ja kommutatiivisia; sen sijaan laskutoimituksella $\setminus$ ei ole kumpaakaan ominaisuutta, mikäli $A \neq \emptyset$. $\square$

Laskutoimituksella varustettu joukko on pari $(A, \otimes)$, missä A on joukko ja $\otimes$ on laskutoimitus joukossa A.

I 1.5 Määritelmä (a) Olkoon $(A, \otimes)$ laskutoimituksella varustettu joukko. Joukon A alkio e on $(A, \otimes)$:n *neutraalialkio*, mikäli jokaisella $a \in A$ on voimassa $a \otimes e = e \otimes a = a$.
(b) Olkoon $(A, \otimes)$ laskutoimituksella varustettu joukko, jolla on neutraalialkio e. Joukon A alkio b on A:n alkion a *käänteisalkio*, mikäli on voimassa $a \otimes b = b \otimes a = e$.

Jos laskutoimituksella varustetulla joukolla $(A, \otimes)$ on neutraalialkio, niin se on yksikäsitteinen: jos e ja e' ovat neutraalialkioita, niin $e = e \otimes e' = e'$. Mikäli laskutoimitus $\otimes$ on assosiatiivinen, niin myös käänteisalkiot ovat yksikäsitteisiä: jos A:n alkiot b ja b' ovat alkion a käänteisalkioita, niin $b = b \otimes e = b \otimes (a \otimes b') = (b \otimes a) \otimes b' = e \otimes b' = b'$.

I 1.6 Esimerkkejä **(a)** Joukon A identtisyysrelaatio Δ_A on laskutoimituksella varustetun joukon $(\mathrm{Rel}_A, \circ)$ neutraalialkio. Jos f on bijektio $A \to A$, niin tällöin f:n käänteiskuvaus f^{-1} on f:n käänteisalkio $(\mathrm{Rel}_A, \circ)$:ssa.
(b) Tyhjä joukko on $(A, \cup)$:n neutraalialkio ja A on $(A, \cap)$:n neutraalialkio. □

Algebrassa tarkastellaan yhdellä tai useammalla laskutoimituksella varustettuja joukkoja; määrittelemme nyt tällaisista "algebrallisista struktuureista" kaikkein perustavanlaatuisimman.

I 1.7 Määritelmä *Ryhmä* on assosiatiivisella laskutoimituksella varustettu joukko, jolla on neutraalialkio ja jonka jokaisella alkiolla on käänteisalkio.
Kommutatiivinen ryhmä eli *Abelin ryhmä* on ryhmä, jonka laskutoimitus on kommutatiivinen.

Eräitä kaikkein tärkeimmistä diskreetissä matematiikassa esiintyvistä ryhmistä ovat ns. *symmetriset ryhmät*:

I 1.8 Lause *Olkoon X joukko. Merkitsemme S_X:llä kaikkien bijektioiden $X \to X$ muodostamaa joukkoa. Tällöin pari $(S_X, \circ)$ on ryhmä. Ryhmän neutraalialkio on X:n identtinen kuvaus ja jokaisella $\varphi \in S_X$, alkion φ käänteisalkio on φ:n käänteiskuvaus φ^{-1}.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Joukon X symmetristä ryhmää $(S_X, \circ)$ merkitään yleensä vain lyhyesti S_X:llä. Jos $X = [n]$, niin ryhmästä käytetään merkintää S_n.

Esimerkki I 1.4(a) osoittaa, että symmetriset ryhmät ovat (nimestään huolimatta) yleensä epäkommutatiivisia.

Aikaisemmissa esimerkeissä kohtasimme eräitä potenssijoukon laskutoimituksia; tarkastelemme vielä erästä tällaista laskutoimitusta.

Olkoot D ja E joukkoja. Joukkojen D ja E *symmetrinen erotus* on joukko $(D \setminus E) \cup (E \setminus D)$; tästä joukosta käytetään merkintää $D \Delta E$. Joukko $D \Delta E$ koostuu niistä alkioista, jotka kuuluvat joko joukkoon D tai joukkoon E, mutta eivät molempiin; täten on voimassa $D \Delta E = (D \cup E) \setminus (D \cap E)$.

I 1.9 Lemma *Olkoot C, D ja E joukon A osajoukkoja. Tällöin on voimassa:*
(a) $C\Delta\emptyset = C$ *ja* $C\Delta C = \emptyset$.
(b) $C\Delta A = A \setminus C$ *ja* $C\Delta(A \setminus C) = A$.
(c) $C\Delta D = D\Delta C$.
(d) $(C\Delta D) \cap E = (C \cap E)\Delta(D \cap E)$.

Todistus. Kohtien (a),(b) ja (c) tulokset seuraavat suoraan operaation Δ määritelmän nojalla. Todistetaan kohta (d):

$$\begin{aligned}(C\Delta D) \cap E &= [(C \setminus D) \cup (D \setminus C)] \cap E \\ &= [(C \setminus D) \cap E] \cup [(D \setminus C) \cap E] \\ &= [(C \cap E) \setminus (D \cap E)] \cup [(D \cap E) \setminus (C \cap E)] \\ &= (C \cap E)\Delta(D \cap E)\ . \qquad \square\end{aligned}$$

Joukko–operaatiot $\cup$ ja $\cap$ liittyvät loogisiin operaatioihin $\vee$ ("tai") ja $\wedge$ ("ja") seuraavasti: jos E ja F ovat joukkoja, niin alkiolle x pätee, että $x \in E \cup F \iff x \in E \vee x \in F$ ja $x \in E \cap F \iff x \in E \wedge x \in F$. Joukko–operaatio Δ puolestaan liittyy loogiseen operaatioon XOR ("exclusive or" eli "tai muttei ja"). Merkitään operaatiota XOR symbolilla $\sqcup$; tällöin lauseille P ja Q, lause $P \sqcup Q$ on tosi jos ja vain jos jompikumpi, mutta ei kumpikin, lauseista P ja Q on tosi. Toisin sanoen, $P \sqcup Q \iff (P \vee Q) \wedge [\neg(P \wedge Q)]$.

I 1.10 Lemma *Olkoot D ja E joukon A osajoukkoja. Tällöin jokaisella $a \in A$ on voimassa $a \in D\Delta E \iff a \in D \sqcup a \in E$.*

Todistus.

$$\begin{aligned}a \in D\Delta E &\iff a \in (D \cup E) \setminus (D \cap E) \\ &\iff (a \in D \vee a \in E) \wedge [\neg(a \in D \wedge a \in E)] \\ &\iff a \in D \sqcup a \in E\ . \qquad \square\end{aligned}$$

Edellinen tulos tarjoaa meille mahdollisuuden käyttää hyväksi loogisen operaation $\sqcup$ ominaisuuksia tutkiessamme joukko–operaatiota Δ.

I 1.11 Lemma *Olkoot P, Q ja S lausemuuttujia. Tällöin*

$$(P \sqcup Q) \sqcup S \iff P \sqcup (Q \sqcup S).$$

Todistus. Väitetyn ekvivalenssin voimassaolo seuraa totuustaulukosta (jossa T="tosi" ja F="epätosi"):

P	Q	S	$P \sqcup Q$	$(P \sqcup Q) \sqcup S$	$Q \sqcup S$	$P \sqcup (Q \sqcup S)$
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

Edellisten tulosten avulla voimme nyt helposti todistaa seuraavan tuloksen, joka osoittaa, että joukko–operaatio Δ on assosiatiivinen.

I 1.12 Lause *Olkoot C, D ja E joukkoja. Tällöin on voimassa*

$$(C\Delta D)\Delta E = C\Delta(D\Delta E).$$

Todistus. Jokaiselle alkiolle x on Lemmojen I 1.10 ja I 1.11 nojalla voimassa

$$\begin{aligned} x \in (C\Delta D)\Delta E &\iff (x \in C\Delta D) \sqcup (x \in E) \\ &\iff [(x \in C) \sqcup (x \in D)] \sqcup (x \in E) \\ &\iff (x \in C) \sqcup [(x \in D) \sqcup (x \in E)] \\ &\iff x \in C\Delta(D\Delta E)\ . \qquad \square \end{aligned}$$

Lemman I 1.9 kohdan (a) nojalla saamme Lauseelle I 1.12 seuraavan korollaarin.

I 1.13 Korollaari *Olkoon A joukko. Tällöin pari $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ on ryhmä. Ryhmän neutraalialkio on $\emptyset$ ja jokaisella $C \in \mathcal{P}(A)$, alkion C käänteisalkio on C.*

Operaation Δ assosiatiivisuuden nojalla voidaan muotoa $(C\Delta D)\Delta E$ ja $C\Delta(D\Delta E)$ olevat lausekkeet kirjoittaa muotoon $C\Delta D\Delta E$. Yleisemmin, jos $B_1, ..., B_n$ ovat joukkoja ja $n \geq 2$, niin määritellään joukko $B_1\Delta \cdots \Delta B_n$ rekursiivisesti asettamalla $B_1\Delta \cdots B_2 = B_1\Delta B_2$ ja jokaisella $1 < k < n$, $B_1\Delta \cdots \Delta B_{k+1} = (B_1\Delta \cdots \Delta B_k)\Delta B_{k+1}$.

Seuraava tulos antaa yksinkertaisen luonnehdinnan edellä määritellyille joukoille.

I 1.14 Lemma *Olkoot $B_1, ..., B_n$ joukkoja ja $n > 1$. Tällöin $x \in B_1 \Delta \cdots \Delta B_n$ jos ja vain jos joukossa $\{i \in [n] : x \in B_i\}$ on pariton määrä alkioita.*

Todistus. Suoritamme todistuksen induktiolla luvun n suhteen.

$$n = 2: \; x \in B_1 \Delta B_2 \iff |\{i \in [2] : x \in B_i\}| = 1$$

$$\iff \text{luku } |\{i \in [2] : x \in B_i\}| \text{ on pariton}.$$

$n > 2$: Oletamme, että väite pätee n:ää pienemmille luvuille. Nyt on voimassa

$$x \in B_1 \Delta \cdots \Delta B_n \iff x \in (B_1 \Delta \cdots \Delta B_{n-1}) \Delta B_n \iff$$

$$\text{joko } |\{i \in [n-1] : x \in B_i\}| \text{ pariton ja } x \notin B_n$$

$$\text{tai } |\{i \in [n-1] : x \in B_i\}| \text{ parillinen ja } x \in B_n$$

$$\iff |\{i \in [n] : x \in B_i\}| \text{ pariton}. \qquad \square$$

Annamme lopuksi kaavan kahden äärellisen joukon symmetrisen erotuksen alkioiden lukumäärälle.

I 1.15 Lemma *Olkoot C ja D äärellisiä joukkoja. Tällöin*

$$|C \Delta D| = |C| + |D| - 2 \cdot |C \cap D| \; .$$

Todistus. On voimassa $C \Delta D = (C \setminus D) \cup (D \setminus C)$. Joukot $C \setminus D$ ja $D \setminus C$ ovat erillisiä, joten on voimassa $|(C \setminus D) \cup (D \setminus C)| = |C \setminus D| + |D \setminus C|$. Edelleen on voimassa $C \setminus D = C \setminus (C \cap D)$ ja tästä seuraa, että $|C \setminus D| = |C| - |C \cap D|$. Vastaavasti on voimassa yhtälö $|D \setminus C| = |D| - |C \cap D|$. Edellä esitetyn nojalla pätee, että

$$\begin{aligned} |C \Delta D| &= |C \setminus D| + |D \setminus C| \\ &= |C| - |C \cap D| + |D| - |D \cap C| \\ &= |C| + |D| - 2 \cdot |C \cap D| \; . \qquad \square \end{aligned}$$

I 1.16 Korollaari *Olkoot C ja D äärellisiä joukkoja, joissa kummassakin on parillinen määrä alkioita. Tällöin joukossa $C \Delta D$ on parillinen määrä alkioita.*

2. Relaation sisältämät kuvaukset

Tarkastelemme nyt äärellisten joukkojen X ja Y välistä relaatiota $R \subset X \times Y$ ja etsimme ehtoja, joiden vallitessa R sisältää erityyppisiä kuvauksia $X \to Y$.

Jos relaatio $f \subset R$ on kuvaus $X \to Y$, niin jokaisella $x \in X$ on voimassa $f(x) \in R\{x\}$ ja täten $R\{x\} \neq \emptyset$. Jos kääntäen tiedämme, että $R\{x\} \neq \emptyset$ jokaisella $x \in X$, niin on intuitiivisesti selvää, että voimme määritellä kuvauksen $f : X \to Y$ "valitsemalla" jokaisella $x \in X$ kuva-alkioksi $f(x)$ jonkun alkion joukon Y epätyhjästä osajoukosta $R\{x\}$. Tämä intuitiivisesti itsestäänselvä tulos, kyseisenlaisen yht'aikaisen "valinnan" mahdollisuus, vaatii kuitenkin täsmällisen todistuksen, jonka voimme suorittaa luonnollisten lukujen ominaisuuksien avulla.

I 2.1 Lause *(Äärellinen valinta–aksiooma) Olkoon Y äärellinen joukko ja $R \subset X \times Y$ sellainen relaatio, että $R\{x\} \neq \emptyset$ jokaisella $x \in X$. Tällöin R sisältää kuvauksen $X \to Y$.*

Todistus. Koska Y on äärellinen, on olemassa luku $n \in \mathbb{N}$ ja bijektio $\phi : [n] \to Y$. Määrittelemme kuvauksen $f : X \to Y$ seuraavasti: merkitsemme $E_x = \phi^{-1}(R\{x\})$ jokaisella $x \in X$ ja merkitsemme k_x:llä epätyhjän joukon E_x pienintä lukua ja $f(x)$:llä joukon $R\{x\}$ alkiota $\phi(k_x)$. Tällöin f on kuvaus $X \to Y$ ja $f \subset R$. □

Jos R sisältää injektion $f : X \to Y$, niin f on bijektio $X \to f(X)$ ja täten jokaisella $A \subset X$ voimassa $|f(A)| = |A|$; koska $f(A) \subset R(A)$, on edelleen voimassa $|R(A)| \geq |A|$. Osoitamme, että näin saatu välttämätön ehto injektion olemassaololle on myös riittävä.

I 2.2 Lause *(Hallin Lause) Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja ja olkoon $R \subset X \times Y$ sellainen relaatio, että jokaisella $A \subset X$ on voimassa $|R(A)| \geq |A|$. Tällöin R sisältää injektion $X \to Y$.*

Todistus. Todistamme lauseen väitteen induktiolla luvun $|X|$ suhteen. Jos $|X| = 0$, niin tyhjä joukko on injektio $X \to Y$ ja väite on triviaalisti voimassa. Oletamme, että $|X| > 0$ ja väite on todistettu relaatioille $R' \subset X' \times Y'$, missä $|X'| < |X|$.

Tarkastelemme kahta eri tapausta.

Oletamme aluksi, että jokaisella $\emptyset \neq A \subsetneqq X$ on voimassa $|R(A)| > |A|$. Olkoon x_0 joku X:n alkio. Koska on voimassa $|R\{x_0\}| \geq |\{x_0\}|$, niin $R\{x_0\} \neq \emptyset$. Olkoon y_0 joku joukon $R\{x_0\}$ alkio eli olkoon voimassa $(x_0, y_0) \in R$. Merkitsemme $X' = X \smallsetminus \{x_0\}$, $Y' = Y \smallsetminus \{y_0\}$ ja $R' = R \cap (X' \times Y')$. Osoitamme, että R' toteuttaa lauseen ehdon. On voimassa $R'(\emptyset) = \emptyset$ ja täten $|R'(\emptyset)| = |\emptyset|$. Jokaisella $\emptyset \neq A \subset X'$ on voimassa $A \neq X$ ja täten $|R(A)| > |A|$; tästä seuraa, koska $R(A) \subset R'(A) \cup \{y_0\}$, että $|R'(A)| \geq |R(A)| - 1 \geq |A|$. Olemme osoittaneet, että R' toteuttaa lauseen ehdon. Koska on voimassa $|X'| < |X|$, niin induktio–oletuksesta seuraa, että on olemassa sellainen injektio $g : X' \to Y'$, että $g \subset R'$. Merkitsemme $f = g \cup \{(x_0, y_0)\}$ ja panemme merkille, että koska g on injektio ja koska pätee, että $x_0 \notin X'$ ja $y_0 \notin Y'$, niin f on injektio $X' \cup \{x_0\} \to Y' \cup \{y_0\}$ eli $X \to Y$. Lisäksi on voimassa $f \subset R$, koska $g \subset R' \subset R$ ja $(x_0, y_0) \in R$.

Oletamme seuraavaksi, että on olemassa sellainen joukko $A \subset X$, että $\emptyset \neq A \neq X$ ja $|R(A)| = |A|$. Merkitsemme

$$S = R \cap (A \times R(A)) \quad \text{ja} \quad T = R \cap ((X \smallsetminus A) \times (Y \smallsetminus R(A)))\,.$$

Jokaisella $E \subset A$ on voimassa $S(E) = R(E)$ ja täten edelleen $|S(E)| \geq |E|$. Koska $|A| < |X|$, niin relaatio S sisältää induktio–oletuksen nojalla injektion $f : A \to R(A)$. Osoitamme, että relaatio T sisältää injektion $X \smallsetminus A \to Y \smallsetminus R(A)$; koska $A \neq \emptyset$, niin $|X \smallsetminus A| < |X|$ ja induktio–oletuksesta seuraa, että väitteen todistamiseksi riittää näyttää, että jokaisella $E \subset X \smallsetminus A$ on voimassa $|T(E)| \geq |E|$. Olkoon siis E joukon $X \smallsetminus A$ osajoukko. Lauseen oletuksen nojalla pätee, että $|R(E \cup A)| \geq |E \cup A|$. Lisäksi on voimassa $R(E \cup A) = R(E) \cup R(A)$ ja täten edelleen $|R(E \cup A)| = |R(E) \cup R(A)| = |R(E) \smallsetminus R(A)| + |R(A)|$. Koska $E \subset X \smallsetminus A$, on voimassa $|E \cup A| = |E| + |A|$. Edellä esitetystä seuraa, että on voimassa $|R(E) \smallsetminus R(A)| + |R(A)| \geq |E| + |A|$ ja tästä seuraa yhtälön $|R(A)| = |A|$ nojalla, että $|R(E) \smallsetminus R(A)| \geq |E|$. Koska $E \subset X \smallsetminus A$ ja $T = R \cap ((X \smallsetminus A) \times (Y \smallsetminus R(A)))$, on voimassa yhtälö $T(E) = R(E) \smallsetminus R(A)$ ja täten edelleen epäyhtälö $|T(E)| \geq |E|$. Edelläesitetyn nojalla on olemassa injektio $g : X \smallsetminus A \to Y \smallsetminus R(A)$. Nyt näemme helposti, että $f \cup g$ on injektio $X \to Y$ ja $f \cup g \subset S \cup T \subset R$. $\square$

Tietyissä tilanteissa saamme hyvin havainnollisen tulkinnan sille ehdolle, että relaatio $R \subset X \times Y$ sisältää injektion $X \to Y$. Jos esimerkiksi X on jokin ihmisjoukko ja Y on joukko työtehtäviä ja jos määrittelemme relaation $R \subset X \times Y$

asettamalla $(x, y) \in R$, mikäli henkilö x voi suorittaa työn y, niin tähän tilanteeseen liittyvällä *työllistämisongelmalla* on ratkaisu jos ja vain jos on olemassa sellainen injektio $f : X \to Y$, että $f \subset R$; kutsumme tällaista injektiota ihmisten X *sovittamiseksi* työpaikkoihin Y. Joissakin muissa tilanteissa annetun relaation sisältämän injektion olemassaolo saa erilaisia tulkintoja; niinpä Hallin lause tunnetaan englanninkielisessä kirjallisuudessa usein nimellä “Hall’s marriage theorem”.

Hallin lause antaa siis teoreettisen luonnehdinnan sille, että annetulle sovittamisongelmalle löytyy ratkaisu. Lauseen ehdon voimassaolon tarkistaminen ei kuitenkaan usein ole käytännössä mahdollista; lauseessa on myös se käytännön puute, että se takaa vain “sovituksen” olemassaolon, mutta ei anna mitään menetelmää eli algoritmia sovituksen konstruoimiseksi.

Esitämme nyt eräitä seurauslauseita Hallin lauseelle. Ensimmäinen tulos liittyy nk. *erillisten edustajien ongelmaan.* Annetussa ihmisjoukossa A on erilaisia ryhmiä, jotka yhdessä muodostavat joukon A osajoukkoperheen $\mathcal{A}$. Tutkimme, millä ehdoilla on mahdollista löytää ryhmille $\mathcal{A}$ *erilliset edustajat* eli valita kustakin ryhmästä $B \in \mathcal{A}$ edustaja a_B siten, että $a_B \neq a_C$ aina kun $B \neq C$. Toisin sanoen tutkimme, millä ehdoilla on mahdollista muodostaa sellainen edustajisto $T \subset A$, että kaikki ryhmät $B \in \mathcal{A}$ ovat edustettuina T:ssä ja kukin T:n jäsen edustaa vain yhtä ryhmää $B \in \mathcal{A}$. Mikäli tässä tilanteessa määrittelemme relaation $R \subset \mathcal{A} \times A$ asettamalla $(B, a) \in R \iff a \in B$, niin erillisten edustajien olemassaolo on yhtäpitävää sen kanssa, että relaatio R sisältää injektion $\mathcal{A} \to A$; koska lisäksi jokaiselle $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ pätee, että $R(\mathcal{A}') = \bigcup \mathcal{A}'$, niin Hallin lause antaa seuraavan tuloksen.

I 2.3 Korollaari *(Radon Lause) Olkoon $\mathcal{A}$ perhe äärellisen joukon A osajoukkoja. Perheen $\mathcal{A}$ joukoilla on erilliset edustajat jos ja vain jos jokaisella $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ on voimassa $|\bigcup \mathcal{A}'| \geq |\mathcal{A}'|$.*

Mainitsimme edellä, että Hallin lauseen ehdon voimassaoloa voi olla käytännössä hankala tarkistaa. Seuraavassa korollaarissa esiintyvä (riittävä, muttei välttämätön) ehto on paljon yksinkertaisempi ja helpommin tarkistettavissa:

I 2.4 Korollaari *Olkoon $R \subset X \times Y$ äärellisten joukkojen X ja Y välinen epätyhjä relaatio. Oletamme, että on olemassa sellainen luonnollinen luku k, että jokaisella $x \in X$ on voimassa $|R\{x\}| \geq k$ ja jokaisella $y \in Y$ on voimassa $|R^{-1}\{y\}| \leq k$. Tällöin R sisältää injektion $X \to Y$.*

Todistus. Riittää näyttää, että Hallin lauseen ehto on voimassa. Olkoon A joukon X osajoukko. Merkitsemme $S = R \cap (A \times R(A))$. Tällöin on voimassa $S = \{(x,y) \in R : x \in A\} = \bigcup_{x \in A} \{x\} \times R\{x\}$, joten

$$|S| = \Sigma_{x \in A} |\{x\} \times R\{x\}| = \Sigma_{x \in A} |R\{x\}| \geq \Sigma_{x \in A} k = k|A|.$$

Toisaalta voimme kirjoittaa $S = \bigcup_{y \in R(A)} (R^{-1}\{y\} \cap A) \times \{y\}$ ja täten on voimassa

$$|S| = \Sigma_{y \in R(A)} |(R^{-1}\{y\} \cap A) \times \{y\}| = \Sigma_{y \in R(A)} |R^{-1}\{y\} \cap A| \leq \Sigma_{y \in R(A)} k = k|R(A)|.$$

Yhdistämällä edelliset lukua $|S|$ koskevat epäyhtälöt (ja ottamalla huomioon, että $k > 0$ koska $R \neq \emptyset$), saamme epäyhtälön $|R(A)| \geq |A|$. $\square$

Harjoitustehtävä: Osoita, että jos yllä $|X| = |Y|$, niin R sisältää k erillistä injektiota $X \to Y$.

Esimerkki Olkoon X n–joukko. Merkitsemme jokaisella $k \leq n$ $\mathcal{P}_k(X) = \{A \subset X : |A| = k\}$. Olkoon luonnolliselle luvulle l voimassa epäyhtälö $l < \frac{n}{2}$. Tällöin on olemassa sellainen injektio $f : \mathcal{P}_l(X) \to \mathcal{P}_{l+1}(X)$, että $A \subset f(A)$ jokaisella $A \in \mathcal{P}_l(X)$. Tämä seuraa Korollaarin I 2.4 tuloksesta, sillä jokainen perheen $\mathcal{P}_l(X)$ joukko A sisältyy täsmälleen $n-l$:ään perheen $\mathcal{P}_{l+1}$ joukkoon (joukkoihin $A \cup \{x\}$, $x \in X \setminus A$) ja jokainen perheen $\mathcal{P}_{l+1}(X)$ joukko B sisältää täsmälleen $l+1$ perheen $\mathcal{P}_l$ joukkoa (joukot $B \setminus \{x\}$, $x \in B$). Koska $l < \frac{n}{2}$, niin $n - l > l$ ja täten $n - l \geq l + 1$; edellisen korollaarin tulosta voidaan siis soveltaa valitsemalla $k = l + 1$ ja $R = \{(A; B) \in \mathcal{P}_l(X) \times \mathcal{P}_{l+1}(X) : A \subset B\}$. $\square$

Harjoitustehtävä: Osoita, että jos edellä $l > \frac{n}{2}$, niin on olemassa sellainen injektio $f : \mathcal{P}_l(X) \to \mathcal{P}_{l-1}(X)$, että jokaisella $A \in \mathcal{P}_l(X)$ on voimassa $f(A) \subset A$.

Mikäli emme löytäisikään annetulle sovittamisongelmalle (esim. annetulle työllistämisongelmalle) täydellistä ratkaisua, niin haluaisimme kuitenkin usein löytää "mahdollisimman hyvän" osittaisen ratkaisun (haluamme esimerkiksi löytää työtä mahdollisimman monelle työnhakijalle). Seuraava tulos antaa lausekkeen mahdollisimman suuren "osittaisen sovituksen" koolle.

I 2.5 Lause *Olkoon $R \subset X \times Y$ äärellisten joukkojen X ja Y välinen relaatio. Merkitsemme δ:lla suurinta luvuista $|A| - |R(A)|$, missä $A \subset X$. Tällöin R sisältää sellaisen injektion f, että $|f| = |X| - \delta$.*

Todistus. Valitsemalla $A = \emptyset$ näemme, että $\delta \geq 0$. Olkoon Z sellainen joukko, että $|Z| = \delta$ ja $Z \cap Y = \emptyset$. Määrittelemme relaation $Q \subset X \times (Y \cup Z)$ asettamalla $Q = R \cup (X \times Z)$ ja osoitamme, että Q toteuttaa Hallin lauseen ehdon. Panemme aluksi merkille, että jokaisella $A \subset X$ on voimassa $Q(A) = R(A) \cup Z$. Koska $R(A) \subset Y$, on voimassa $R(A) \cap Z = \emptyset$ ja täten edelleen $|Q(A)| = |R(A)| + |Z| = |R(A)| + \delta$. Koska luvun δ määrittelyn nojalla pätee, että $|R(A)| + \delta \geq |A|$, niin edellisen nojalla on voimassa $|Q(A)| \geq |A|$. Olemme osoittaneet, että Q toteuttaa Hallin lauseen ehdon. Kyseisen lauseen nojalla on olemassa sellainen injektio $g : X \to Y \cup Z$, että $g \subset Q$. Merkitsemme $f = g \cap R$. Tällöin f on relaation R sisältämä injektio.

Osoitamme, että f toteuttaa epäyhtälön $|f| \geq |X| - \delta$. Koska $g \subset Q = R \cup (X \times Z)$, on voimassa $f = g \setminus \{(x, u) \in g : u \in Z\}$. Koska g on injektio, on lisäksi $|\{(x, u) \in g : u \in Z\}| \leq |Z| = \delta$. Edellisen nojalla $|f| = |g| - |\{(x, u) \in g : u \in Z\}| \geq |g| - \delta$. Koska g on kuvaus $X \to Y$, on voimassa $|g| = |X|$. Tästä seuraa yhdessä aikaisemman kanssa, että $|f| \geq |X| - \delta$.

Osoitamme lopuksi, että $|f| \leq |X| - \delta$. Kun merkitsemme $A = f^{-1}(Y)$, niin f on kuvaus $A \to Y$, joten $|f| = |A|$. Riittää siis näyttää, että on voimassa $|A| \leq |X| - \delta$ eli $\delta \leq |X \setminus A|$. Olkoon B sellainen X:n osajoukko, että $|B| - |R(B)| = \delta$. Koska f on injektio, on voimassa $|f(B \cap A)| = |B \cap A|$ ja tästä seuraa, koska $f(B \cap A) \subset R(B \cap A)$, että on voimassa $|R(B \cap A)| \geq |B \cap A|$ ja täten edelleen $|R(B)| \geq |B \cap A|$. Edellisen nojalla pätee, että $\delta = |B| - |R(B)| \leq |B| - |B \cap A| = |B \setminus A|$; tästä seuraa, että on voimassa $\delta \leq |X \setminus A|$. □

HARJOITUSTEHTÄVIÄ LUKUUN I

1. Todista Lause I 1.8.

2. Osoita, että symmetrinen ryhmä $(S_X, \circ)$ on kommutatiivinen silloin ja vain silloin kun joukossa X on korkeintaan kaksi alkiota.

3. Joukon X *metriikka* on sellainen kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{N}$, että seuraavat ehdot toteutuvat kaikilla $x, y, z \in X$:
   1^o $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
   2^o $d(x,y) = d(y,x)$ *Symmetrisyysehto*
   3^o $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *Kolmioepäyhtälö*
   Osoita, että jos A on äärellinen joukko, niin kaava $d_\Delta(B,C) = |B \Delta C|$ määrittelee metriikan d_Δ joukossa $X = \{B : B \subset A\}$.

4. Näytä, että kaikille joukoille A,B ja C pätee yhtälö
   $$(A \cap B)\Delta(B \cap C)\Delta(C \cap A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)\ .$$

5. Erään matematiikan laitoksen assistenteista A tutkii algebraa ja joukko–oppia, B analyysiä ja geometriaa, C analyysiä ja topologiaa, D analyysiä ja topologiaa, E algebraa ja geometriaa, F geometriaa ja topologiaa, H analyysiä ja joukko–oppia ja I geometriaa ja joukko–oppia. Valitse assistenttien A,B,..., I keskuudesta viiden henkilön toimikunta edustamaan algebran, analyysin, geometrian, joukko–opin ja topologian tutkijoita siten, että kukin toimikunnan jäsen edustaa vain yhtä tutkimusaloistansa.

   Joukon X osajoukkoperheille $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ löytyy *yhteiset edustajat*, jos voidaan valita sellaiset alkiot $x_A \in A$ ja $y_B \in B$ kaikilla $A \in \mathcal{A}$ ja $B \in \mathcal{B}$, että $\{x_A : A \in \mathcal{A}\} = \{y_B : B \in \mathcal{B}\}$.

6. Osoita, että äärellisen joukon X osituksilla $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on yhteiset edustajat jos ja vain jos on voimassa $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ ja perheellä $\mathcal{A}$ on sellainen esitys $\mathcal{A} = \{A_B : B \in \mathcal{B}\}$, että $B \cap A_B \neq \emptyset$ jokaisella $B \in \mathcal{B}$.

7. Osoita, että jos $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat äärellisen joukon X osituksia ja $|A| = |B|$ kaikilla $A \in \mathcal{A}$ ja $B \in \mathcal{B}$, niin $\mathcal{A}$:lla ja $\mathcal{B}$:llä on yhteiset edustajat. [*Ohje*: Hallin lause]

8. Etsi perheille $\mathcal{A} = \Big\{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{7,8,9\},\{10,11,12\},\{13,14,15\}\Big\}$ ja
   $\mathcal{B} = \Big\{\{2,4,8\},\{3,6,9\},\{5,10,15\},\{7,13,14\},\{1,11,12\}\Big\}$ yhteiset edustajat.

9. Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ sellaisia äärellisen joukon X n-osituksia, että jokaisella $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ on voimassa
   $$|\{B \in \mathcal{B} : B \subset \bigcup \mathcal{E}\}| \leq |\mathcal{E}|\,.$$

Osoita, että $\mathcal{A}$:lla ja $\mathcal{B}$:llä on yhteiset edustajat.

10. Pystytkö viittaamaan 14 sanaan MAANANTAI, TIISTAI, KESKIVIIKKO, TORSTAI, LAUANTAI, SUNNUNTAI, TAMMIKUU, MAALISKUU, HUHTIKUU, TOUKOKUU, ELOKUU, SYYSKUU, LOKAKUU, MARRASKUU 14 eri kirjaimella siten, että kussakin sanassa esiintyy siihen viittaava kirjain? Esitä viittausjärjestelmä, jos sellainen on olemassa tai perustele, miksi sellaista ei voi olla olemassa.

11. Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja. Osoita, että relaatio $R \subset X \times Y$ sisältää surjektion $X \to Y$ jos ja vain jos R sisältää kuvauksen $X \to Y$ ja relaatio R^{-1} sisältää injektion $Y \to X$.

12. Olkoot X ja Y äärellisiä joukkoja. Osoita, että seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä relaatiolle $R \subset X \times Y$:
   A. Relaatio R sisältää surjektion joltakin X:n osajoukolta joukolle Y.
   B. Jokaisella $B \subset Y$ on voimassa $|R^{-1}(B)| \geq |B|$.
   C. Jokaisella $A \subset X$ on voimassa $|R(A)| \geq |A| + |Y| - |X|$.

   [*Ohje*: Hallin Lause ja Lause I 2.5]

13. *Kaksoisstokastinen matriisi* on sellainen neliömatriisi, jonka luvut ovat ei-negatiivisia ja jossa jokaisen (pysty- tai vaaka-) rivin lukujen summa on yksi.
   Jokaisella bijektiolla $\varphi : [n] \to [n]$ määrittelemme $n \times n$-matriisin P_φ asettamalla $P_\varphi = \big(a_{ij}\big)$, missä $a_{ij} = 1$ jos $j = \varphi(i)$ ja $a_{ij} = 0$ jos $j \neq \varphi(i)$. Nämä *permutaatiomatriisit* P_φ ovat kaksoisstokastisia.

   Näytä, että jokainen kaksoisstokastinen matriisi voidaan esittää permutaatiomatriisien konveksina kombinaationa (eli muodossa $\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_k P_k$, missä P_i:t ovat permutaatiomatriiseja, α_i:t ovat ei-negatiivisia reaalilukuja ja $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.

   [*Ohje*: Kun $M = \big(a_{ij}\big)$ on kaksoisstokastinen $n \times n$-matriisi, merkitse $k_M = |\{(i,j) \in [n] \times [n] : a_{ij} > 0\}|$ ja pane merkille, että M on permutaatiomatriisi jos $k_M = n$. Todista väite induktiolla k_M:n suhteen. Kun M on kaksoisstokastinen $n \times n$-matriisi, jolla $k_M > n$, määrittele $R \subset [n] \times [n]$ kaavalla $(i,j) \in R \Longleftrightarrow a_{ij} > 0$. Laske joukon $E \subset [n]$ alkioita vastaavien M:n vaakarivien lukujen summa kahdella eri tavalla ("vaakasuunnassa" ja "pystysuunnassa") osoittaaksesi, että $|R(E)| \geq |E|$. Hallin lause antaa sellaisen bijektion $\varphi : [n] \to [n]$, että $\varphi \subset R$. Merkitse $a = \min\{a_{i\varphi(i)} : i = 1, ..., n\}$ ja sovella induktio-oletusta matriisiin $\frac{1}{1-a}\,(M - aP_\varphi)$.]

Luku II

Suhteikot ja verkot

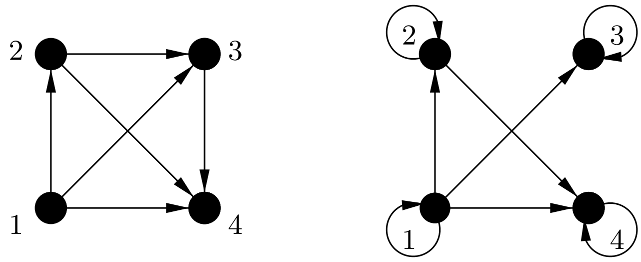
1. Johdanto.

II 1.1 Määritelmä *Suhteikko* on pari $G = (X, R)$, missä X on äärellinen joukko ja R on joukon X relaatio.

Joukon X alkioita kutsutaan suhteikon G *pisteiksi* ja joukkoa R kutsutaan suhteikon G *relaatioksi.*

Kun $G = (X, R)$ on suhteikko, niin joukon X lisäksi myös joukko R on äärellinen, koska $R \subset X \times X$.

Voimme esittää äärellisen joukon $X = \{x_1, ..., x_n\}$ relaation R monella eri tavalla: voimme esimerkiksi luetella kullakin $x \in X$ joukon $R\{x\}$ alkiot tai voimme esittää relaation R $n \times n$– matriisina (a_{ij}), missä $a_{ij} = 1$ kun $(x_i, x_j) \in R$ ja $a_{ij} = 0$ kun $(x_i, x_j) \notin R$. Eräs hyvin havainnollinen esitysmuoto on geometrinen kaavio, missä X:n alkiot esitetään tason pisteinä ja piirretään nuoli alkiota x vastaavasta pisteestä alkiota z vastaavaan pisteeseen silloin kun xRz. Esimerkiksi joukon [4] järjestysrelaation $<$ ja jakorelaation $|$ $(x|z$ kun luku x jakaa luvun $z)$ voimme esittää seuraavasti:



Määrittelemme nyt tähän geometriseen tulkintaan liittyviä käsitteitä ja termejä.

Olkoon X joukko ja x ja z joukon X alkioita. Merkitsemme $\overrightarrow{xz} = \{(z,x)\}$ ja $\overline{xz} = \{(x,z),(z,x)\}$; tällöin on voimassa $\overline{xz} = \overrightarrow{xz} \cup \overrightarrow{zx} = \overline{zx}$. Joukkoa $\overrightarrow{xz}$ kutsumme *nuoleksi* x:stä z:aan; lisäksi sanomme x:n olevan nuolen $\overrightarrow{xz}$ *lähtö* tai sen *alkupiste* ja z:n olevan nuolen $\overrightarrow{xz}$ *maali* tai sen *loppupiste*. Joukkoa $\overline{xz} = \overline{zx}$ kutsumme *x:n ja z:n yhdysviivaksi* tai *x:n ja z:n väliseksi viivaksi* ja sanomme, että x ja z ovat viivan $\overline{xz}$ *päätepisteet* eli *päät*. Joukkoa $\overrightarrow{xx} = \overline{xx}$ kutsumme *silmukaksi* x:ssä.

Olkoon $G = (X,R)$ suhteikko ja olkoot x ja z G:n pisteitä. Sanomme, että joukko $\overline{xz} \cap R$ on *x:n ja z:n välinen yhteys suhteikossa G*. Otamme lisäksi käyttöön seuraavat sanonnat:

$\overline{xz} \cap R = \emptyset$: "*pisteet x ja z ovat erillään G:ssä*".

$\overrightarrow{xz} \subset R$: "*$G$:ssä on nuoli x:stä z:aan*" tai "*z on x:n seuraaja G:ssä*".

$\overline{xz} \subset R$: "*G:ssä on x:n ja z:n välinen viiva*" tai "*x ja z ovat vierekkäin G:ssä*".

$\overrightarrow{xx} \subset R$: "*$G$:ssä on silmukka pisteessä x*".

Otamme vielä käyttöön seuraavat merkinnät. Kun $G = (X,R)$ on suhteikko, niin merkitsemme G:n nuolten joukkoa $\{\overrightarrow{xz} : \overrightarrow{xz} \subset R\}$ symbolilla N_G ja G:n viivojen joukkoa $\{\overline{xz} : \overline{xz} \subset R\}$ symbolilla V_G. Huomaamme, että on voimassa

$$\boxed{\overrightarrow{xz} \in N_G \iff \overrightarrow{xz} \subset R \iff (z,x) \in R \iff xRz \iff x \in R\{z\}}$$

(Ekvivalenssin $xRz \iff \overrightarrow{xz} \subset R$ avulla saamme korjattua ekvivalenssin $xRz \iff (z,x) \in R$ sisältämän "nurinkurisuuden", josta mainitsimme kombinatoriikan monisteen sivuilla 4 ja 5).

Kun $G = (X,R)$ on suhteikko, niin merkitsemme G:n pisteiden joukkoa X symbolilla P_G. Panemme merkille, että joukot P_G ja N_G määrittävät yksikäsitteisesti suhteikon G, sillä $G = (P_G, \bigcup N_G))$. Seuraavassa emme yleensä annakaan suhteikkoa G muodossa (X,R) vaan annamme joukot P_G ja N_G.

Esitämme suhteikon tavallisesti kuviona, missä pisteet ovat tason pisteitä. Kahden pisteen x ja z yhteys suhteikossa esitetään piirtämällä kuvioon x:stä z:hyn osoittava nuoli silloin kun suhteikossa on nuoli x:stä z:hyn. Jos suhteikossa on pisteitä x ja z yhdistävä viiva, niin piirretään joko nuolet molempiin suuntiin tai "kaksisuuntainen nuoli" pisteiden x ja z välille tai näiden asemasta viiva (jana tai käyrä) x:n ja z:n välille.

Suhteikon G piste x on G:n *eristetty piste*, mikäli x on erillään kaikista muista G:n pisteistä.

Jos suhteikon pisteiden joukko on tyhjä, niin tällöin myös suhteikon nuolten ja viivojen joukot ja suhteikon relaatio ovat tyhjiä; kutsumme suhteikkoa $(\emptyset, \emptyset)$ "tyhjäksi suhteikoksi" ja muiden suhteikkojen sanomme olevan "epätyhjiä suhteikkoja". Huomaamme, että epätyhjässäkin suhteikossa voi nuolten joukko olla tyhjä; tällaisessa suhteikossa kaikki pisteet ovat eristettyjä.

II 1.2 Määritelmä Suhteikko G on *symmetrinen* jos kaikki G:n epätyhjät yhteydet ovat viivoja.

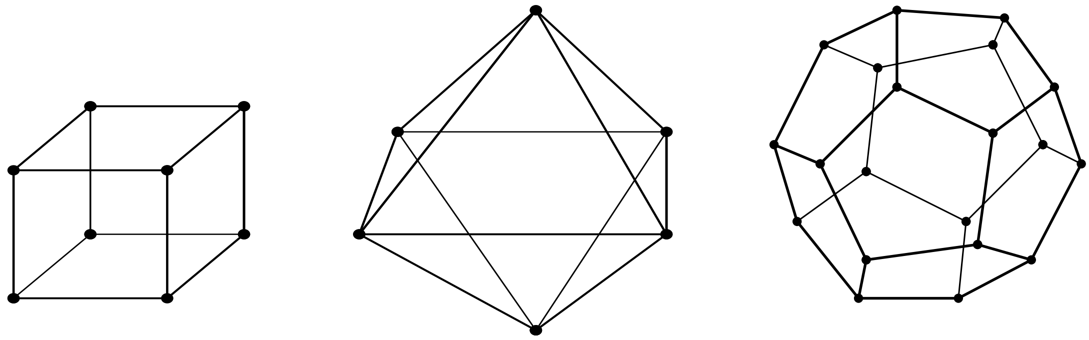
Suhteikko G on *silmukaton* jos G:ssä ei ole silmukkaa missään pisteessä.

Suhteikko G on *verkko*, jos G on silmukaton ja symmetrinen.

Suhteikko G on symmetrinen jos ja vain jos jokaista G:n nuolta $\overrightarrow{xz}$ vastaa G:n nuoli $\overrightarrow{zx}$. Täten suhteikko $G = (X, R)$ on symmetrinen jos ja vain jos relaatio R on symmetrinen (eli $R^{-1} = R$). Jos tiedetään, että relaatio R on symmetrinen, niin R määräytyy yksikäsitteisesti joukon V_G avulla, sillä tässä tapauksessa $R = \bigcup V_G$. Symmetriset suhteikot ja erityisesti verkot annetaankin seuraavassa yleensä antamalla vastaavat P– ja V–joukot.

Jokaista suhteikkoa $G = (X, R)$ vastaa symmetrinen suhteikko $G^s = (X, R \cup R^{-1})$. Havainnollisesti sanoen, suhteikko G^s saadaan suhteikosta G "muuttamalla jokainen G:n nuoli viivaksi". Selvästikin, G^s on verkko jos ja vain jos G on silmukaton. Jos G on symmetrinen suhteikko, niin $G^s = G$.

Suhteikkoja ja verkkoja esiintyy mitä moninaisimmissa yhteyksissä ja usein käytetään eri yhteyksiin havainnollisesti liittyvää sanastoa yllä esitetyn sanaston asemesta. Esimerkiksi jokaiseen avaruuden $\mathbb{R}^3$ monitahokkaaseen liittyy verkko, jonka pisteinä ovat tahokkaan *kärjet* ja viivoina tahokkaan *särmät*. Säännöllisiin 6-, 8- ja 12-tahokkaisiin (eli kuutioon, oktaedriin ja dodekaedriin) liittyvät verkot ovat seuraavan kaltaisia:

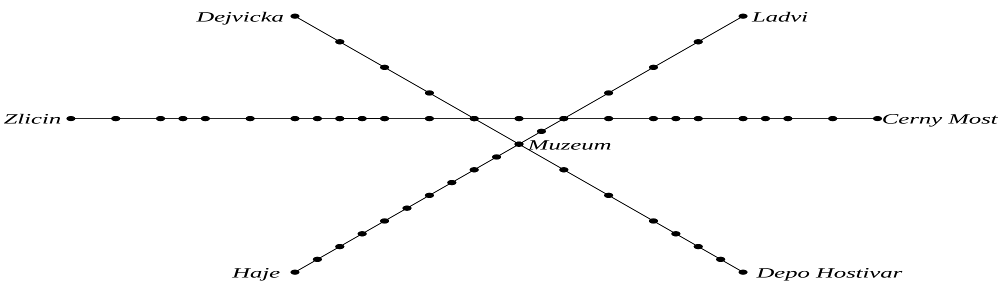


Muissa yhteyksissä voidaan puhua esimerkiksi suhteikon pisteiden ja nuolten asemasta *tiloista* ja *siirtymistä*, verkossa vierekkäin olevien pisteiden voidaan sanoa olevan toistensa *naapureita* jne.

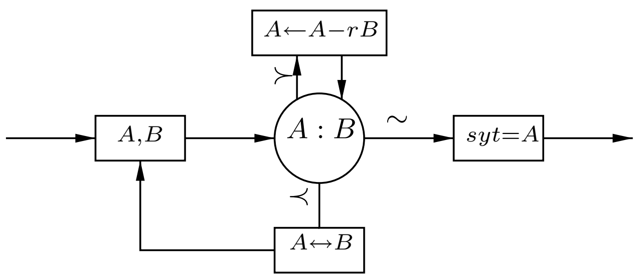
Mainitsemme nyt esimerkkejä suhteikkojen esiintymisestä "käytännön tilanteissa".

Esimerkki (a) Kaupungin(osan) *katuverkkoa* voidaan kuvata verkolla, jonka pisteinä ovat katujen risteykset ja viivoina kadunosat, jotka yhdistävät "vierekkäisiä" risteyksiä. Jossain tilanteessa on luontevampaa kuvata katuverkkoa suhteikolla, jossa on viivan asemasta nuoli silloin kun kyseinen kadunosa on yksisuuntainen.

(b) Kaupunkien metrokartat saadaan usein havainnollisimmin kuvattua verkkoina. Esimerkiksi Prahan metrokartta on seuraavan näköinen.

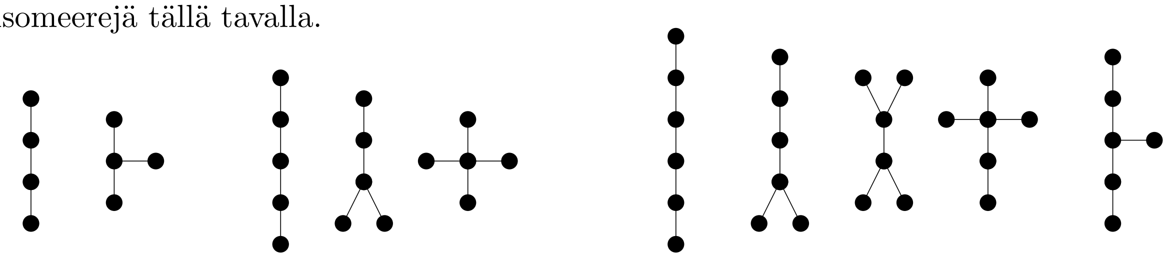


(c) Tietojenkäsittelyssä esimerkiksi ohjelmien kulkukaaviot sekä erilaiset datarakenteet (listat yms.) kuvataan usein suhteikkoina.



(d) *Etsintäpuut, sukupuut* ja monet muut haarautuvat rakenteet ja prosessit kuvataan luonnollisesti “puumaisina” suhteikkoina tai verkkoina.

(e) Molekyylimalleja annetaan usein verkkoina, joiden pisteet vastaavat atomeja ja viivat atomien välisiä sidoksia. Seuraavassa kuvataan eräitä parafiinimolekyylin isomeerejä tällä tavalla.



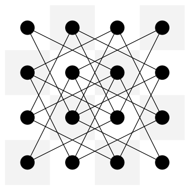
butaani *pentaani* *heksaani*

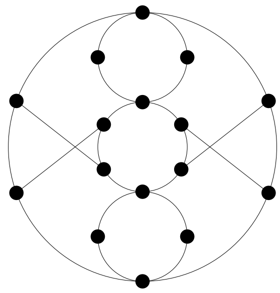
Määrittelemme seuraavaksi tilanteen, jossa kaksi suhteikkoa ovat suhteikkojen teorian kannalta oleellisesti samat eli tämän teorian suhteen ekvivalentit.

II 1.3 Määritelmä Sanomme, että suhteikot G ja H ovat *isomorfiset* ja merkitsemme $G \approx H$, jos on olemassa sellainen bijektio $\varphi : P_G \to P_H$, että kaikilla $x, z \in P_G$ on voimassa $\overrightarrow{xz} \in N_G$ jos ja vain jos $\overrightarrow{\varphi(x)\varphi(z)} \in N_H$; tällaista bijektiota φ kutsutaan suhteikkojen G ja H väliseksi *isomorfismiksi.*

Huomaamme, että jos suhteikot G ja H ovat verkkoja, niin bijektio $\varphi : P_G \to P_H$ on G:n ja H:n välinen isomorfismi jos ja vain jos kaikilla $x, z \in P_G$ on voimassa $\overline{xz} \in V_G \Longleftrightarrow \overline{\varphi(x)\varphi(z)} \in V_H$.

Määritelmästä seuraa suoraan, että jos suhteikot G ja H ovat keskenään isomorfiset, niin tällöin joukoissa P_G ja P_H on yhtä monta alkiota, joukoissa N_G ja N_H on yhtä monta alkiota ja joukoissa V_G ja V_G on yhtä monta alkiota. Täten pisteiden, nuolien tai viivojen lukumäärien laskeminen saattaa toisinaan riittää osoittamaan sen, että annetut kaksi suhteikkoa eivät ole keskenään isomorfiset. Usein kahden suhteikon keskinäisen isomorfisuuden tai ei–isomorfisuuden osoittaminen on käytännössä vaikeaa, varsinkin jos suhteikkojen nuolien ja viivojen lukumäärät ovat suuria. Seuraavassa kuvassa esiintyy kaksi erinäköistä verkkoa, jotka voimme kuitenkin suhteellisen helposti nähdä keskenään isomorfisiksi (vasemmanpuoleinen verkko määräytyy hevosen liikkeistä 4×4 shakkilaudalla).





Harjoitustehtävä: Osoita, että edellä kuvatut kaksi verkkoa ovat isomorfiset.

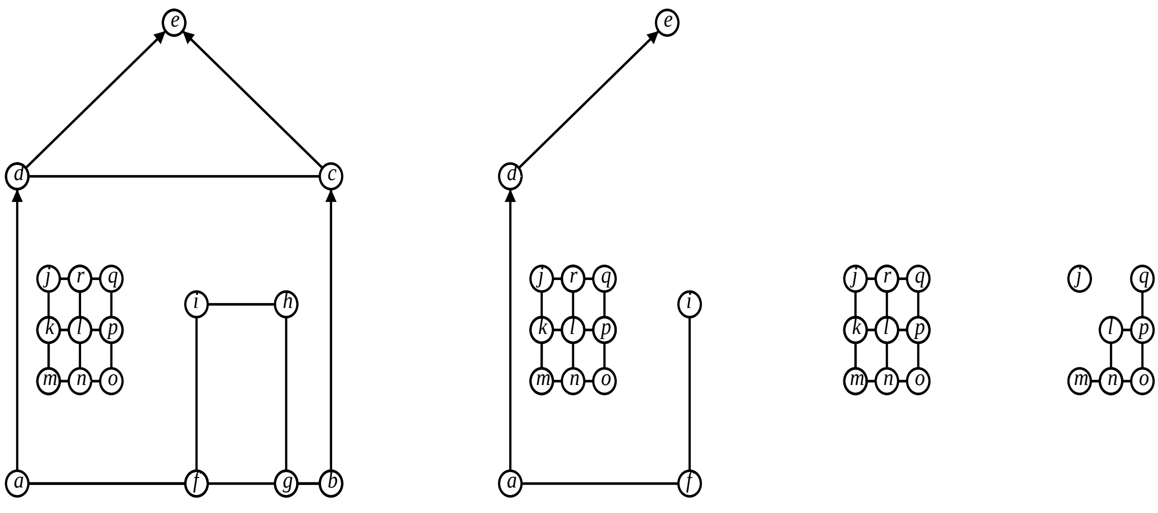
II 1.5 Määritelmä Olkoot G ja H suhteikkoja. Suhteikko H on suhteikon G *alisuhteikko*, jos $P_H \subset P_G$ ja $N_H \subset N_G$. Suhteikon G pisteiden joukon P_G osajoukon A *virittämä G:n alisuhteikko* on se G:n alisuhteikko H, joka määräytyy ehtojen $P_H = A$ ja $N_H = \{\overrightarrow{xz} \in N_G : \{x, z\} \subset A\}$ nojalla.

Panemme merkille, että kun R on suhteikon G relaatio, niin joukon $A \subset P_G$ virittämän G:n alisuhteikon relaatio on $R \cap (A \times A)$.

Otamme käyttöön seuraavan merkinnän: jos G_1 on G_2:n alisuhteikko, niin merkitsemme $G_1 \prec G_2$.

Jos suhteikon alisuhteikko on verkko, niin sanomme sen olevan suhteikon *aliverkko*. Verkon pisteiden joukon osajoukon virittämä verkon alisuhteikko on verkko, jota kutsumme osajoukon *virittämäksi verkon aliverkoksi*.

II 1.6 Esimerkki Seuraavista suhteikoista G_1 on G:n alisuhteikko, G_2 on G_1:n aliverkko ja G_3 on verkon G_2 pisteiden osajoukon $\{j, l, m, n, o, p, q\}$ virittämä G_2:n aliverkko.



G $\qquad$ G_1 $\qquad$ G_2 $\qquad$ G_3

Määrittelemme suhteikkojen yhdistelemiseen liittyvän operaation $\bigvee$ seuraavasti: jos $\mathcal{H}$ on äärellinen kokoelma suhteikkoja, niin merkitsemme symbolilla $\bigvee \mathcal{H}$ sitä suhteikkoa G, joka määräytyy ehdoista $P_G = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} P_H$ ja $N_G = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} N_H$. Jokainen $H \in \mathcal{H}$ on suhteikon $\bigvee \mathcal{H}$ alisuhteikko. Jos $\mathcal{H}$ on äärellinen ja jokainen $H \in \mathcal{H}$ on verkko, niin suhteikko $G = \bigvee \mathcal{H}$ on verkko ja verkko G määräytyy tällöin ehdoista $P_G = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} P_H$ ja $V_G = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} V_H$.

Jos edellä $\mathcal{H} = \{H_i : i \in I\}$, niin voimme korvata merkinnän $\bigvee \mathcal{H}$ merkinnällä $\bigvee_{i \in I} H_i$. Jos $H_1, ..., H_n$ ovat suhteikkoja, niin korvaamme merkinnän $\bigvee_{i \in [n]} H_i$ usein merkinnällä $\bigvee_{i=1}^{n} H_i$ tai merkinnällä $H_1 \vee \cdots \vee H_n$.

Kuviot ovat kaikkein havainnollisin tapa esittää "pieniä" suhteikkoja mutta jos pisteitä ja nuolia on paljon, tulee kuvioista usein sekavia, eikä niistä ole enää hyötyä. Tästä syystä suhteikkoja esitetään myös muilla tavoin, esimerkiksi suhteikon relaation matriisin, eli suhteikon "yhteysmatriisin", avulla (katso kombinatoriikan monisteen harjoitustehtävää I 3). Yksinkertaisimman esitystavan tarjoavat nk. *seuraajaluettelot*, joissa luetellaan, jokaiselle suhteikon $G = (X, R)$ pisteelle x, kaikki pisteen x seuraajat G:ssä, toisin sanoen, kaikki joukon $R^{-1}\{x\}$ alkiot.

II 1.7 Esimerkki Edellisen esimerkin verkko G_3 esitettynä seuraajaluetteloiden avulla:

j	
l	*p,n*
m	*n*

n	*m,l,o*
o	*n,p*

p	*l,o,q*
q	*p*

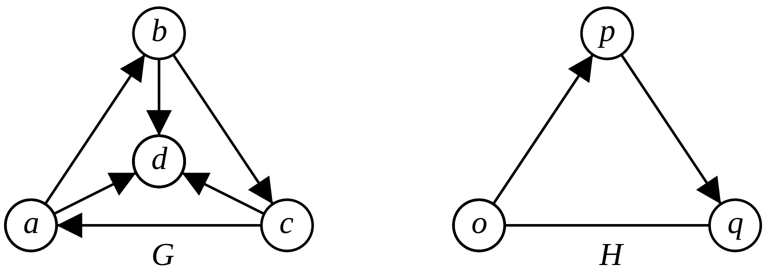
Mainitsemme lopuksi, että useissa sovellutuksissa joudutaan suhteikkojen asemasta tarkastelemaan niin kutsuttuja "painotettuja suhteikkoja": painotettu suhteikko on pari (X, f), missä X on joukko ja f on joukolla $X \times X$ määritelty reaaliarvoinen kuvaus. Suhteikko (X, R) voidaan esittää painotettuna suhteikkona (X, f) asettamalla $f(x, z) = 1$ kun $(x, z) \in R$ ja $f(x, z) = 0$ kun $(x, z) \notin R$. Myös niin kutsutut "monisuhteikot" ja "moniverkot", joissa kahden pisteen välillä voi olla useampia nuolia tai viivoja, voidaan esittää painotettuina suhteikkoina.

2. Pisteiden asteet.

Olkoon $G = (X, R)$ suhteikko ja olkoon x G:n piste. Tällöin on voimassa $R\{x\} = \{z \in X : \overrightarrow{zx} \subset R\}$ ja $R^{-1}\{x\} = \{z \in X : \overrightarrow{xz} \subset R\}$. Merkitsemme $d_G^+(x)$:llä lukua $|R\{x\}|$, eli pisteeseen x saapuvien G:n nuolten lukumäärää, ja kutsumme tätä lukua pisteen x *tuloasteeksi* suhteikossa G. Merkitsemme $d_G^-(x)$:llä lukua $\left|R^{-1}\{x\}\right|$, eli pisteestä x lähtevien G:n nuolten lukumäärää, ja kutsumme tätä lukua pisteen x *lähtöasteeksi* suhteikossa G.

Esimerkkejä **(a)** Olkoon f kuvaus $X \to Y$. Merkitsemme F:llä suhteikkoa $(X \cup Y, f^{-1})$ ja panemme merkille, että F:n nuolten joukko on $\{\overrightarrow{xy} : (x, y) \in f\}$. Jokaisella $x \in X$ on voimassa $d_F^-(x) = 1$. Kuvaus f on injektio jos ja vain jos jokaisella $y \in Y$ on voimassa $d_F^+(y) \leq 1$ ja f on surjektio jos ja vain jos jokaisella $y \in Y$ on voimassa $d_F^+(y) \geq 1$.

(b) Seuraavan suhteikon G pisteelle a on voimassa $d_G^+(a) = 1$ ja $d_G^-(a) = 2$ ja pisteelle d on voimassa $d_G^+(d) = 3$ ja $d_G^-(d) = 0$; suhteikon H pisteelle o on voimassa $d_H^+(o) = 1$ ja $d_H^-(o) = 2$:



Merkitsemme n_G:llä suhteikon G *nuolten lukumäärää* eli lukua $|N_G|$. Koska kaikille $x, z \in X$ on voimassa $\overrightarrow{xz} = \{(z, x)\}$, niin näemme, että $n_G = |R|$.

Voimme esittää luvun n_G myös G:n pisteiden asteiden avulla.

II 2.1 Lemma *Suhteikolle $G = (X, R)$ on voimassa*

$$\boxed{n_G = \sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G^-(x)}$$

Todistus. Edellä totesimme olevan voimassa $n_G = |R|$. Toisaalta pätee, että $R = \bigcup_{x \in X}(\{x\} \times R\{x\}) = \bigcup_{x \in X}(R^{-1}\{x\} \times \{x\})$ ja tästä seuraa, että on voimassa $|R| = \sum_{x \in X} |R\{x\}| = \sum_{x \in X} |R^{-1}\{x\}|$ eli $|R| = \sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G^{-1}(x)$. $\square$

Johdamme nyt yhtälön verkon viivojen lukumäärälle. Kun G on verkko, niin merkitsemme v_G:llä verkon G viivojen lukumäärää eli lukua $|V_G|$.

Määrittelemme verkon $G = (X, R)$ pisteen x *asteen* $d_G(x)$ seuraavasti:

$$d_G(x) = |\{z \in X : \overline{xz} \subset R\}| .$$

Luku $d_G(x)$ ilmoittaa siis niiden G:n viivojen lukumäärän, joilla on piste x yhtenä päänä.

Teemme myös seuraavan sopimuksen: jos z on joku "piste", joka ei kuulu joukkoon P_G, niin asetamme $d_G(z) = 0$.

II 2.2 Lemma *Olkoon x verkon G piste. Tällöin on voimassa*

$$d_G(x) = d_G^+(x) = d_G^-(x).$$

Todistus. Koska G on verkko, jokaisella $z \in P_G$ on voimassa

$$\overline{xz} \in V_G \iff \overrightarrow{xz} \in N_G \iff \overrightarrow{zx} \in N_G.$$

Lemman väite seuraa edellisistä yhtälöistä pisteen x eri asteiden määritelmien nojalla. □

Edellisten lemmojen avulla voimme nyt helposti todistaa seuraavan verkon viivojen lukumäärää koskevan tuloksen.

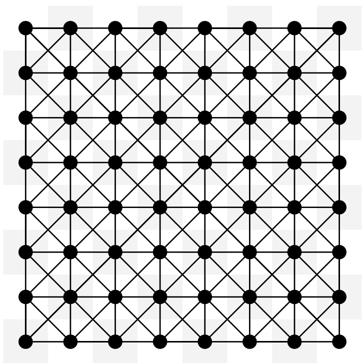
II 2.3 Lause *Verkolle G on voimassa*

$$\boxed{\sum_{x \in P_G} d_G(x) = 2 \cdot v_G}$$

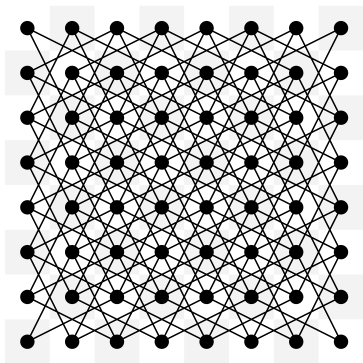
Todistus. Koska verkossa ei ole silmukoita ja koska kaikilla $x, z \in X$ on voimassa $\overline{xz} = \overline{zx} = \{(x, z), (z, x)\}$, niin nähdään että $v_G = \frac{1}{2} \cdot n_G$.

Toisaalta Lemmojen II 2.1 ja II 2.2 nojalla on voimassa $n_G = \sum_{x \in X} d_G^+(x) = \sum_{x \in X} d_G(x)$. Näin ollen $2 \cdot v_G = n_G = \sum_{x \in X} d_G(x)$. □

II 2.4 Esimerkki Kuhunkin shakkipelin nappulaan, sotamiestä lukuunottamatta, liittyy verkko, jonka pisteinä ovat shakkilaudan *ruudut* ja jossa viiva "yhdistää" kahta ruutua, mikäli yhdestä voi siirtyä toiseen kyseisellä nappulalla. Kuninkaaseen ja hevoseen liittyvät verkot ovat seuraavan näköisiä:



K



H

Käyttämällä edellisen lauseen tulosta voimme helposti laskea edellä kuvattujen verkkojen K ja H viivojen lukumäärät:

Verkossa K laudan "sisäruudun" aste on 8 kun taas "kulmaruutujen" aste 3 ja muiden "reunaruutujen" aste on 5. Täten verkon K viivojen lukumäärä on puolet luvusta $36 \cdot 8 + 4 \cdot 3 + 24 \cdot 5$ eli $v_K = 210$.

Verkon H pisteen aste on joko 2,3,4,6 tai 8. Neljän kulmaruudun aste on 2. Kulmaruutujen viereisten kahdeksan reunaruudun aste on 3. Lopuilla kuudellatoista reunaruudulla on kullakin asteena 4. Jos poistetaan laudan reunaruudut ja tarkastellaan jäljellejäävän 6×6 ruudukon reunaruutuja, niin nähdään, että neljällä kulmaruudulla on asteena 4 ja muilla kuudellatoista reunaruudulla on kullakin asteena 6. Pienemmän ruudukon kuudellatoista sisäruudulla on kullakin asteena 8. Täten verkon H viivojen lukumäärä on puolet luvusta $4 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 16 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 8$ eli $v_H = 168$. $\square$

Verkko G on *säännöllinen*, mikäli kaikilla $x, y \in P_G$ on voimassa $d_G(x) = d_G(y)$. Jos G on säännöllinen verkko, jonka jokaisen pisteen aste on k, niin sanomme, että G on *k–säännöllinen* verkko.

Jos G on n-pisteinen k-säännöllinen verkko, niin $\sum_{x \in P_G} d_G(x) = nk$; täten saamme Lauseen II 2.3 nojalla seuraavan tuloksen.

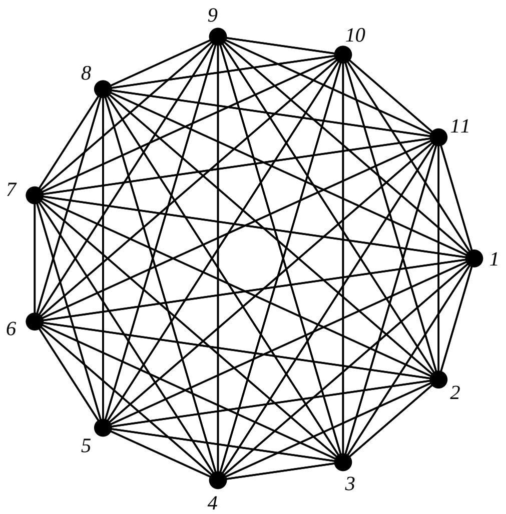
II 2.5 Korollaari *n-pisteisen k-säännöllisen verkon viivojen lukumäärä on $\frac{nk}{2}$.*

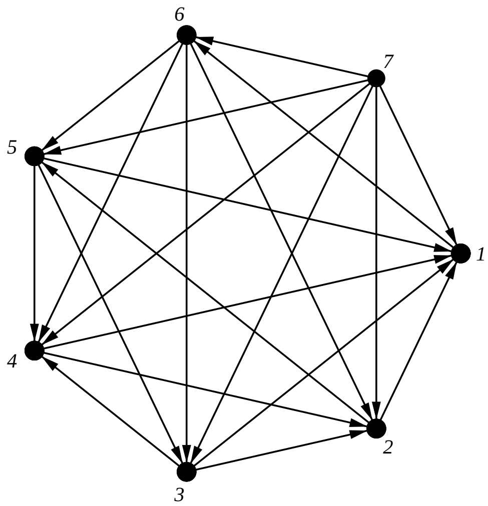
II 2.6 Määritelmä Suhteikko G on *täydellinen*, mikäli kaikilla $x, y \in P_G$, jos $x \neq y$, niin G:ssä on joko nuoli $\overrightarrow{xy}$ tai nuoli $\overrightarrow{yx}$.

Täydellinen verkko eli täydellinen suhteikko, joka on verkko, on hyvin yksinkertaista muotoa: jos täydellisen verkon G pistejoukko on X, niin G:n viivojen joukko on $\{\overline{xy} : x, y \in X, x \neq y\}$. Merkitsemme symbolilla K_X täydellistä verkkoa, jonka pistejoukko on X. Verkolle $K_{[n]}$, missä $n \in \mathbb{N}$, käytämme lyhennettyä merkintää K_n. Selvästikin, jos $|X| = n$, niin verkko K_X on isomorfinen verkon K_n kanssa.

Kun $n > 0$, niin täydellinen verkko K_n on $n-1$-säännöllinen ja siten K_n:n viivojen lukumäärä on Korollaarin II 2.5 nojalla $\frac{n(n-1)}{2}$.

Seuraavassa kuvassa on vasemmalla kuvattu täydellinen verkko K_{11} ja oikealla eräs täydellinen suhteikko, jonka pisteiden joukko on [7].





Sanomme verkon G pisteen x olevan *parillisasteinen*, jos luku $d_G(x)$ on parillinen ja *paritonasteinen*, jos luku $d_G(x)$ on pariton. Koska verkon pisteiden asteiden summa on Lauseen II 2.3 nojalla parillinen, saamme lauseelle seuraavan korollaarin.

II 2.7 Korollaari *Verkon paritonasteisten pisteiden lukumäärä on parillinen.*

II 2.8 Esimerkki Osoita, että jos talossa on vain yksi ulko–ovi, niin siinä on ainakin yksi huone, jossa on pariton määrä ovia.

Ratkaisu: Merkitsemme talon huoneiden joukkoa H:lla ja merkitsemme u:lla talon ulkopuolta; seuraavassa kutsumme myös u:ta "huoneeksi". Merkitsemme $X = H \cup \{u\}$. Kaikilla $h, j \in X$, missä $h \neq j$, merkitsemme $n(h,j)$:llä huoneita h ja j yhdistävien ovien lukumäärää.

Merkitsemme G:llä sitä verkkoa, jolla

$$P_G = X \text{ ja } V_G = \{\overline{hj} : h, j \in X, h \neq j \text{ ja luku } n(h,j) \text{ on pariton}\}.$$

Huomaamme, että verkon G pisteen u aste on yksi. Korollaarin II 2.7 tuloksesta seuraa, että on olemassa sellainen G:n paritonasteinen piste h, että $h \neq u$. Osoitamme, että huoneen h ovien lukumäärä on pariton. Merkitsemme $J = \{j \in X : n(h,j) > 0\}$ ja $J' = \{j \in J : \text{ luku } n(h,j) \text{ on pariton}\}$. On voimassa $d_G(h) = |J'|$, joten joukossa J' on pariton määrä alkioita; tästä seuraa, että luku $\sum_{j \in J'} n(h,j)$ on pariton. Koska parillisten lukujen summa $\sum_{j \in J \setminus J'} n(h,j)$ on parillinen, niin huoneen h ovien lukumäärä $\sum_{j \in J} n(h,j)$ on pariton. □

Sanomme verkon olevan *parillisasteinen*, mikäli sen jokainen piste on parillisasteinen ja *paritonasteinen*, mikäli sen jokainen piste on paritonasteinen. Korollaarin II 2.7 tuloksesta seuraa, että paritonasteisessa verkossa on parillinen määrä pisteitä.

Kombinatoriikan kurssilla johdettiin laatikkoperiaatteen avulla tulos, jonka mukaan *jokaisessa vähintäänkin kahden henkilön joukossa on kaksi henkilöä, joilla on joukossa sama määrä tuttavia.* Tämä voidaan tulkita verkon pisteiden asteita koskevana tuloksena.

II 2.9 Lemma *Olkoon G verkko, jossa on ainakin kaksi pistettä. Tällöin G:ssä on kaksi eri pistettä x ja z, joille on voimassa $d_G(x) = d_G(z)$.*

3. YHTENÄISYYS.

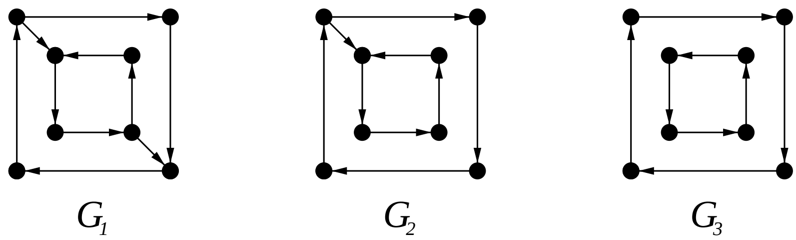
Sovellustenkin kannalta on usein tärkeätä tietää, "jakautuuko" annettu suhteikko tai verkko useampaan "erilliseen osaan" vai onko se "yhtenäinen". Esimerkiksi, kun kaupungissa suunnitellaan seuraavan kesän katutöitä, on varmistettava, ettei missään vaiheessa synny tilannetta, jossa joku alue jäisi eristyksiin. Tarkastelemme tässä luvussa suhteikkojen yhtenäisyyttä "jakautumattomuuden" kannalta ja seuraavassa luvussa siltä kannalta, miten suhteikon pisteestä "pääsee" toiseen "siirtymällä nuolia pitkin".

Olkoon G suhteikko, olkoon P joukon P_G osajoukko ja olkoon $\overrightarrow{xz} \in N_G$ suhteikon G nuoli. Jos $x \in P$ ja $z \in P$, niin sanomme, että $\overrightarrow{xz}$ on *nuoli joukossa* P. Jos $x \in P$ ja $z \notin P$, niin sanomme, että $\overrightarrow{xz}$ on *nuoli joukosta* P. Jos taas $x \notin P$ ja $z \in P$, niin sanomme, että $\overrightarrow{xz}$ on *nuoli joukkoon* P.

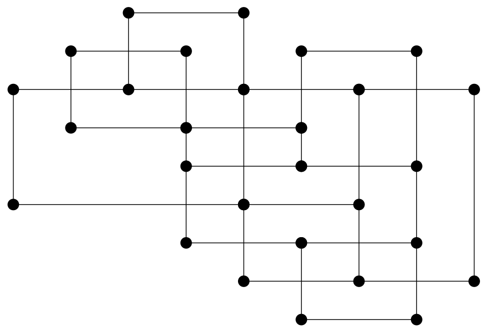
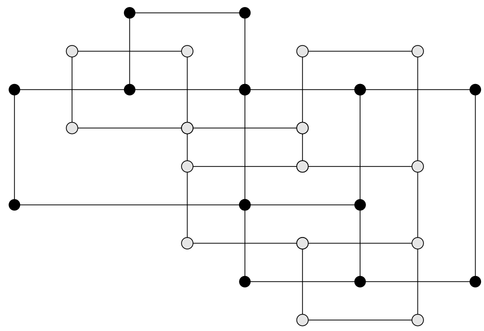
II 3.1 Määritelmä Suhteikko G on *yhtenäinen*, jos jokaisella P_G:n epätyhjällä, aidolla osajoukolla P, G:ssä on joko nuoli P:hen tai nuoli P:stä.

G on *vahvasti yhtenäinen*, jos jokaisella P_G:n epätyhjällä, aidolla osajoukolla P, G:ssä on nuoli P:hen ja nuoli P:stä.

II 3.2 Esimerkkejä **(a)** Alla kuvatuista suhteikoista, G_1 on vahvasti yhtenäinen, G_2 on yhtenäinen muttei vahvasti yhtenäinen ja G_3 ei ole yhtenäinen.



(b) Edelliset suhteikot ovat niin yksinkertaisia, että niistä näkyy ensi silmäyksellä, ovatko ne yhtenäisiä vai epäyhtenäisiä. Monimutkaisempien suhteikkojen ja verkkojen tapauksessa voi usein olla vaikeaa osoittaa yhtenäisyys tai epäyhtenäisyys. Seuraavassa vasemmalla kuvatusta verkosta ei aivan heti näe, onko verkko yhtenäinen vai ei; oikealla puolella olevasta saman verkon esityksestä näkyy, että verkko ei ole yhtenäinen.

Jos suhteikko ei ole yhtenäinen, niin sanomme sen olevan *epäyhtenäinen.*

Jos G on symmetrinen suhteikko, niin jokaisella $\overrightarrow{xz} \in N_G$ on voimassa $\overrightarrow{zx} \in N_G$; tässä tapauksessa on selvää, että G on yhtenäinen jos ja vain jos G on vahvasti yhtenäinen; lisäksi, G on yhtenäinen jos ja vain jos jokaisella joukon P_G epätyhjällä, aidolla osajoukolla P on olemassa G:n viiva, jonka toinen päätepiste on joukon P ja toinen joukon $P_G \setminus P$ alkio (tällaisen viivan sanotaan olevan joukkojen P ja $P_G \setminus P$ *välinen viiva*). Osoitetaan nyt, että yleisen suhteikon G tapauksessa, G:n yhtenäisyyttä voidaan luonnehtia G:tä vastaavan symmetrisen suhteikon G^s avulla.

II 3.3 Lause *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä suhteikolle G:*

A. G on yhtenäinen.

B. G^s on yhtenäinen.

C. G^s on vahvasti yhtenäinen.

Todistus. Koska G^s on symmetrinen suhteikko, niin ehdot B ja C ovat keskenään yhtäpitävät.

A$\Longrightarrow$B: Koska $P_G = P_{G^s}$ ja $N_G \subset N_{G^s}$, niin suhteikon G^s yhtenäisyys seuraa suhteikon G yhtenäisyydestä.

B$\Longrightarrow$A: Oletetaan, että G^s on yhtenäinen. Osoitetaan, että tällöin myös G on yhtenäinen. Olkoon P joukon P_G epätyhjä, aito osajoukko. Koska $P_{G^s} = P_G$ ja G^s on yhtenäinen, niin on olemassa G^s:n nuoli $\overrightarrow{xz}$, joka on joko nuoli P:stä tai nuoli P:hen; tällöin $\overrightarrow{zx}$ on joko nuoli P:hen tai nuoli P:stä. Koska $\overrightarrow{xz} \in N_{G^s}$, on voimassa joko $\overrightarrow{xz} \in N_G$ tai $\overrightarrow{zx} \in N_G$; kummassakin tapauksessa G:ssä on joko nuoli P:hen tai nuoli P:stä. On osoitettu, että G on yhtenäinen. $\square$

Yhtenäisyydellä ja vahvalla yhtenäisyydellä on merkitystä myös sellaisten suhteikkojen tapauksessa, joilla ei ole näitä ominaisuuksia. Osoitamme seuraavaksi, että jokainen suhteikko voidaan "jakaa" mahdollisimman suuriin (vahvasti) yhtenäisiin "osiin".

II 3.4 Määritelmä Suhteikon G alisuhteikko H on G:n *(vahvasti) yhtenäinen komponentti*, jos H on (vahvasti) yhtenäinen, eikä millään G:n (vahvasti) yhtenäisellä alisuhteikolla J ole voimassa $J \neq H$ ja $H \prec J$.

Suhteikon G (vahvasti) yhtenäiset komponentit ovat siis *maksimaalisia* G:n (vahvasti) yhtenäisiä alisuhteikkoja. Näytämme, että jokainen G:n komponentti on pistejoukkonsa virittämä G:n alisuhteikko.

II 3.5 Lemma *Olkoon H suhteikon G (vahvasti) yhtenäinen komponentti. Tällöin H on joukon P_H virittämä G:n alisuhteikko.*

Todistus. Merkitään J:llä joukon P_H virittämää G:n alisuhteikkoa. Tällöin on voimassa $H \prec J$. Koska H on (vahvasti) yhtenäinen ja koska on voimassa $P_J = P_H$ ja $N_H \subset N_J$, suhteikko J on (vahvasti) yhtenäinen. Koska H on komponentti, on voimassa $J = H$. $\square$

Näytämme seuraavaksi, että jokainen suhteikko voidaan "jakaa" komponentteihin. Aluksi todistamme eräitä aputuloksia.

II 3.6 Lemma *Olkoon $\mathcal{H}$ äärellinen kokoelma (vahvasti) yhtenäisiä suhteikkoja. Oletetaan, että kokoelmalla $\mathcal{H}$ on sellainen jäsen M, että jokaisella $H \in \mathcal{H}$ on voimassa $P_H \cap P_M \neq \emptyset$. Tällöin suhteikko $\bigvee \mathcal{H}$ on (vahvasti) yhtenäinen.*

Todistus. Merkitään $G = \bigvee \mathcal{H}$. Olkoon joukolle P voimassa $\emptyset \neq P \subsetneq P_G$. Merkitään $\mathcal{J} = \{H \in \mathcal{H} : P_H \subset P\}$, $\mathcal{K} = \{H \in \mathcal{H} : P_H \subset P_G \setminus P\}$ ja $\mathcal{L} = \mathcal{H} \setminus (\mathcal{J} \cup \mathcal{K})$. Osoitetaan, että on voimassa $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Jos $M \in \mathcal{L}$, niin $\mathcal{L} \neq \emptyset$. Oletetaan, että $M \notin \mathcal{L}$. Tällöin $M \in \mathcal{J} \cup \mathcal{K}$. Oletetaan, että vaikkapa $M \in \mathcal{J}$ eli $P_M \subset P$. Olkoon x joukon $P_G \setminus P$ piste. Koska $x \in P_G$, niin on olemassa sellainen $H \in \mathcal{H}$, että $x \in P_H$. Suhteikolle H on voimassa $x \in P_H \cap (P_G \setminus P)$ ja $\emptyset \neq P_H \cap P_M \subset P_H \cap P$; tästä seuraa, että $H \notin \mathcal{J}$ ja $H \notin \mathcal{K}$ ja täten $H \in \mathcal{L}$. On osoitettu, että jos $M \in \mathcal{J}$, niin $\mathcal{L} \neq \emptyset$ ja aivan samoin nähdään, että jos $M \in \mathcal{K}$, niin $\mathcal{L} \neq \emptyset$.

Olkoon H kokoelman $\mathcal{L}$ jäsen. Tällöin $P_H \not\subset P$ ja $P_H \not\subset P_G \setminus P$. Merkitään $Q = P_H \cap P$ ja pannaan merkille, että $\emptyset \neq Q \subsetneq P_H$. Koska suhteikko H on (vahvasti) yhtenäinen, niin H:ssa on nuoli joukosta Q tai (ja) nuoli joukkoon Q. Koska jokainen H:n nuoli on myös suhteikon G nuoli ja koska $Q \subset P$ ja $P_H \setminus Q \subset P_G \setminus P$, niin suhteikossa G on nuoli joukosta P tai (ja) nuoli joukkoon P. On osoitettu, että suhteikko G on (vahvasti) yhtenäinen. □

II 3.7 Lemma *Olkoon K suhteikon G (vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko. Oletetaan, että $P_K \neq \emptyset$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi G:n (vahvasti) yhtenäinen komponentti H, jolle on voimassa $P_H \cap P_K \neq \emptyset$. Komponentille H on lisäksi voimassa $K \prec H$.*

Todistus. Merkitään $\mathcal{C} = \{L : L$ on G:n (vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko ja $P_L \cap P_K \neq \emptyset\}$. Tällöin $K \in \mathcal{C}$, joten $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Merkitään $H = \bigvee \mathcal{C}$. Tällöin H on G:n alisuhteikko ja on voimassa $K \prec H$ ja $P_H \cap P_K \neq \emptyset$. Osoitetaan, että H on G:n (vahvasti) yhtenäinen komponentti. Koska jokaisella $L \in \mathcal{C}$ on voimassa $P_L \cap P_K \neq \emptyset$, niin Lemman II 3.6 tuloksesta seuraa, että H on (vahvasti) yhtenäinen. Toisaalta, jos J on G:n (vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko, jolle on voimassa $H \prec J$, niin on voimassa $J \in \mathcal{C}$ ja täten $J \prec \bigvee \mathcal{C} = H$. Edellisen nojalla H on G:n (vahvasti) yhtenäinen komponentti.

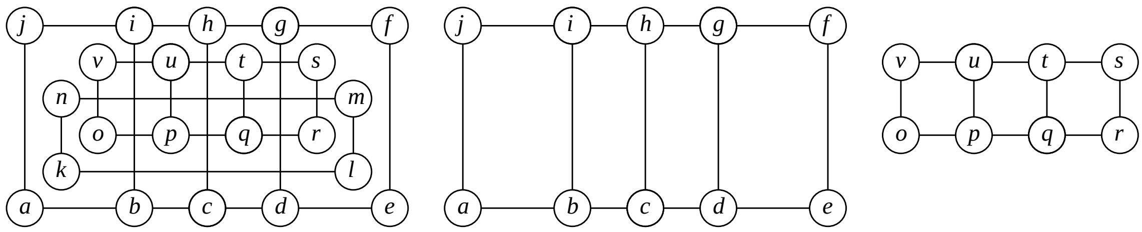
Jos H' on sellainen G:n (vahvasti) yhtenäinen komponentti, että $P_{H'} \cap P_K \neq \emptyset$, niin tällöin $H' \in \mathcal{C}$; tästä seuraa, että on voimassa $H' \prec \bigvee \mathcal{C} = H$ ja edelleen, että on voimassa $H = H'$. □

II 3.8 Lause *Olkoon G epätyhjä suhteikko, olkoon $\mathcal{K}$ G:n kaikkien yhtenäisten komponenttien joukko ja olkoon $\mathcal{K}_v$ kaikkien G:n vahvasti yhtenäisten komponenttien joukko. Tällöin perheet $\{P_H : H \in \mathcal{K}\}$ ja $\{P_H : H \in \mathcal{K}_v\}$ ovat joukon P_G osituksia.*

Todistus. Jokaisella $x \in P_G$, G:n alisuhteikko $K_x = (\{x\}, \emptyset)$ on vahvasti yhtenäinen; lisäksi jokaiselle G:n alisuhteikolle J on voimassa $x \in P_J \iff K_x \prec J$. Lauseen tulos seuraa näin ollen Lemman II 3.7 tuloksesta, koska viimeksimainitun tuloksen nojalla jokaisella $x \in P_G$, relaatio $K_x \prec H$ pätee täsmälleen yhdelle G:n (vahvasti) yhtenäiselle komponentille H. □

Yllä olevan lauseen nojalla suhteikon G piste x on täsmälleen yhden G:n (vahvasti) yhtenäisen komponentin piste; kyseistä komponenttia kutsutaan *pisteen x (vahvasti) yhtenäiseksi komponentiksi* suhteikossa G.

II 3.9 Esimerkkejä **(a)** Esimerkin II 3.2(a) suhteikko G_2 on yhtenäinen, joten sillä on vain yksi yhtenäinen komponentti, nimittäin G_2. Verkolla G_2 on kaksi vahvasti yhtenäistä komponenttia, sisemmän neliön pisteiden virittämä alisuhteikko ja ulomman neliön pisteiden virittämä alisuhteikko.
(b) Esimerkin II 3.2(b) verkon oikeanpuoleisesta esityksestä näkee helposti, että kyseisellä verkolla on kaksi yhtenäistä komponenttia, mustien pisteiden joukon virittämä aliverkko ja harmaiden pisteiden joukon virittämä aliverkko.
(b) Alla vasemmalla kuvatun verkon pisteiden a ja s yhtenäiset komponentit ovat seuraavat:



Osoitamme vielä, että suhteikon G yhtenäisten komponenttien nuolten ja viivojen joukot "jakavat" G:n vastaavat joukot.

II 3.10 Lause *Olkoon G suhteikko ja olkoon $\mathcal{K}$ G:n kaikkien yhtenäisten komponenttien joukko. Tällöin perhe $\{N_H : H \in \mathcal{K}\}$ on joukon N_G ositus ja perhe $\{V_H : H \in \mathcal{K}\}$ on joukon V_G ositus.*

Todistus. Jokaisella $\overrightarrow{xz} \in N_G$, G:n alisuhteikko $K_{\overrightarrow{xz}}$, jonka pistejoukkona on $\{x, z\}$ ja nuolten joukkona $\{\overrightarrow{xz}\}$, on yhtenäinen. Lisäksi jokaiselle G:n alisuhteikolle J pätee, että $\overrightarrow{xz} \in N_J$ jos ja vain jos $K_{\overrightarrow{xz}} \prec J$. Lemman II 3.7 tuloksesta seuraa näin ollen, että on olemassa täsmälleen yksi $H \in \mathcal{K}$, jolle on voimassa $\overrightarrow{xz} \in N_H$.

Viivoja koskeva tulos todistetaan samalla lailla, tarkastelemalla nyt G:n alisuhteikkoja $K_{\overline{xz}}$, joilla on pistejoukkona $\{x, z\}$ ja nuolten joukkona $\{\overrightarrow{xz}, \overrightarrow{zx}\}$. □

Edellisessä todistuksessa esiintyvät G:n alisuhteikot $K_{\overline{xz}}$ ovat vahvasti yhtenäisiä ja täten Lemman II 3.7 tuloksesta seuraa, että myös perhe $\{V_H : H$ on G:n vahvasti yhtenäinen komponentti$\}$ on joukon V_G ositus. Vastaava tulos ei päde nuolten tapauksessa, kuten näemme tarkastelemalla edellisessä todistuksessa esiintyvää, muotoa $K_{\overrightarrow{xz}}$ olevaa suhteikkoa: tämän vahvasti yhtenäiset komponentit ovat alisuhteikot $(\{x\}, \emptyset)$ ja $(\{z\}, \emptyset)$, eikä nuoli $\overrightarrow{xz}$ ole kummankaan komponentin nuoli.

Myöskään Esimerkin II 3.2(a) suhteikossa G_2 ulommasta sisempään neliöön vievä nuoli ei kuulu kumpaankaan G_2:n vahvasti yhtenäiseen komponenttiin.

Voimme panna merkille, että jos H ja J ovat suhteikon G yhtenäisiä komponentteja ja $H \neq J$, niin Lauseiden II 3.8 ja II 3.10 sekä Lemman II 3.5 tuloksista seuraa, että G:ssä ei ole nuolta, jonka toinen päätepiste olisi joukossa P_H ja toinen joukossa P_J.

Jos G on verkko, niin jokainen G:n yhtenäinen komponentti on Lemman II 3.5 nojalla verkko ja näin ollen, Lauseen II 3.3 nojalla, vahvasti yhtenäinen; tästä seuraa, että verkon tapauksessa yhtenäiset komponentit ovat vahvasti yhtenäisiä komponentteja ja kääntäen.

Esitämme lopuksi erään pisteiden ja viivojen lukumääriä koskevan epäyhtälön, joka pätee kaikille yhtenäisille verkoille. Epäyhtälön todistuksessa käytämme hyväksi seuraavaa aputulosta.

II 3.11 Lemma *Olkoon $\mathcal{H}$ sellainen äärellinen kokoelma epätyhjiä suhteikkoja, että suhteikko $\bigvee \mathcal{H}$ on yhtenäinen. Tällöin voidaan kirjoittaa $\mathcal{H} = \{H_i : i \in [n]\}$ siten, että jokaisella $1 < i \leq n$ on voimassa $P_{H_i} \cap P_{H_j} \neq \emptyset$ jollain $j < i$.*

Todistus. Merkitään $n = |\mathcal{H}|$ ja $G = \bigvee \mathcal{H}$. Jos $n = 0$, niin ei ole mitään todistamista. Jos $n = 1$, niin kirjoittamalla $\mathcal{H} = \{H_1\}$ saadaan $\mathcal{H}$:lle vaadittu esitys. Oletetaan, että $n > 1$. Valitaan H_1:ksi mielivaltainen kokoelman $\mathcal{H}$ jäsen ja osoitetaan, että suhteikot $H_2, ..., H_n$ voidaan valita rekursiivisesti niin, että jokaisella $i = 2, ..., n$ on voimassa 1^o $H_i \notin \{H_j : 1 \leq j < i\}$ ja 2^o $P_{H_i} \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} P_{H_j} \neq \emptyset$. Olkoon $k \in [n]$ sellainen luku, että $k > 1$ ja suhteikot H_i, $i \in [k-1]$ on jo valittu niin, että ehdot 1^o ja 2^o toteutuvat jokaisella $1 < i < k$. Osoitetaan, että H_k voidaan valita niin, että ehdot 1^o ja 2^o toteutuvat i:n arvolla k. Merkitään $P = \bigcup_{j=1}^{k-1} P_{H_j}$. Jos $P = P_G$, niin jokaisella $H \in \mathcal{H}$ on voimassa $P_H \cap P \neq \emptyset$, joten H_k:ksi voidaan tässä tapauksessa valita mikä tahansa kokoelman $\mathcal{H} \setminus \{H_j : j < k\}$ suhteikko. Oletetaan, että $P \neq P_G$. Tällöin $\emptyset \neq P \subsetneqq P_G$, joten suhteikon G yhtenäisyyden nojalla G:ssä on nuoli $\overrightarrow{xy}$ joukkoon P tai joukosta P. Pannaan merkille, että $\overrightarrow{xy}$ ei ole millään $i \in [k-1]$ suhteikon H_i nuoli; näin ollen jollain $H' \in \mathcal{H} \setminus \{H_j : j < k\}$ on voimassa $\overrightarrow{xy} \in N_{H'}$. Koska nuolen $\overrightarrow{xy}$ yksi päätepiste on joukossa P, niin on voimassa $P_{H'} \cap P \neq \emptyset$; täten voidaan valita $H_k = H'$. □

Panemme merkille, että jos edellisessä lemmassa kokoelman $\mathcal{H}$ suhteikot ovat yhtenäisiä, niin lemman antama välttämätön ehto suhteikon $\bigvee\mathcal{H}$ yhtenäisyydelle on myös riittävä.

II 3.12 Lemma *Olkoon $\mathcal{H} = \{H_i : i \in [n]\}$ sellainen äärellinen kokoelma (vahvasti) yhtenäisiä suhteikkoja, että jokaisella $1 < i \le n$ on voimassa $P_{H_i} \cap P_{H_j} \neq \emptyset$ jollain $j < i$. Tällöin suhteikko $G = \bigvee\mathcal{H}$ on (vahvasti) yhtenäinen.*

Todistus. Lemman II 3.6 tuloksesta seuraa induktiolla luvun k suhteen, että jokaisella $k \in [n]$, suhteikko $\bigvee_{i=1}^{k} H_i = \left(\bigvee_{i<k} H_i\right) \vee H_k$ on (vahvasti) yhtenäinen. □

Merkitsemme p_G:llä suhteikon G pisteiden lukumäärää $|P_G|$.

II 3.13 Lause *Olkoon G yhtenäinen verkko. Tällöin on voimassa*

$$\boxed{v_G \ge p_G - 1}$$

Todistus. Tulos pätee triviaalisti, jos $p_G \le 1$. Oletamme, että $p_G > 1$. Merkitsemme $v_G = n$. Jokaisella $v \in V_G$ merkitsemme H_v:llä sitä G:n aliverkkoa, jolla on pisteiden joukkona v:n päätepisteiden muodostama 2-joukko ja viivojen joukkona $\{v\}$. Merkitsemme $\mathcal{H} = \{H_v : v \in V_G\}$. Koska G on yhtenäinen, niin G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä ja tästä seuraa, että on voimassa $\bigvee\mathcal{H} = G$. Lemman II 3.11 nojalla $\mathcal{H}$:lla on sellainen esitys $\mathcal{H} = \{H_i : i \in [n]\}$, että jokaisella $1 < i \le n$ on voimassa $P_{H_i} \cap \bigcup_{j<i} P_{H_j} \neq \emptyset$. Pannaan merkille, että jokaisella $i > 1$, koska P_{H_i} on 2-joukko, joka leikkaa joukkoa $\bigcup_{j<i} P_{H_j}$, niin joukossa $P_{H_i} \setminus \bigcup_{j<i} P_{H_j}$ on korkeintaan yksi alkio. Tästä seuraa, että on voimassa

$$\begin{aligned} p_G = |P_G| = \left|\bigcup_{j\in[n]} P_{H_j}\right| &= \left|P_{H_1} \cup \left(\bigcup_{i=2}^{n}\left(P_{H_i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} P_{H_j}\right)\right)\right| \\ &= |P_{H_1}| + \sum_{i=2}^{n}\left|P_{H_i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} P_{H_j}\right| \le 2 + (n-1)\cdot 1 = n+1 = v_G + 1\,. \end{aligned}$$ □

Edellisen lauseen antamaa epäyhtälöä ei voi parantaa: alla kuvatulla yhtenäisellä verkolla G on voimassa $v_G = p_G - 1$.

Lauseen II 3.13 epäyhtälön voimassaolo on välttämätön, mutta ei riittävä ehto verkon yhtenäisyydelle: alla kuvattu verkko H on epäyhtenäinen vaikka on voimassa $v_H > p_H$.

G H

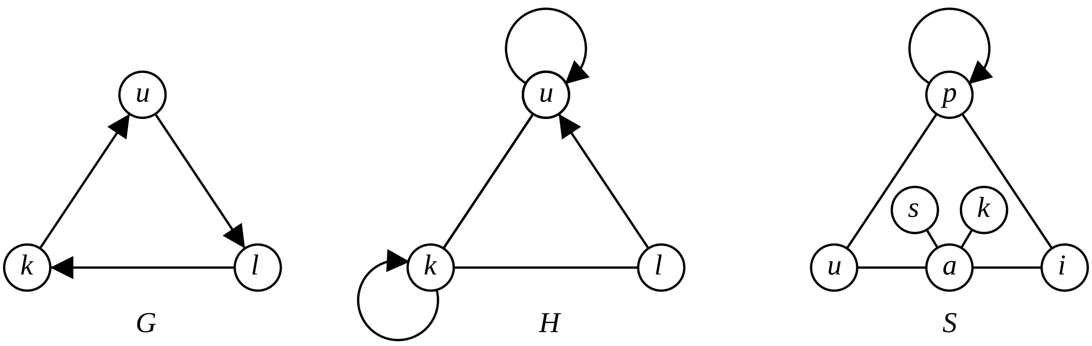
4. Kulku suhteikossa.

Suhteikon vahvan yhtenäisyyden lähempää tarkastelua varten määritelemme käsitteen, joka liittyy siihen, miten suhteikossa "pääsee" pisteestä toiseen.

Määritelmä Olkoon G suhteikko. *Kulku* G:ssä on sellainen jono $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ G:n pisteitä, että $n \in \mathbb{N}$ ja jokaisella $i \in [n]$, $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ on G:n nuoli.

Otamme nyt käyttöön kulkuihin liittyvää sanastoa ja merkintöjä. Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ kulku suhteikossa G. Sanomme, että kulku $\bar{x}$ *käy* pisteissä $x_0, ..., x_n$ ja sanotaan myös, että $\bar{x}$ on kulku *pisteestä* x_0 *pisteeseen* x_n *pisteiden* $x_1, ..., x_{n-1}$ *kautta*. Kulku $\bar{x}$ on *yksinkertainen*, mikäli kaikilla $0 \leq i < j \leq n$, jos $x_i = x_j$, niin $i = 0$ ja $j = n$. Toisinsanoen, kulku $\bar{x}$ on yksinkertainen, jos kaikki pisteet $x_0, ..., x_n$ ovat eri pisteitä paitsi mahdollisesti $x_0 = x_n$. Kulku $\bar{x}$ on *suljettu kulku*, mikäli $x_0 = x_n$; tällöin sanomme myös, että $\bar{x}$ on *pisteestä* x_0 *lähtevä kierros* G:ssä.

Esimerkki Jono (k, u, l, k, u) on kulku allaolevassa suhteikossa G mutta ei suhteikossa H; jonot (1) ja (l, u, u, k, k, u) ovat kulkuja H:ssa muttei G:ssä. Jonot (s, a, i, p, p, u, a, s) ja $(s, a, i, p, p, u, a, k, a, u, p, p, i, a, s)$ ovat kierroksia alla esitetyssä suhteikossa S ja jono (u, p, i, a, u) on yksinkertainen kierros S:ssä.



G H S

Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ kulku suhteikossa G. Sanomme kulun $\bar{x}$:n osajonon (x_{i-1}, x_i), missä $i \in [n]$, olevan kulun $\bar{x}$ *i:s askel*. Sanomme $\bar{x}$:n olevan *n-askeleinen kulku* ja sanomme myös, että n on kulun $\bar{x}$ *pituus*. Jokaisella $i \in [n]$, G:ssä on nuoli $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ ja sanomme $\bar{x}$:n kulkevan *pitkin nuolta* $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ *i:nnellä askeleellaan*; jos G:ssä on nuolen $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ lisäksi nuoli $\overrightarrow{x_ix_{i-1}}$, niin tällöin G:ssä on viiva $\overline{x_{i-1}x_i}$ ja sanomme $\bar{x}$:n kulkevan, paitsi pitkin nuolta $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$, myös *pitkin viivaa* $\overline{x_{i-1}x_i}$ *i:nnellä askeleellaan*.

Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ kulku suhteikossa G. Tällöin merkitsemme $P(\bar{x})$:llä joukon P_G osajoukkoa $\{x_0, ..., x_n\}$, $N(\bar{x})$:llä joukon N_G osajoukkoa $\{\overrightarrow{x_0x_1}, ..., \overrightarrow{x_{n-1}x_n}\}$ ja $V(\bar{x})$:llä joukon V_G osajoukkoa $\{\overline{x_0x_1}, ..., \overline{x_{n-1}x_n}\} \cap V_G$.

Huomaamme, että kun x on suhteikon G piste, niin yllä annettujen määritelmien nojalla jono (x) on kulku (täsmällisemmin sanoen, 0-askeleinen kierros) G:ssä. Kululle (x) pätee, että $P((x)) = \{x\}$ ja $N((x)) = V((x)) = \emptyset$. Kulkuja (x), $x \in P_G$, sekä "tyhjää kulkua" () kutsumme G:n *triviaaleiksi kuluiksi*, koska ne eivät anna mitään tietoa G:n rakenteesta; muita G:n kulkuja kutsumme *epätriviaaleiksi*.

Olkoot $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ ja $\bar{y} = (y_0, ..., y_m)$ kulkuja suhteikossa G. Jos $x_n = y_0$, niin sanomme, että $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat *peräkkäisiä kulkuja* ja tällöin määrittelemme kulun $\bar{x}\star\bar{y} = (z_0, ..., z_{n+m})$ asettamalla $z_i = x_i$ jokaisella $0 \le i \le n$ ja $z_i = y_{i-n}$ jokaisella $n < i \le n+m$. Panemme merkille, että kulun $\bar{x}\star\bar{y}$ askelten lukumäärä on kulkujen $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ askelten lukumäärien summa.

Esimerkki Useissa lautapeleissä, kuten esimerkiksi "Afrikan tähdessä", pelaaja suorittaa peräkkäisiä kulkuja pelilaudan määräämässä verkossa tai suhteikossa; pelaaja heittää kunkin pelivuoronsa alussa yhtä tai useampaa noppaa ja tämän jälkeen hän saa tehdä pelinappulallaan peliverkossa tai -suhteikossa jonkun sellaisen kulun, jonka alkupiste on edellisellä vuorolla suoritetun kulun loppupiste ja jonka askelten lukumäärä on heitettyjen noppien silmälukujen summa.

Suoraan määritelmistä saamme seuraavat tulokset.

II 4.1 Lemma *(a) Jos $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat peräkkäisiä kulkuja suhteikossa G, niin on voimassa $P(\bar{x}\star\bar{y}) = P(\bar{x}) \cup P(\bar{y})$, $N(\bar{x}\star\bar{y}) = N(\bar{x}) \cup N(\bar{y})$ ja $V(\bar{x}\star\bar{y}) = V(\bar{x}) \cup V(\bar{y})$.*
(b) Olkoot $\bar{x}$, $\bar{y}$ ja $\bar{z}$ kulkuja suhteikossa G. Jos kulut $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat peräkkäisiä ja kulut $\bar{y}$ ja $\bar{z}$ ovat peräkkäisiä, niin kulut $\bar{x} \star \bar{y}$ ja $\bar{z}$ ovat peräkkäisiä ja kulut $\bar{x}$ ja $\bar{y} \star \bar{z}$ ovat peräkkäisiä ja on voimassa $(\bar{x} \star \bar{y}) \star \bar{z} = \bar{x} \star (\bar{y} \star \bar{z})$.

(c) Jos $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ on (yksinkertainen) kierros suhteikossa G ja $0 \leq k \leq n$, niin $\bar{y} = (x_k, ..., x_n) \star (x_0, ..., x_k)$ on pisteestä x_k lähtevä (yksinkertainen) kierros G:ssä. Lisäksi pätee, että $P(\bar{y}) = P(\bar{x})$, $N(\bar{y}) = N(\bar{x})$ ja $V(\bar{y}) = V(\bar{x})$.

Lemman (b)–kohdan nojalla voidaan lausekkeista $(\bar{x}\star\bar{y})\star\bar{z}$ ja $\bar{x}\star(\bar{y}\star\bar{z})$ jättää sulut pois ja merkitä kyseisten lausekkeiden määrittämää kulkua yksinkertaisesti $\bar{x}\star\bar{y}\star\bar{z}$:llä; tästä seuraa edelleen, että myös merkinnät $\bar{x}\star\bar{y}\star\bar{z}\star\bar{u}$, $\bar{x}\star\bar{y}\star\bar{z}\star\bar{u}\star\bar{v}$, jne., määräävät yksikäsitteisesti kulkuja kunhan vain vaaditut peräkkäisyysehdot pätevät lausekkeissa esiintyville kuluille $\bar{x}$, $\bar{y}$, jne.

Osoitamme seuraavaksi, että jokainen kulku "sisältää" yksinkertaisen kulun alkupisteestänsä loppupisteeseensä. Todistetaan ensin eräs aputulos.

II 4.2 Lemma *Olkoon $\bar{x}$ kulku suhteikossa G. Jos kulku $\bar{x}$ ei ole yksinkertainen, niin se voidaan esittää muodossa $\bar{z}\star\bar{y}\star\bar{u}$, missä $\bar{y}$ on epätriviaali yksinkertainen kierros.*

Todistus. Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$. Oletetaan, että $\bar{x}$ ei ole yksinkertainen. Pannaan merkille, että tällöin joukko $K = \{(i,j) : 0 \leq i < j \leq n \text{ ja } x_i = x_j\}$ on epätyhjä. Äärellisessä epätyhjässä lukujoukossa $\{j - i : (i,j) \in K\}$ on pienin luku; merkitään tätä lukua m:llä. Valitaan joukosta K sellainen alkio (k,l), että $l - k = m$. Merkitään $\bar{z} = (x_0, ..., x_k)$, $\bar{y} = (x_k, ..., x_l)$ ja $\bar{u} = (x_l, ..., x_n)$. Tällöin on voimassa $\bar{x} = \bar{z}\star\bar{y}\star\bar{u}$. Kulku $\bar{y}$ on kierros, koska $x_k = x_l$ ja kierros $\bar{y}$ on epätriviaali, koska sen askelten lukumäärä on $l - k = m \geq 1$. Lisäksi kierros $\bar{y}$ on yksinkertainen, koska muussa tapauksessa löydettäisiin sellainen joukon K alkio (i,j), että olisi voimassa $k \leq i < j \leq l$ ja $(i,j) \neq (k,l)$; tällöin olisi voimassa $j - i < l - k = m$, ristiriidassa luvun m minimaalisuuden kanssa. □

Esimerkki Edellä esiintynyt kulku $(s,a,i,p,p,u,a,k,a,u,p,p,i,a,s)$ ei ole yksinkertainen ja sille löytyy kolme edellisen lemman mukaista esitystä:

$$(s,a,i,p)\star(p,p)\star(p,u,a,k,a,u,p,p,i,a,s),$$

$$(s,a,i,p,p,u,a)\star(a,k,a)\star(a,u,p,p,i,a,s) \text{ ja}$$

$$(s,a,i,p,p,u,a,k,a,u,p)\star(p,p)\star(p,i,a,s).$$

II 4.3 Lemma *Olkoot x ja y suhteikon G pisteitä. Jos G:ssä on kulku pisteestä x pisteeseen y, niin G:ssä on yksinkertainen kulku pisteestä x pisteeseen y.*

Todistus. Jos G:ssä on kulku x:stä y:hyn, niin G:ssä on sellainen kulku $\bar{x}$ x:stä y:hyn, jonka askelten lukumäärä on pienin mahdollinen. Osoitamme, että kulku $\bar{x}$ on yksinkertainen. Teemme vastaväitteen: $\bar{x}$ ei ole yksinkertainen. Edellisen lemman nojalla voimme esittää $\bar{x}$:n muodossa $\bar{z} \star \bar{y} \star \bar{v}$, missä $\bar{y}$ on epätriviaali yksinkertainen kierros. Koska $\bar{y}$ on kierros, niin kulut $\bar{z}$ ja $\bar{v}$ ovat peräkkäisiä. Jono $\bar{z} \star \bar{v}$ on kulku G:ssä x:stä y:hyn ja sen askelten lukumäärä on $n - m$, missä n on $\bar{x}$:n ja m $\bar{y}$:n askelten lukumäärä; tästä seuraa ristiriita kulun $\bar{x}$ minimaalisuusominaisuuden kanssa, sillä $\bar{y}$:n epätriviaalisuuden nojalla on voimassa $m \geq 1$.
□

Vahvan yhtenäisyyden tarkastelua varten tarvitsemme erästä kierrosten olemassaoloon liittyvää aputulosta.

II 4.4 Lemma *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä suhteikon G pisteille x ja y.*

A. G:ssä on kulku x:stä y:hyn ja kulku y:stä x:ään.

B. G:ssä on kierros, joka käy pisteissä x ja y.

C. G:ssä on pisteestä x lähtevä kierros, joka käy pisteessä y.

Todistus. A$\Longrightarrow$C: Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ kulku G:ssä x:stä y:hyn ja olkoon $\bar{y} = (y_0, ..., y_m)$ kulku y:stä x:ään. Tällöin $\bar{x} \star \bar{y}$ on pisteestä x lähtevä kierros, joka käy pisteessä y.

C$\Longrightarrow$B: Tämä implikaatio on triviaalisti voimassa.

B$\Longrightarrow$A: Oletetaan, että ehto B on voimassa. Lemman II 4.1 nojalla G:ssä on tällöin pisteestä x lähtevä kierros $(z_0, ..., z_n)$, joka käy pisteessä y. Olkoon luvulle $k \in [n]$ voimassa $z_k = y$. Tällöin jono $(z_0, ..., z_k)$ on kulku G:ssä pisteestä x pisteeseen y ja jono $(z_k, ..., z_n)$ on kulku G:ssä pisteestä y pisteeseen x. Olemme näyttäneet ehdon A olevan voimassa. □

Olkoon $\bar{x}$ kulku suhteikossa G. *Kulun $\bar{x}$ määrittämä suhteikko* on se G:n alisuhteikko H, joka määräytyy ehdoista $P_H = P(\bar{x})$ ja $N_H = N(\bar{x})$. Kulut liittyvät (vahvaan) yhtenäisyyteen seuraavan huomion kautta.

II 4.5 Lemma *Kulun (kierroksen) määrittämä suhteikko on (vahvasti) yhtenäinen.*

Todistus. Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ kulku suhteikossa G. Merkitsemme H:lla kulun $\bar{x}$ määrittämää suhteikkoa. Olkoon $\emptyset \neq P \subsetneqq P_H$. Merkitsemme $Q = P_H \setminus P$.

Jos on voimassa $x_0 \in P$, niin merkitsemme j:llä pienintä lukua $i \in [n]$, jolla $x_i \in Q$; tällöin $\overrightarrow{x_{j-1}x_j}$ on H:n nuoli joukosta P.

Vastaavasti, jos $x_0 \in Q$, niin merkitsemme j:llä pienintä lukua $i \in [n]$, jolla $x_i \in P$; tällöin $\overrightarrow{x_{j-1}x_j}$ on H:n nuoli joukkoon P.

Oletamme, että $\bar{x}$ on kierros ja tarkastelemme jälleen kahta tapausta.

Jos on voimassa $x_0 \in P$, niin merkitsemme j:llä (k:lla) pienintä (suurinta) lukua $i \in [n]$, jolla $x_i \in Q$; tällöin $\overrightarrow{x_{j-1}x_j}$ on H:n nuoli joukosta P; lisäksi, koska $x_n = x_0$, on voimassa $k < n$ ja $\overrightarrow{x_k x_{k+1}}$ on H:n nuoli joukkoon P.

Lopuksi, jos $x_0 \in Q$, niin merkitsemme j:llä (k:lla) pienintä (suurinta) lukua $i \in [n]$, jolla $x_i \in P$; tällöin $\overrightarrow{x_{j-1}x_j}$ on H:n nuoli joukkoon P; lisäksi, koska $x_n = x_0$, on voimassa $k < n$ ja $\overrightarrow{x_k x_{k+1}}$ on H:n nuoli joukosta P.

Edellä esitetystä seuraa, että H on yhtenäinen ja että H on vahvasti yhtenäinen, mikäli $\bar{x}$ on kierros. □

Luonnehdimme nyt suhteikon vahvaa yhtenäisyyttä kulkujen olemassaolon avulla.

II 4.6 Lause *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä suhteikolle G:*

A. G on vahvasti yhtenäinen.

B. Kun x ja y ovat G:n pisteitä, niin G:ssä on kulku x:stä y:hyn ja kulku y:stä x:ään.

C. Kun x ja y ovat G:n pisteitä, niin G:ssä on kierros, joka käy pisteissä x ja y.

D. G:ssä on kierros, joka käy jokaisessa G:n pisteessä.

Todistus. Ehdot B ja C ovat Lemman II 4.4 nojalla keskenään yhtäpitävät. Lauseen todistamiseksi riittää näinollen näyttää, että A$\Longrightarrow$B ja C$\Longrightarrow$D$\Longrightarrow$A.

A$\Longrightarrow$B: Oletamme, että G on vahvasti yhtenäinen. Osoitamme, että ehto B on voimassa. Teemme vastaväitteen: on olemassa sellaiset G:n pisteet x ja y, että $x \neq y$ ja G:ssä ei ole kulkua pisteestä x pisteeseen y. Merkitsemme $P = \{z \in P_G :$ G:ssä on kulku x:stä z:aan $\}$. Tällöin $x \in P$ ja $y \notin P$, joten $\emptyset \neq P \subsetneqq P_G$. Koska G on vahvasti yhtenäinen, niin G:ssä on nuoli joukosta P. Olkoon $\overrightarrow{zu}$ sellainen G:n nuoli, että $z \in P$ ja $u \notin P$. Koska $z \in P$, on G:ssä kulku $(x_0, ..., x_n)$ pisteestä x pisteeseen z. Mutta nyt $(x_0, ..., x_n, u)$ on kulku G:ssä, koska $x_n = z$ ja $\overrightarrow{zu} \in N_G$;

tämä on kuitenkin ristiriidassa sen kanssa, että $u \notin P$. Vastaväite johti ristiriitaan eikä siis voi pitää paikkaansa. Näin ollen ehto B on voimassa.

C$\Longrightarrow$D: Oletamme, että ehto C toteutuu. Olkoon a G:n piste. Esitämme G:n pisteiden joukon muodossa $P_G = \{p_1, ..., p_n\}$. Ehdon C voimassaolosta ja Lemman II 4.1 tuloksesta seuraa, että jokaisella $i \leq n$, suhteikossa G on pisteestä a lähtevä kierros $\bar{x}_i$, joka käy pisteessä p_i. Nyt $\bar{x}_1 \star \bar{x}_2 \star \cdots \star \bar{x}_n$ on sellainen kierros G:ssä, joka käy jokaisessa G:n pisteessä.

D$\Longrightarrow$A: Oletamme, että G:ssä on sellainen kierros $\bar{x}$, joka käy jokaisessa G:n pisteessä. Merkitsemme H:lla kierroksen $\bar{x}$ määrittämää suhteikkoa. Edellisen lemman nojalla H on vahvasti yhtenäinen; tästä seuraa, koska H on G:n alisuhteikko ja $P_H = P_G$, että myös G on vahvasti yhtenäinen. □

Korollaari *Suhteikon G pisteen x vahvasti yhtenäinen komponentti on joukon*

$$\{y \in P_G : G\text{:ssä on kulku } x\text{:stä } y\text{:hyn ja kulku } y\text{:stä } x\text{:ään}\}$$

virittämä G:n alisuhteikko.

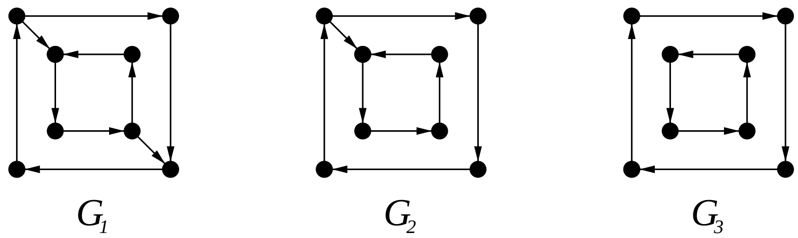
Todistus. Merkitsemme kyseistä joukkoa A:lla ja merkitsemme

$$K = \{\bar{x} : \bar{x} \text{ on pisteestä } x \text{ lähtevä kierros } G\text{:ssä}\}.$$

Lemmojen 4.1(c) ja 4.4 nojalla on voimassa $A = \bigcup_{\bar{x} \in K} P(\bar{x})$. Merkitsemme jokaisella $\bar{x} \in K$, $H(\bar{x})$:llä kierroksen $\bar{x}$ määrittämää G:n alisuhteikkoa; Lemman II 4.5 nojall $H(\bar{x})$ on vahvasti yhtenäinen. Merkitsemme $\mathcal{H} = \{H(\bar{x}) : \bar{x} \in K\}$. Koska jokaisella $H \in \mathcal{H}$ on voimassa $x \in P_H$, Lemman II 3.6 tuloksesta seuraa, että suhteikko $\bigvee \mathcal{H}$ on vahvasti yhtenäinen. Koska suhteikko $\bigvee \mathcal{H}$ on G:n vahvasti yhtenäinen alisuhteikko, jolle pätee, että $P_{\bigvee \mathcal{H}} = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} P_H = \bigcup_{\bar{x} \in K} P(\bar{x}) = A$, niin myös A:n virittämä G:n alisuhteikko J on vahvasti yhtenäinen.

Olkoon C pisteen x vahvasti yhtenäinen komponentti suhteikossa G. Koska $x \in A = P_J$, niin Lemman II 3.7 nojalla on voimassa $J \prec C$; täten on voimassa $A = P_J \subset P_C$. Toisaalta, koska C on vahvasti yhtenäinen, niin Lauseesta II 4.6 seuraa, että $P_C \subset A$. Edellä esitetyn nojalla pätee, että $P_C = A$; tästä seuraa Lemman II 3.5 nojalla, että $C = J$. □

Esimerkki Alla suhteikossa G_1 voidaan mistä tahansa pisteestä kulkea mihin tahansa muuhun pisteeseen ja G_1 on siis vahvasti yhtenäinen. Suhteikot G_2 ja G_3 eivät ole vahvasti yhtenäisiä: suhteikossa G_2 on jokaisesta ulomman neliön pisteestä kulku jokaiseen muuhun suhteikon pisteeseen, mutta mistään sisemmän neliön pisteestä ei ole kulkua mihinkään ulomman neliön pisteeseen; G_3:ssa puolestaan ei ole yhtään kulkua jommankumman neliön pisteestä toisen neliön pisteeseen. Sekä G_2:ssa että G_3:ssa on samat vahvasti yhtenäiset komponentit, jotka ovat G_3:n esityksessä näkyvät kaksi "erillistä osaa".



Suhteikon yhtenäisyyttä ei voida luontevasti karakterisoida suhteikon kulkujen avulla, mutta niiden avulla voidaan antaa eräitä riittäviä ehtoja yhtenäisyydelle.

Määritelmä Suhteikon G piste x on G:n *juuri*, mikäli x:stä on kulku jokaiseen muuhun G:n pisteeseen.

Lauseen II 4.6 nojalla suhteikko G on vahvasti yhtenäinen jos ja vain jos jokainen G:n piste on G:n juuri; G:n yhtenäisyydelle riittää pelkkä yhden juuren olemassaolo.

Lause *Jos suhteikolla on juuri, niin suhteikko on yhtenäinen.*

Todistus. Tämä seuraa Lemmojen II 4.5 ja II 3.6 tuloksista. □

Panemme merkille, että aikaisempien tulosten nojalla saamme seuraavan lauseen.

II 4.7 Lause *Merkitään J:llä suhteikon G juurten joukkoa. Tällöin G:ssä ei ole nuolta joukkoon J. Jos $J \neq \emptyset$, niin joukon J virittämä G:n alisuhteikko on G:n vahvasti yhtenäinen komponentti.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki Edellisen esimerkin suhteikon G_2 juurten joukko koostuu "ulomman neliön" pisteistä ja "ulompi neliö" on toinen G_2:n kahdesta vahvasti yhtenäisestä komponentista.

Tarkastelemme nyt kulkuja verkoissa. Jos $(x_0, ..., x_n)$ on kulku verkossa G, niin jokaisella $i \in [n]$ G:ssä on nuoli $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ ja täten myös nuoli $\overrightarrow{x_i x_{i-1}}$; tästä seuraa, että myös jono $(x_n, ..., x_0)$ on kulku verkossa G ja tästä puolestaan seuraa, että jono $(x_0, ..., x_n) \star (x_n, ..., x_0)$ on kierros verkossa G. Edellisen nojalla verkon G pisteille x ja y pätee, että G:ssä on kulku pisteestä x pisteeseen y jos ja vain jos G:ssä on kulku pisteestä y pisteeseen x.

Edellä tehtyjen huomioiden ja Lauseen II 4.6 avulla voimme johtaa verkon G yhtenäisyydelle seuraavat luonnehdinnat.

II 4.8 Lause *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät verkolle G:*
A. G on yhtenäinen.
B. Kaikilla $x, y \in P_G$, G:ssä on kulku pisteestä x pisteeseen y.
C. On olemassa sellainen piste $a \in P_G$, että jokaisella $x \in P_G$, G:ssä on kulku pisteestä x pisteeseen a.
D. G:ssä on kulku, joka käy jokaisessa G:n pisteessä.

Todistus. Koska verkko G on yhtenäinen jos ja vain jos G on vahvasti yhtenäinen, niin Lauseen II 4.6 tuloksesta seuraa, että ehdot A, B ja D ovat keskenään yhtäpitävät. Implikaatio B$\Longrightarrow$C on triviaalisti voimassa. Täten lauseen todistamiseksi riittää näyttää, että C$\Longrightarrow$B.
C$\Longrightarrow$B: Oletamme, että ehto C on voimassa. Olkoot x ja y G:n pisteitä. Osoitamme, että G:ssä on kulku pisteestä x pisteeseen y. Oletuksen nojalla G:ssä on kulku $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ pisteestä x pisteeseen a ja kulku $\bar{y} = (y_0, ..., y_m)$ pisteestä y pisteeseen a. Koska G on verkko, jono $\tilde{y} = (y_m, ..., y_0)$ on kulku G:ssä. Kulut $\bar{x}$ ja $\tilde{y}$ ovat peräkkäiset, joten jono $\bar{x} \star \tilde{y}$ on kulku G:ssä; selvästikin tämä on kulku pisteestä x pisteeseen y. □

Luonnehdimme lopuksi suhteikon kahden pisteen välisen kulun olemassaoloa suhteikon relaation avulla.

II 4.9 Lemma *Olkoon $G = (X, R)$ suhteikko, olkoot x ja y G:n pisteitä ja olkoon n luonnollinen luku. Tällöin G:ssä on n–askeleinen kulku x:stä y:hyn jos ja vain jos $x \in R^n\{y\}$.*

Todistus. Merkitsemme $J_n = \{z \in X : G\text{:ssä on } n\text{-askeleinen kulku } z\text{:sta } y\text{:hyn}\}$ ja osoitamme induktiolla luvun n suhteen, että $J_n = R^n\{y\}$.

Jos $n = 0$, niin $J_n = \{y\} = R^n\{y\}$.

Olkoon n sellainen luonnollinen luku, että $n > 0$ ja $J_{n-1} = R^{n-1}\{y\}$. Tällöin $J_n = R^n\{y\}$, sillä induktio–oletusta hyväksikäyttäen näemme jokaisella $z \in X$ olevan voimassa

$$\begin{aligned} z \in J_n &\iff \exists \text{ sellainen } G\text{:n kulku } (x_0, ..., x_n), \text{ että } x_0 = z \text{ ja } x_n = y \\ &\iff \exists \text{ sellainen } G\text{:n kulku } (x_1, ..., x_n), \text{ että } x_n = y \text{ ja } \overrightarrow{zx_1} \subset R \\ &\iff \exists \text{ sellainen } x_1 \in R^{n-1}\{y\}, \text{ että } z \in R\{x_1\} \\ &\iff z \in R\left(R^{n-1}\{y\}\right) \\ &\iff z \in R^n\{y\}\,. \qquad \square \end{aligned}$$

II 4.10 Korollaari *Suhteikossa $G = (X, R)$ on kulku pisteestä x pisteeseen y jos ja vain jos $x \in R^\infty\{y\}$.*

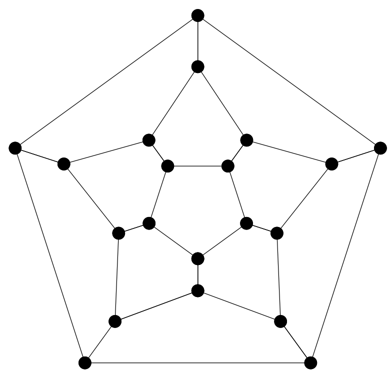
5. Hamiltonin kulut.

Näimme edellä, että jokaisessa vahvasti yhtenäisessä suhteikossa on kulku (itse asiassa kierros), joka käy jokaisessa suhteikon pisteessä. Seuraavaksi tarkastelemme sellaisia suhteikkoja, joissa on kulku tai kierros, joka käy jokaisessa suhteikon pisteessä täsmälleen yhden kerran.

Määritelmä Olkoon G suhteikko. *Hamiltonin kulku* G:ssä on yksinkertainen kulku G:ssä, joka käy jokaisessa G:n pisteessä.

Hamiltonin kierros on suljettu Hamiltonin kulku, joka ei ole muotoa (x, y, x).

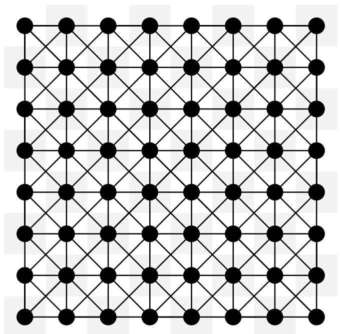
"Hamiltonin kulut" ovat saaneet nimensä irlantilaisen matemaatikon W.R. Hamiltonin mukaan, joka ensimmäisenä eksplisiittisesti tutki näitä kulkuja. Hamilton osoitti, että jokaisessa avaruuden säännölliseen monitahokkaaseen liittyvässä verkossa (kuten Luvussa II 1 mainituissa kuutioon ja säännölliseen 12–tahokkaaseen liittyvissä verkoissa) on Hamiltonin kulku; v. 1856 hän esitti "pelin", joka perustui erilaisten Hamiltonin kierrosten etsimiseen säännölliseen 12–tahokkaaseen liittyvästä verkosta ja hän onnistui jopa kauppaamaan pelin lelutehtailijalle. Kun esitämme säännöllisen dodekaedrin sopivan tasoprojektion avulla, niin saamme siihen liittyvälle verkolle seuraavanlaisen esityksen, josta näkyy helposti, että verkossa on Hamiltonin kierros.



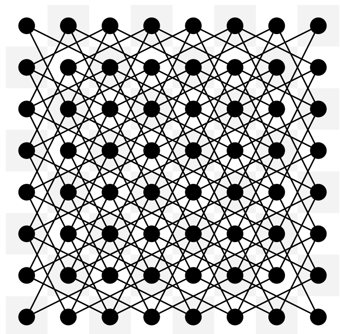
Harjoitustehtävä. Osoita, että yllä kuvatussa verkossa on Hamiltonin kierros.

"Hamiltonin kulkuja" oli kuitenkin erilaisissa konkreettisissä yhteyksissä tarkasteltu jo paljon ennen Hamiltonia. Esimerkiksi eräät ikivanhat shakkipelin eri nappuloiden liikkeisiin liityvät ongelmat voidaan palauttaa Hamiltonin kulkujen etsimiseen nappuloiden siirtojen määräämistä verkoista.

Esimerkki Tarkastelemme jälleen shakkipelin kuninkaaseen ja hevoseen liittyviä verkkoja (katso Esimerkkiä II 2.5):



K

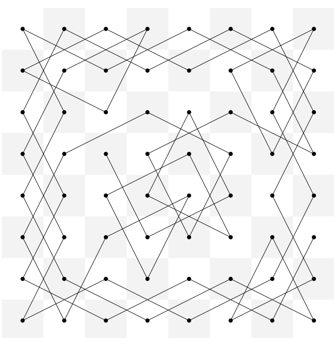


H

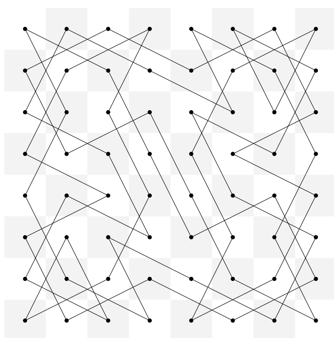
On triviaalia, että verkossa K on Hamiltonin kulku ja lukija voi aivan helposti myös löytää K:sta Hamiltonin kierroksen. Paljon mielenkiintoisempi ongelma on se, onko verkossa H Hamiltonin kulkua tai kierrosta. Tämä ongelma on ikivanha, mutta se tunnetaan kuitenkin usein "Eulerin ongelman" nimellä, koska suuri 1700–luvun matemaatikko Leonard Euler oli ensimmäinen, joka tarkasteli ongelmaa matemaattiselta kannalta; hän julkaisi siitä kirjoitelman "Ratkaisu erääseen kiinnostavaan ongelmaan, jonka tutkiminen näyttää mahdottomalta".

Myös verkossa H on Hamiltonin kierros. Hamiltonin kulkua verkossa H kutsutaan “ratsun marssiksi”. Näitä ratsun marsseja on löytynyt tuhansia ja kiinnostavimpia ovat sellaiset, joilla on joitakin säännönmukaisuusominaisuuksia. Lukija voi helposti itsekin konstruoida ratsun marsseja valitsemalla aloitusruudun mielivaltaisesti ja soveltamalla sen jälkeen joka askeleella nk. Warnsdorfin sääntöä: seuraavaksi siirrytään sellaiseen ruutuun, josta on pienin mahdollinen määrä siirtoja “vapaisiin” ruutuihin; sääntö voi tosin joskus (harvoin) johtaa umpikujaan, mutta yleensä se toimii halutulla tavalla.

Seuraavassa kuvassa on vasemmalla esitetty yksi (Warnsdorfin säännön avulla konstruoitu) ratsun marssi piirtämällä kulun askelina olevat viivat näkyviin; kuva ei määrää “kulkusuuntaa”, mutta valitsemalla “lähtöpiste” saadaan viivoja seuraamalla määritettyä ratsun marssi. Keskellä on esitetty yksi ratsun marssi numeroimalla shakkilaudan ruudut ratsun kulun määräämässä järjestyksessä; tämän marssin on löytänyt 1800-luvun suomalaissyntyinen shakkimestari Jaenisch (=Jänis) ja sillä on se hämmästyttävä lisäominaisuus, että ruutujen numerointi antaa “puolittaisen taikaneliön”: jokaisen vaakarivin numeroiden summa on sama luku (260) ja jokaisen pystyrivin numeroiden summa on sama luku (260). Alla oikealla on esitetty Jaenischin keksimän marssin kulku piirtämällä sen määräämät viivat näkyviin; tästä esityksestä näkee, että marssilla on “puolimaagisuuden” lisäksi muitakin säännönmukaisuus– ja symmetriaominaisuuksia.



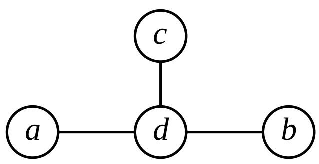
50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18



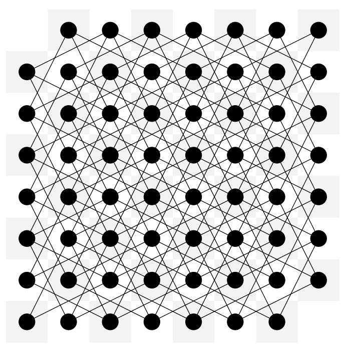
Jaenischin ja muiden shakin harrastajien löytämät “puolimaagiset” ratsun marssit herättivät kysymyksen, onko olemassa sellaista ratsun marssia, joka antaisi “oikean” taikaneliön (jolloin myös kummankin päähalkaisijan numeroiden summa on sama “maaginen” luku 260)? Tämä ongelma ratkesi v. 2003 kun G. Stertenbrink ja J.C. Meyrignac onnistuivat tietokoneen avulla luettelemaan kaikki mahdolliset “puolimaagiset” ratsun marssit: niitä löytyi 140 oleellisesti erilaista, eikä mikään niistä ollut oikeasti “maaginen”.

Jos $\bar{x}$ on Hamiltonin kulku suhteikossa G, niin $\bar{x}$ on myös Hamiltonin kulku suhteikossa G^s; tästä seuraa, että suhteikko G^s on yhtenäinen ja näin muodoin, Lauseen II 3.3 nojalla, suhteikko G on yhtenäinen. Toisaalta, jos $\bar{x}$ on G:n Hamiltonin kierros, niin Lauseen II 4.6 tuloksesta seuraa, että G on vahvasti yhtenäinen. Vahva yhtenäisyyskään ei ole riittävä ehto Hamiltonin kulun olemassaololle.

II 5.2 Esimerkkejä **(a)** Alla kuvattu verkko on yhtenäinen ja täten vahvasti yhtenäinen, mutta siinä ei ole Hamiltonin kulkua, koska jokainen kulku, joka käy kaikissa verkon pisteissä, käy ainakin kaksi kertaa verkon “keskipisteessä” d.



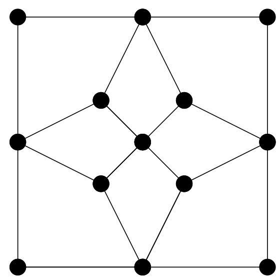
(b) Poistetaan shakkilaudan ruudukosta kaksi vastakkaista kulmaruutua ja tarkastellaan tämän typistetyn ruudukon virittämää hevosen liikkeiden määräämän verkon H aliverkkoa H':



Osoitetaan, ettei verkossa H' ole Hamiltonin kulkua, toisin sanoen, ettei typistetyssä ruudukossa ole hevosen marssia.

Ratkaisu: Hevosen liikkuessa ruudun väri vaihtuu jokaisella siirrolla. Täten, jos verkossa H' olisi Hamiltonin kulku, niin valkoisten ja mustien ruutujen lukumäärät voisivat erota toisistaan korkeintaan yhdellä (jos kulku olisi kierros, niin lukumäärien olisi oltava samat). Koska yllä kuvatussa typistetyssä ruudukossa on 32 mustaa ruutua ja 30 valkoista ruutua, niin siihen liittyvässä verkossa H' ei voi olla Hamiltonin kulkua.

(c) Edellisessä esimerkissä käytetty päättely on usein käyttökelpoinen Hamiltonin kulkuihin liittyvissä tarkasteluissa. Annetaan sen käytöstä toinenkin esimerkki osoittamalla, ettei alla kuvatussa verkossa ole Hamiltonin kulkua.



Ratkaisu: Merkitään kyseistä verkkoa G:llä. Verkossa G on viisi pistettä, joiden aste on neljä; merkitään näiden viiden pisteen joukkoa A:lla ja merkitään joukkoa $P_G \smallsetminus A$ B:llä. Pannaan merkille, etteivät mitkään kaksi joukon A pistettä ole vierekkäin G:ssä eivätkä mitkään kaksi joukon B pistettä ole vierekkäin G:ssä; tästä seuraa, että jos $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ on kulku G:ssä, niin jokaisella $i \in [n]$ on voimassa $x_i \in A \iff x_{i-1} \in B$ ja tästä seuraa edelleen, että joukkojen $\{i \leq n : x_i \in A\}$ ja $\{i \leq n : x_i \in B\}$ alkioiden lukumäärät voivat erota toisistaan korkeintaan yhdellä. Koska on voimassa $|A| = 5$ ja $|B| = 8$, niin edellisestä seuraa, ettei mikään yksinkertainen kulku verkossa G voi kulkea kaikkien G:n pisteiden kautta.

Yleensä on vaikeaa päätellä onko annetussa suhteikossa tai annetussa verkossa Hamiltonin kulkua. Tunnetaan kyllä monia suhteellisen yksinkertaisia riittäviä ehtoja Hamiltonin kulun olemassaololle, mutta yksinkertaisia välttämättömiä ja riittäviä ehtoja ei ole löytynyt. Ei myöskään tunneta mitään "tehokkaita" algoritmeja, joiden avulla voitaisiin selvittää onko annetussa suhteikossa Hamiltonin kulkua vai ei.

Annetaan nyt eräs riittävä ehto Hamiltonin kulun olemassaololle.

On triviaalia, että täydellisessä verkossa on Hamiltonin kulku. Osoitetaan nyt, että myös jokaisessa täydellisessä suhteikossa on Hamiltonin kulku. Todistetaan ensin eräs aputulos.

II 5.3 Lemma *Olkoon G täydellinen suhteikko, olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ kulku G:ssä ja olkoon u sellainen G:n piste, joka ei kuulu joukkoon $P(\bar{x})$. Tällöin on olemassa sellainen $0 \leq j \leq n+1$, että jono $\bar{z} = (z_0, ..., z_{n+1})$, missä $z_i = x_i$ kun $i < j$, $z_j = u$ ja $z_i = x_{i-1}$ kun $i > j$, on kulku suhteikossa G.*

Todistus. Jos G:ssä on nuoli $\overrightarrow{ux_0}$, niin voimme valita $j = 0$ ja jos G:ssä on nuoli $\overrightarrow{x_n u}$, niin voimme valita $j = n+1$.

Oletamme, ettei G:ssä ole nuolta $\overrightarrow{ux_0}$ eikä nuolta $\overrightarrow{x_n u}$. Koska G on täydellinen, niin G:ssä on tällöin nuolet $\overrightarrow{x_0 u}$ ja $\overrightarrow{ux_n}$. Merkitseme k:llä epätyhjän joukon $A = \{i \in [n] : \overrightarrow{x_i u} \in N_G\}$ suurinta lukua ja panemme merkille, että $1 \leq k < n$. Osoitamme, että luvulla $j = k+1$ on lemmassa vaadittu ominaisuus. Määrittelemme jonon $\bar{z}$ kuten lemmassa. Koska $1 < j < n+1$ ja koska jono $(x_0, ..., x_n)$ on kulku G:ssä, niin näemme, että jono $\bar{z}$ on kulku G:ssä, mikäli G:ssä on nuolet $\overrightarrow{x_{j-1} u}$ ja $\overrightarrow{ux_j}$. Koska $j-1 = k$ ja $k \in A$, G:ssä on nuoli $\overrightarrow{x_{j-1} u}$. Luvun k maksimaalisuudesta seuraa, että $k+1 \notin A$ eli $j \notin A$. Täten G:ssä ei ole nuolta $\overrightarrow{x_j u}$; tästä seuraa G:n täydellisyyden nojalla, että G:ssä on nuoli $\overrightarrow{ux_j}$. □

II 5.4 Lause *Jokaisessa täydellisessä suhteikossa on Hamiltonin kulku.*

Todistus. Olkoon G epätyhjä täydellinen suhteikko. Merkitsemme n:llä suurinta lukua k, jolla on olemassa sellainen kulku $\bar{z} = (z_0, ... z_k)$ suhteikossa G, että $|P(\bar{z})| = k+1$; panemme merkille, että $0 \leq n < |P_G|$. Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ sellainen kulku G:ssä, että $|P(\bar{x})| = n+1$. Osoitamme, että $P(\bar{x}) = P_G$. Teemme vastaväitteen: on olemassa $u \in P_G \setminus P(\bar{x})$. Edellisen lemman nojalla on olemassa sellainen kulku $\bar{z} = (z_0, ..., z_{n+1})$ G:ssä, että $P(\bar{z}) = P(\bar{x}) \cup \{u\}$. Koska $|P(\bar{x})| = n+1$ ja $u \notin P(\bar{x})$, on voimassa $|P(\bar{z})| = n+2$. Tämä on ristiriidassa luvun n maksimaalisuuden kanssa. Täten vastaväite on väärä ja on voimassa $P(\bar{x}) = P_G$. Koska $|P(\bar{x})| = n+1$, kulku $\bar{x}$ on yksinkertainen; näin ollen $\bar{x}$ on Hamiltonin kulku. □

Jos $(x_0, ..., x_n)$ on Hamiltonin kulku suhteikossa G, niin piste x_0 on selvästikin suhteikon G juuri. Täten saamme seuraavan tuloksen.

Korollaari *Jokaisella epätyhjällä täydellisellä suhteikolla on juuri.*

Harjoitustehtävä. Etsi Hamiltonin kulku luvussa II.2 (s. 24) kuvatusta seitsemän pisteen täydellisestä suhteikosta. Onko suhteikossa Hamiltonin kierrosta?

Täydellisessä suhteikossa ei ole välttämättä Hamiltonin kierrosta, kuten nähdään esimerkiksi tarkastelemalla suhteikkoa H: $P_H = \{1, 2\}$ ja $N_H = \{\overrightarrow{12}\}$. Edellä totesimme, että välttämätön ehto Hamiltonin kierroksen olemassaololle on suhteikon vahva yhtenäisyys; osoitamme nyt, että tämä välttämätön ehto on täydellisen suhteikon tapauksessa myös riittävä.

II 5.5 Lause *Täydellisessä suhteikossa on Hamiltonin kierros jos ja vain jos suhteikko on vahvasti yhtenäinen.*

Todistus. Olkoon H vahvasti yhtenäinen täydellinen suhteikko. Osoitamme, että H:ssa on Hamiltonin kierros. Tyhjä jono on tyhjän suhteikon Hamiltonin kierros, joten voimme olettaa, että H on epätyhjä suhteikko. Tällöin H:ssa on ainakin nolla–askelisia yksinkertaisia kierroksia (x). Panemme merkille, että jos $\bar{x}$ on yksinkertainen kierros H:ssa, niin $\bar{x}$:n askelten lukumäärä on korkeintaan sama kuin H:n pisteiden lukumäärä; tästä seuraa, että H:ssa on sellainen yksinkertainen kierros $\bar{z} = (z_0, ..., z_m)$, että jokaisen muun H:n yksinkertaisen kierroksen askelten lukumäärä on korkeintaan m. Osoitamme, että $\bar{z}$ on Hamiltonin kierros eli että $P(\bar{z}) = P_H$.

Teemme vastaväitteen: $P(\bar{z}) \neq P_H$. Merkitsemme $P = P_H \setminus P(\bar{z})$. Tällöin $\emptyset \neq P \subsetneq P_H$. Tarkastelemme kahta eri tapausta:

Tapaus 1^o. Oletamme, että on olemassa sellainen joukon P piste p ja sellaiset joukon $P(\bar{z})$ pisteet x ja y, että H:ssa on nuolet $\overrightarrow{xp}$ ja $\overrightarrow{py}$. Huomaamme, että on oltava $m > 0$, koska muuten olisi $x = y$ ja (x, p, x) olisi 2-askeleinen yksinkertainen kierros H:ssa. Lemman II 4.1(c) nojalla voimme olettaa, että on voimassa $x = z_0$. Olkoon $y = z_k$, missä $k = m$ jos $x = y$. Merkitsemme $\ell = \min\{i \in [k] : \overrightarrow{px_i} \in N_H\}$. Jos $\ell > 1$, niin $\overrightarrow{pz_{\ell-1}} \notin N_H$ ja tästä seuraa täydellisyyden nojalla, että $\overrightarrow{z_{\ell-1}p} \in N_H$; tämä ehto pätee myös tapauksessa $\ell = 1$, koska $z_0 = x$. Nyt näemme, että $\bar{z}' = (z_0, ..., z_{\ell-1}, p, z_\ell, ...z_m)$ on yksinkertainen kierros H:ssa; tämä on kuitenkin ristiriidassa luvun m maksimaalisuuden kanssa, sillä kierroksen $\bar{z}'$ askelten lukumäärä on $m + 1$.

Tapaus 2^o. Oletamme, ettei millään joukon P pisteellä p ole olemassa joukon $P(\bar{z})$ pisteitä x ja y, joille olisi voimassa $\overrightarrow{xp} \in N_H$ ja $\overrightarrow{py} \in N_H$. Tällöin suhteikon

H täydellisyydestä seuraa, että on voimassa $P = Q \cup R$, missä $R = \{r \in P : \overrightarrow{ry} \in N_H$ jokaisella $y \in P(\bar{z})\}$ ja $Q = \{q \in P \setminus R : \overrightarrow{xq} \in N_H$ jokaisella $x \in P(\bar{z})\}$. Vahvan yhtenäisyyden nojalla H:ssä on nuoli joukosta P ja tästä seuraa, koska H:ssa ei ole nuolta joukosta Q joukkoon $P(\bar{z}) = P_H \setminus P$, että on voimassa $R \neq \emptyset$. Vahvan yhtenäisyyden nojalla H:ssa on nuoli $\overrightarrow{ab}$, missä $a \notin R$ ja $b \in R$. Koska H:ssa ei ole nuolta joukosta $P(\bar{z})$ joukkoon R, on voimassa $a \in Q$. Nyt $(z_0, a, b, z_1, ..., z_m)$ on $m + 2$–askeleinen yksinkertainen kierros H:ssa ja tämä on ristiriidassa luvun m maksimaalisuusominaisuuden kanssa.

Koska molemmat tapaukset johtivat ristiriitaan, vastaväite on väärä ja $\bar{z}$ on Hamiltonin kierros H:ssa. □

Annamme lopuksi erään käyttökelpoisen riittävän (muttei välttämättömän) ehdon Hamiltonin kierroksen olemassaololle verkossa. Todistuksessa tarvitsemme seuraavaa apulausetta.

II 5.6 Lemma *Olkoon $(x_0, ..., x_n)$ Hamiltonin kulku verkossa H. Jos H:ssa ei ole Hamiltonin kierrosta, niin on voimassa $d_H(x_0) + d_H(x_n) < p_H$.*

Todistus. Oletamme, ettei H:ssa ole Hamiltonin kierrosta; panemme merkille, että tällöin $\overline{x_0 x_n} \notin V_H$. Panemme myös merkille, että koska $(x_0, ..., x_n)$ on Hamiltonin kulku muttei kierros, niin $p_H = n+1$. Merkitsemme $A = \{i \in [n] : \overline{x_0 x_i} \in V_H\}$ ja $B = \{j \in [n] : \overline{x_n x_j} \in V_H\}$ ja panemme merkille, että $d_H(x_0) = |A|$ ja $d_H(x_n) = |B|$. Jokaisella $i \in A$ on voimassa $i - 1 \notin B$, sillä muussa tapauksessa jono

$$(x_0, x_i, x_{i+1}, ..., x_{n-1}, x_n, x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_1, x_0)$$

olisi Hamiltonin kierros verkossa H. Edellisen nojalla joukossa $\{0, ..., n\}$ on ainakin $|A|$ alkiota j, missä $j < n$, jotka eivät kuulu joukkoon B; koska myöskään luku n ei kuulu joukkoon B, saamme epäyhtälön $|B| < n+1-|A|$ eli $d_H(x_0)+d_H(x_n) < p_H$.
□

II 5.7 Lause *Olkoon G sellainen verkko, jonka pisteiden lukumäärä on suurempi kuin kaksi ja jonka kaikille pisteille $a \neq b$ pätee, että jos a ja b eivät ole vierekkäin G:ssä, niin $d_G(a) + d_G(b) \geq p_G$. Tällöin verkossa G on Hamiltonin kierros.*

Todistus. Merkitsemme

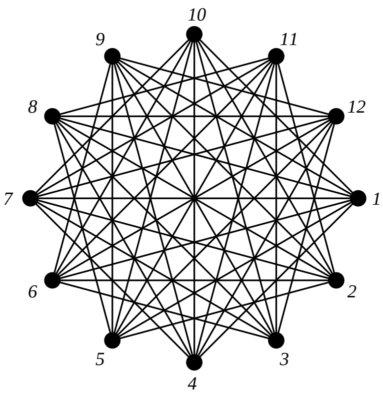
$$W = \{\overline{xy} : x, y \in P_H, x \neq y \text{ ja } \overline{xy} \notin V_H\}$$

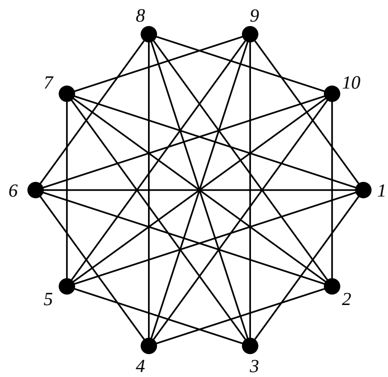
ja esitämme joukon W muodossa $\{v_1, ..., v_m\}$. Merkitsemme jokaisella $0 \leq i \leq m$ H_i:llä ehtojen $P_{H_i} = P_G$ ja $V_{H_i} = V_G \cup \{v_j : j \in [i]\}$ määräämää verkkoa. Panemme merkille, että $H_0 = G$ ja H_m on täydellinen verkko.

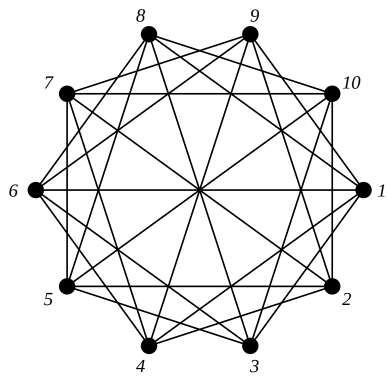
Täydellisessä verkossa H_m on enemmän kuin kaksi pistettä ja täten H_m:ssä on Hamiltonin kierros. Osoitamme, että myös verkossa $H_0 = G$ on tällainen kierros. Teemme vastaväitteen: H_0:ssa ei ole Hamiltonin kierrosta. Merkitsemme k:lla lukujoukon $\{i \in [m] : H_i\text{:ssä on Hamiltonin kierros}\}$ pienintä lukua ja merkitsemme edelleen $H_{k-1} = H$, $H_k = J$ ja $v_k = v$. Tällöin verkossa J on Hamiltonin kierros, mutta verkossa H ei ole. Osoitamme, että verkossa H on Hamiltonin kulku. Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_t)$ Hamiltonin kierros verkossa J. Koska $P_H = P_J$ ja $V_H = V_J \setminus \{v\}$, on jollain $i \in [t]$ oltava voimassa $\overline{x_{i-1}x_i} = v$: muussa tapauksessa $\bar{x}$ olisi Hamiltonin kierros myös verkossa H. Lemman II 3.1(c) nojalla voimme olettaa, että on voimassa $\overline{x_0x_1} = v$. Kierroksen $\bar{x}$ yksinkertaisuudesta seuraa nyt, että jokaisella $1 < i \leq n$ on voimassa $\overline{x_{i-1}x_i} \neq v$ ja tästä seuraa, että jono $\bar{x}' = (x_1, ..., x_n)$ on kulku verkossa H; jono $\bar{x}'$ on Hamiltonin kulku, koska on voimassa $x_n = x_0$ ja täten $\{x_1, ..., x_n\} = \{x_0, ..., x_n\}$. Edellisen lemman nojalla on voimassa $d_H(x_1) + d_H(x_m) < p_H$. Koska G on H:n aliverkko ja $P_G = P_H$, niin edellisestä seuraa, että $d_G(x_1) + d_G(x_m) < p_G$; tästä epäyhtälöstä seuraa kuitenkin ristiriita lauseen oletuksen kanssa, sillä pisteet x_1 ja x_m eivät ole vierekkäin G:ssä, koska $\overline{x_1x_m} = \overline{x_0x_1} = v = v_k$ ei ole G:n viiva. □

II 5.8 Korollaari *Verkossa G on Hamiltonin kierros, mikäli $|P_G| > 2$ ja jokaisella $x \in P_G$ on voimassa $d_G(x) \geq \frac{1}{2}p_G$.*

Edellisten tulosten nojalla voimme päätellä, että alla olevista verkoista löytyy Hamiltonin kierrokset (*etsi!*)







6. Riippumattomat joukot.

Luvussa I.2 esitetty Hallin lause antaa välttämättömän ja riittävän ehdon sille, että äärellisten joukkojen X ja Y välinen relaatio $R \subset X \times Y$ sisältää injektion $X \to Y$. Tarkoituksenamme on tässä luvussa esittää Hallin lauseen seurauksia verkoille. Määrittelemme ensin tilanteeseen sopivaa terminologiaa.

6.1 Määritelmä Olkoon G verkko. Joukko $E \subset P_G$ on *riippumaton pistejoukko*, jos mitkään kaksi joukon E pistettä eivät ole vierekkäin G:ssä. Joukko $W \subset V_G$ on *riippumaton viivajoukko*, jos millään kahdella joukon W viivalla ei ole yhteisiä päätepisteitä.

Merkitsemme jokaisella viivajoukolla $W \subset V_G$ joukon W viivojen päätepisteiden joukkoa $\{x \in P_G : \overline{xy} \in W \text{ jollain } y \in P_G\}$ symbolilla P_W. *Joukon W virittämä G:n aliverkko* on ehtojen $P_H = P_W$ ja $V_H = W$ määrittämä verkko H.

Panemme merkille, että verkon G viivajoukko W on riippumaton jos ja vain jos W:n virittämä G:n aliverkko on 1-säännöllinen.

Riippumattomille viivajoukoille käytetään usein eri tilanteisiin sopivaa, "värikkäämpää" terminologiaa. Riippumattomalle viivajoukolle W käytetään toisinaan nimitystä "parijako" (engl. "matching"), koska W "jakaa" pistejoukon P_W pareihin $\{x, y\}$, $\overline{xy} \in W$. Voimme myös kutsua 1-säännöllisiä verkkoja "pariverkoiksi".

Sanomme, että viivajoukko $W \subset V_G$ *peittää pistejoukon* $Q \subset P_G$, mikäli $Q \subset P_W$. Sanomme myös, että pistejoukko P *peittää viivajoukon* W, mikäli jokaisella W:n viivalla on ainakin yksi päätepiste joukossa P.

Panemme merkille, että verkon kaikkien pisteiden joukko peittää kaikkien viivojen joukon, mutta kaikkien viivojen joukko ei peitä verkon eristettyjä pisteitä.

Viivajoukko $W \subset V_G$ on *täydellinen parijako* verkossa G, mikäli W on riippumaton ja W peittää joukon P_G.

Huomaamme, että jos verkossa on täydellinen parijako, niin verkon pisteiden lukumäärä on parillinen, eikä verkossa ole eristettyjä pisteitä.

Toteamme seuraavaksi, että verkon riippumattomat piste- ja viivajoukot liittyvät verkon relaation sisältämiin injektioihin.

6.1 Lemma *Olkoon $G = (X, R)$ verkko.*

(a) Jos E on G:n riippumaton pistejoukko ja $f \subset R$ on injektio $E \to X$, niin G:n viivajoukko $\{\overline{pf(p)} : p \in E\}$ on riippumaton.

(b) Jos G:n riippumaton viivajoukko W peittää G:n pistejoukon D, niin R sisältää injektion $D \to X$.

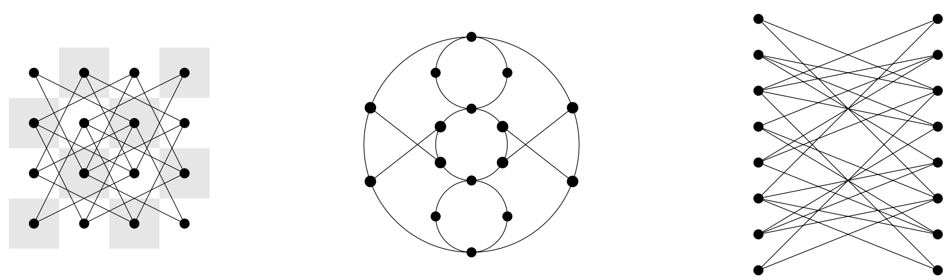
Todistus. Harjoitustehtävä. □

Olkoon $G = (X, R)$ verkko. Jokaisella pistejoukolla $A \subset X$ on voimassa $R(A) = \{b \in X : \overline{ab} \in V_G \text{ jollain } a \in A\}$. Täten luku $|R(A)|$ ilmaisee niiden G:n pisteiden lukumäärän, joihin on viiva joukosta A. Sanomme, että *Hallin ehto toteutuu G:n pistejoukolle E*, mikäli $|A| \leq |R(A)|$ jokaisella $A \subset E$. Jos Hallin ehto toteutuu G:n riippumattomalle pistejoukolle E, niin voimme soveltaa Hallin lausetta (Lause I.2.2) relaatioon $R \cap (E \times X)$; näin saamme edellisen lemman nojalla seuraavan tuloksen, jota voi kutsua *Hallin lauseeksi verkoille.*

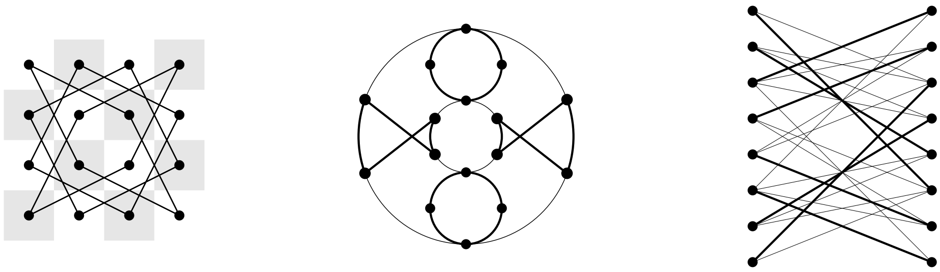
6.2 Lause *Verkon $G = (X, R)$ riippumaton pistejoukko E on jonkun G:n riippumattoman viivajoukon peittämä jos ja vain Hallin ehto toteutuu joukolle E.*

Verkko G on *kaksijakoinen*, jos joukko P_G on kahden riippumattoman joukon yhdiste. Selvästikin kaksijakoisen verkon jokainen aliverkko on kaksijakoinen ja verkko on kaksijakoinen, mikäli verkon jokainen komponentti on kaksijakoinen.

6.3 Esimerkki Määritelmän II.1.3 jälkeisessä esimerkissä tarkasteltiin verkkoa G, jonka pisteinä ovat 4×4 shakkilaudan ruudut ja jossa kahta ruutua yhdistää viiva jos ja vain jos shakkipelin hevosnappula pääsee yhdellä “hypyllä” ruudusta toiseen. Verkko G on kaksijakoinen, koska ruudun väri aina vaihtuu hevosen hypyssä. Verkon esitys “tyypillisenä” kaksijakoisena verkkona ei kuitenkaan ole kovin havainnollinen ja monet verkon ominaisuudet tulevat paremmin näkyviin verkon alkuperäisestä tai sen aikaisemmin tarkastellusta isomorfisesta esityksestä:



Löydämme G:stä helposti täydellisen parijaon. Alla G:n vasemmanpuolisissa esityksissä näkyy neljä yksinkertaiseen kierrokseen liittyvää viivajoukkoa R_1, R_2, R_3, R_4, joiden pistejoukot $P_{R_1}, P_{R_2}, P_{R_3}, P_{R_4}$ ovat keskenään erilliset. On voimassa $P_{R_1} \cup P_{R_2} \cup P_{R_3} \cup P_{R_4} = P_G$ ja jos valitsemme kustakin joukosta R_i kahden viivan riippumattoman osajoukon U_i, niin $U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$ on täydellinen parijako verkossa G. Alla oikeanpuolimmaisessa G:n esityksessä näkyy tällä tavalla muodostettu täydellinen parijako.



Edellistä lausetta käytetään usein kaksijakoisen verkon G tapauksessa valitsemalla E:ksi jompikumpi niistä kahdesta riippumattomasta joukosta, joiden yhdisteenä joukko P_G on esitetty. Monia tilanteita, joissa Hallin lausetta sovelletaan, voidaan luontevasti kuvailla kaksijakoisen verkon avulla. Esimerkiksi Luvussa I.2 mainittu työllistämisongelma, missä henkilöitä X sovitetaan työpaikkoihin Y, voidaan esittää verkon G avulla, missä $P_G = X \cup Y$ ja $V_G = \{\overline{xy} :$ henkilö x voi suorittaa työn $y\}$. Joukon X peittävä G:n riippumaton viivajoukko vastaa henkilöiden X sovittamista työpaikkoihin Y.

6.4 Lause *Olkoon verkko $G = (X, R)$ kaksijakoinen ja ℓ-säännöllinen, missä $\ell > 0$. Tällöin verkossa G on täydellinen parijako.*

Todistus. Jokaisella $x \in X$ on voimassa $|R\{x\}| = \ell = |R^{-1}\{x\}|$ ja tästä seuraa Korollaarin I.2.4 nojalla, että R sisältää injektion $f : X \to X$. Esitämme G:n pisteiden joukon X muodossa $A \cup B$, missä joukot A ja B ovat riippumattomia. Tällöin $f|A$ on kuvaus $A \to B$ ja $f|B$ on kuvaus $B \to A$ ja tästä seuraa f:n injektiivisuuden nojalla, että $|A| = |B|$. Täten $f|A$ on bijektio $A \to B$. Lemman 4.3 nojalla G:n viivajoukko $W = \{\overline{af(a)} : a \in A\}$ on riippumaton. Lisäksi W peittää sekä joukon A että joukon B, joten W on G:n täydellinen parijako. $\square$

Edellinen tulos *ei* päde yleisille säännöllisille verkoille. Esimerkiksi 2-säännöllisessä "kolmioverkossa" K_3 ei ole täydellistä parijakoa.

Luvussa I.2 tarkistelimme täydellistä parijakoa vastaavan "täydellisen sovituksen" olemassaolon lisäksi myös "mahdollisimman hyvän osittaisen sovituksen" olemassaoloa. Seuraava tulos on verkkoteoreettinen vastine mahdollisimman hyvän osittaisen sovituksen olemassaoloa koskevalle lauseelle I.2.5.

6.5 Lause *Olkoon A verkon $G = (X, R)$ riippumaton pistejoukko. Merkitsemme δ_A:lla suurinta luvuista $|D| - |R(D)|$, missä $D \subset A$. Tällöin joukolla A on sellainen osajoukko E, että $|E| = |A| - \delta_A$ ja E on jonkun G:n riippumattoman viivajoukon peittämä.*

Todistus. Tämä tulos seuraa Lauseesta I.2.5 Lemman 6.1 sekä Lausetta 6.2 edeltävän huomion nojalla. □

Todistamme nyt edellisen lauseen avulla kaksijakoisia verkkoja koskevan "Königin lauseen".

6.6 Lause *Olkoon G kaksijakoinen verkko. Tällöin G:n suurikokoisin riippumaton viivajoukko on samankokoinen kuin pienikokoisin G:n pistejoukko, joka peittää G:n kaikkien viivojen joukon.*

Todistus. Merkitsemme $\mathcal{I} = \{W \subset V_G : W \text{ on riippumaton}\}$ ja $i = \max\{|W| : W \in \mathcal{I}\}$ sekä $\mathcal{C} = \{C \subset P_G : C \text{ peittää joukon } V_G\}$ ja $c = \min\{|C| : C \in \mathcal{C}\}$.

Jos $C \in \mathcal{C}$ ja $W \in \mathcal{I}$, niin jokaisella $\overline{xy} \in W$ on voimassa $\{x, y\} \cap C \neq \emptyset$; tästä seuraa W:n riippumattomuuden nojalla, että $|C| \geq |W|$. Tämän huomion nojalla pätee epäyhtälö $c \geq i$.

Osoitamme vielä, että $c \leq i$. Olkoon $G = (X, R)$. Koska G on kaksijakoinen, on olemassa sellaiset G:n riippumattomat pistejoukot A ja B, että $X = A \cup B$ ja $A \cap B = \emptyset$. Merkitsemme $\delta_A = \max\{|D| - |R(D)| : D \subset A\}$. Lauseen 4.7 nojalla on olemassa sellainen joukko $E \subset A$, että $|E| = |A| - \delta_A$ ja E on jonkun G:n riippumattoman viivajoukon peittämä. Lauseen I.2.5 todistuksen viimeisen kappaleen sisältämä päättely osoittaa, että E on suurikokoisin A:n osajoukko, joka on jonkun G:n riippumattoman viivajoukon peittämä; tästä puolestaan seuraa, koska $E \subset A$ ja A on G:n "kaksijaon toinen tekijä", että $|E| = i$. Edellä esitetyn nojalla pätee, että $i = |A| - \delta_A$.

Todistuksen loppuun saattamiseksi osoitamme, että $c \leq |A| - \delta_A$. Olkoon joukolle $F \subset A$ voimassa $|F| - |R(F)| = \delta_A$. Näemme helposti, että verkon G pistejoukko $(A \setminus F) \cup R(F)$ peittää kaikki verkon G viivat. Näin ollen $c \leq |(A \setminus F) \cup R(F)| = |A| - |F| + |R(F)| = |A| - \delta_A$. □

Riippumattomilla viivajoukoilla ja riippumattomilla pistejoukoilla on yhteys verkon "viivaverkon" välityksellä.

6.7 Määritelmä Verkon G *viivaverkko* on se verkko $L(G)$, jolla $P_{L(G)} = V_G$ ja jossa $\overline{v\,w} \in V_{L(G)}$ jos ja vain jos $v, w \in P_{L(G)}$, $v \neq w$ ja G:n viivoilla v ja w on yhteinen päätepiste.

Suoraan pisteiden ja viivojen riippumattomuuden määritelmien nojalla saamme seuraavan tuloksen.

6.8 Lemma *Olkoon G verkko ja $W \subset V_G$. Tällöin W on G:n riippumaton viivajoukko jos ja vain jos W on $L(G)$:n riippumaton pistejoukko.*

Verkon G *riippumattomuusluku* $\rho(G)$ on $\max\{|R| : R \subset P_G$ ja R on riippumaton$\}$ ja G:n *riippumattomuusindeksi* $\nu(G)$ on $\max\{|W| : W \subset V_G$ ja W on riippumaton$\}$.

Edellisen lemman nojalla pätee yhtälö $\nu(G) = \rho(L(G))$.

Jos G on kaksijakoinen, niin Königin lauseen nojalla luku $\nu(G)$ ilmoittaa myös pienimmän kaikki viivat peittävän pistejoukon koon.

Esitämme vielä yhden sovelluksen Hallin lauseelle.

6.9 Lause *Olkoot E ja F sellaisia verkon G riippumattomia pistejoukkoja, että $|F| = \rho(G)$ ja $E \cap F = \emptyset$. Tällöin on olemassa sellainen injektio $\varphi : E \to F$, että $\overline{x\varphi(x)} \in V_G$ jokaisella $x \in E$.*

Todistus. Olkoon $G = (X, R)$. Merkitsemme $S = R \cap (E \times F)$ ja osoitamme, että relaatio S sisältää injektion $E \to F$. Hallin lauseen nojalla riittää näyttää, että jokaisella $A \subset E$ on voimassa $|S(A)| \geq |A|$. Teemme vastaväitteen: on olemassa sellainen joukko $D \subset E$, että $|S(D)| < |D|$. Merkitsemme $F' = (F \setminus S(D)) \cup D$ ja panemme merkille, että $|F'| > |F|$. Koska $|F| = \rho(G)$, joukko F' ei ole riippumaton. Olkoot x ja y sellaisia F':n pisteitä, että $\overline{xy} \in V_G$. Joukon F riippumattomuuden nojalla $\{x, y\} \not\subset F$. Olkoon siis vaikkapa $x \in D$. Tällöin $y \in S\{x\} \subset S(D)$ ja tästä seuraa, koska $y \in F'$, että $y \in D$. Nyt $x, y \in D$, mutta tämä on ristiriidassa joukon D riippumattomuuden kanssa. Vastaväite on edellisen nojalla väärä ja voimme päätellä Hallin lauseen avulla, että relaatio S sisältää injektion $\varphi : E \to F$. Koska $S \subset R$, jokaisella $x \in E$ on voimassa $\overline{x\varphi(x)} \in V_G$. □

Lemman 6.1(a) ja edellisen lauseen nojalla pätee seuraava tulos:

6.11 Korollaari *Olkoot E ja F sellaisia verkon G riippumattomia pistejoukkoja, että $|F| = \rho(G)$ ja $E \cap F = \emptyset$. Tällöin $|E| \leq \nu(G)$.*

Jos edellisen lauseen tilanteessa ehto $E \cap F = \emptyset$ ei ole voimassa, niin voimme soveltaa lausetta joukkoihin $E' = E \setminus F$ ja F, jolloin saamme seuraavan tuloksen.

6.12 Korollaari *Olkoot E ja F verkon G riippumattomia pistejoukkoja ja olkoon $|F| = \rho(G)$. Tällöin on olemassa sellainen injektio $\varphi : E \to F$, että jokaisella $x \in E$ on voimassa joko $\varphi(x) = x$ tai $\overline{x\varphi(x)} \in V_G$.*

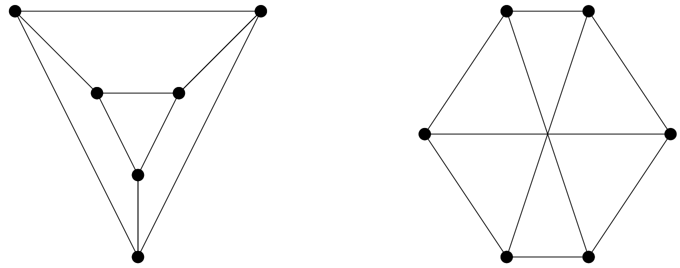
Johdamme vielä vastaavan tuloksen verkon riippumattomille viivajoukoille:

6.13 Korollaari *Olkoot U ja W verkon G riippumattomia viivajoukkoja ja olkoon $|W| = \nu(G)$. Tällöin on olemassa sellainen injektio $\theta : U \to W$, että jokaisella $v \in U$, viivoilla v ja $\theta(v)$ on yhteinen päätepiste.*

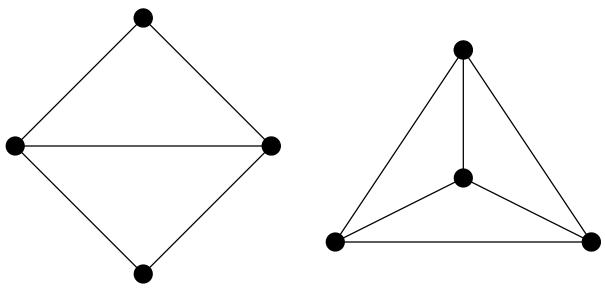
Todistus. Lemman 6.8 nojalla U ja W ovat G:n viivaverkon $L(G)$ riippumattomia pistejoukkoja ja $|W| = \rho(L(G))$. Korollaarin 6.12 nojalla on olemassa sellainen injektio $\theta : U \to W$, että jokaisella $v \in U$ on voimassa joko $\theta(v) = v$ tai $\overline{v\theta(v)} \in V_{L(G)}$; kummassakin tapauksessa G:n viivoilla v ja $\theta(v)$ on yhteinen päätepiste. □

HARJOITUSTEHTÄVIÄ LUKUUN II

1. Näytä, että viereiset kaksi verkkoa eivät ole keskenään isomorfiset.



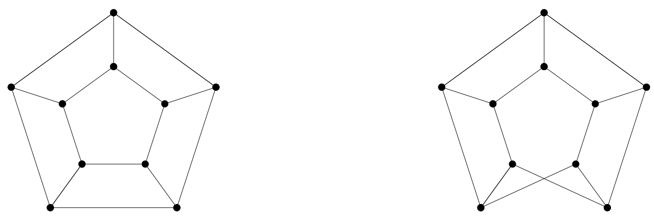
2. Osoita, että verkot



eivät ole keskenään isomorfiset.

3. Perustele kohdissa a) ja b) miksi annetut kaksi verkkoa eivät ole keskenään isomorfiset.

(a)



(b)

4. Olkoon S suhteikko, jolla on seuraajaluettelo

   a : b c f   c : b d f   e : d e f

   b : a d f   d : e   f :

   Etsi S:n relaation matriisi sekä transitiivinen sulkeuma (nämä on määritelty kombinatoriikan monisteen harjoitustehtävissä I.3 ja I.10).

5. Piirrä verkko, jolla on seuraajaluettelo

   a : b f g i   d : c e   g : a c j   j : g h i

   b : a c   e : d f h i   h : c e j

   c : b d g h   f : a e   i : a e j

   [*Ohje*: a,b,c,d,e,f reunalle, j keskelle.]

6. Etsi suhteikon S:

   a : e   c : b   e : d   g : b

   b : c f   d : a e   f : g

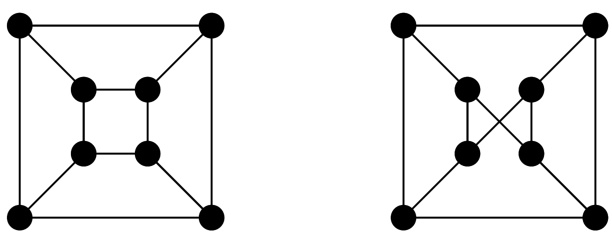
   yhtenäiset komponentit.

7. Olkoon S suhteikko, jolla on seuraajaluettelo:

$$\begin{array}{lllll} a : a\ e & b : c & c : b\ h & d : d & e : g \\ f : i & g : b & h : e\ h & i : d\ f & \end{array}$$

   Etsi S:n vahvasti yhtenäiset komponentit.

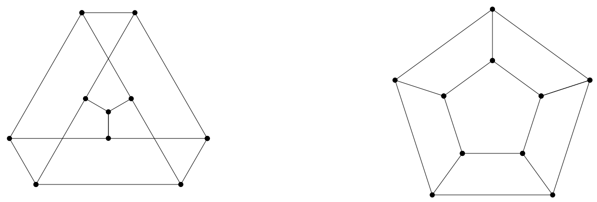
8. Verkko G on *kaksijakoinen* jos joukolla P_G on sellainen esitys $P_G = A \cup B$, etteivät mitkään kaksi joukon A pistettä ole vierekkäin G:ssä eivätkä mitkään kaksi joukon B pistettä ole vierekkäin G:ssä. Pane merkille, että jos kaksi verkkoa G ja H ovat keskenään isomorfiset, niin G on kaksijakoinen jos ja vain jos H on kaksijakoinen ja käytä tätä huomiota hyväksesi sen osoittamiseen, että alla kuvatut kaksi verkkoa eivät ole keskenään isomorfiset.



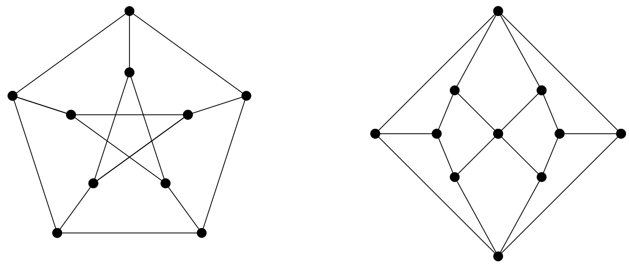
9. Olkoon $\mathcal{Y}$ äärellinen perhe tasoon piirrettyjä ympyröitä. Merkitään G:llä verkkoa, jonka pistejoukon muodostavat ne alueet, joihin perheen $\mathcal{Y}$ ympyrät jakavat tason ja jossa kahta aluetta yhdistää viiva silloin kun niiden reunojen leikkaukseen sisältyy (surkastumaton) ympyränkaari. Näytä, että verkko G on kaksijakoinen.

   [*Ohje*: tarkastele niiden ympyröiden $Y \in \mathcal{K}$ lukumäärää, joiden sisäpuolella alue $A \in P_G$ on.]

10. Tutki ovatko seuraavat kaksi verkkoa keskenään isomorfiset:

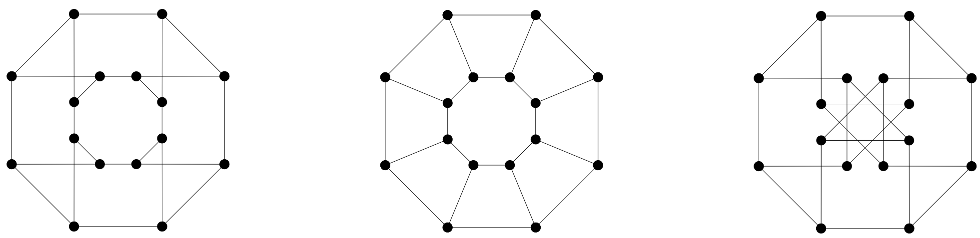


11. Näytä, että alla kuvatut verkot eivät ole keskenään isomorfiset. (Vasemmanpuoleinen verkko tunnetaan nimellä *Petersenin verkko* ja oikeanpuoleinen nimellä *Herschelin verkko*).



12. Osoita, että kahdessa edellisessä tehtävässä vasemmalla kuvatut verkot ovat isomorfisia ehtojen $P_G = \mathcal{P}_2[5]$ ja $V_G = \{\overline{AB} : A, B \in \mathcal{P}_2[5]$ ja $A \cap B = \emptyset\}$ määräämän verkon G kanssa.

13. Onko verkko G isomorfinen verkon H tai verkon I kanssa? Perustele vastauksesi!



G H I

14. On käytettävissä kaksi eri väriä. Väritetään kuuden pisteen täydellisen verkon K_6 jokainen viiva jommallakummalla värillä. Osoita, että näin väritetystä verkosta löytyy yksivärinen kolmio (toisin sanoen, löytyy kolme verkon pistettä a, b ja c siten, että viivoilla $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ ja $\overline{ca}$ on kaikilla sama väri).

15. Näytä, että edellisen tehtävän johtopäätös ei päde verkossa K_5.

Verkon G *komplementti* on se verkko $\tilde{G}$, jolla on samat pisteet kuin G:llä ja jossa kahden eri pisteen $x, y \in P_G$ välillä on viiva jos ja vain x:n ja y:n välillä ei ole viivaa G:ssä.

16. Osoita, että keskenään isomorfisten verkkojen komplementit ovat keskenään isomorfiset.

17. Osoita, että on olemassa tasan kaksi keskenään epäisomorfista verkkoa, joissa on 5 pistettä ja 8 viivaa.

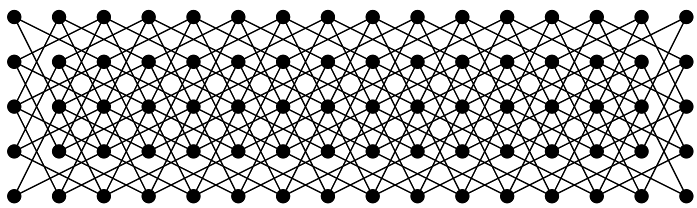
    [*Ohje*: tarkastele komplementteja.]

18. Montako keskenään epäisomorfista 5-pisteistä ja 7-viivaista verkkoa on olemassa?

    [*Ohje*: tarkastele komplementteja.]

19. Jos $\mathcal{L}$ on äärellinen perhe joukkoja, niin merkitään $G_{\mathcal{L}}$:llä sitä verkkoa, jonka pisteiden joukkona on $\mathcal{L}$ ja jonka viivojen joukko koostuu niistä viivoista $\overline{AB}$, missä $A, B \in \mathcal{L}$, $A \neq B$ ja $A \cap B \neq \emptyset$; tällaista verkkoa $G_{\mathcal{L}}$ kutsutaan *joukkoverkoksi.* Osoita, että jokainen verkko on isomorfinen jonkun joukkoverkon kanssa.
    [*Ohje*: Tarkastele joukkoja, jotka koostuvat niistä verkon viivoista, joilla on annettu verkon piste toisena päätepisteenä.]

20. Laske seuraavan verkon viivojen lukumäärä:



21. *Ikosaedri* on säännöllinen monitahokas, jonka tahkoina on $t = 20$ tasasivuista kolmiota. Mikä on ikosaedrin särmien lukumäärä s? (Tarkastele verkkoa, jonka pisteinä ovat tahkot ja viivat vastaavat särmiä.)

22. Mikä on ikosaedrin kärkien lukumäärä k, kun *Eulerin kaavan* (katso Luvun V harjoitustehtävää 17) nojalla on $k - s + t = 2$, ja montako särmää kohtaa toisensa samassa kärjessä?

23. (a) Osoita, että jos on olemassa epätyhjä n–pisteinen k–säännöllinen verkko, niin $k < n$ ja jompikumpi luvuista n tai k on parillinen.

    (b) Osoita, että jos G on n–pisteinen k–säännöllinen verkko, niin G:n komplementti $\tilde{G}$ on $n - k - 1$–säännöllinen.

    (c) Olkoon n parillinen. Osoita, että on olemassa n–pisteinen 1–säännöllinen verkko; näytä lisäksi, että verkko on yhtenäinen vain tapauksessa $n = 2$.

    (d) Verkko G on *rengasverkko*, jos G:ssä on sellainen yksinkertaisen kierros $(x_0, ..., x_n)$, että $n > 2$, $P_G = \{x_0, ..., x_{n-1}\}$ ja $V_G = \{\overline{x_i x_{i-1}} : i = 0, ..., n-1\}$. Näytä, että jokainen rengasverkko on 2–säännöllinen.

    (e) Osoita, että kun n on parillinen, niin liittämällä sopivasti yhteen kaksi rengasverkkoa saadaan yhtenäinen n–pisteinen 3–säännöllinen verkko.

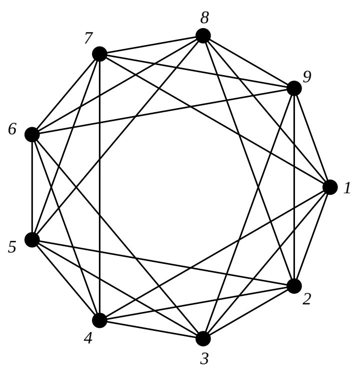
Seuraavissa tehtävissä osoitetaan, että edellisen tehtävän (a)–kohdan välttämätön ehto "$k < n$ ja luku nk on parillinen" on myös riittävä ehto sille, että on olemassa n–pisteinen k–säännöllinen verkko, missä $k > 1$ (tapaus $k = 1$ on käsitelty edellisen tehtävän (c)–kohdassa).

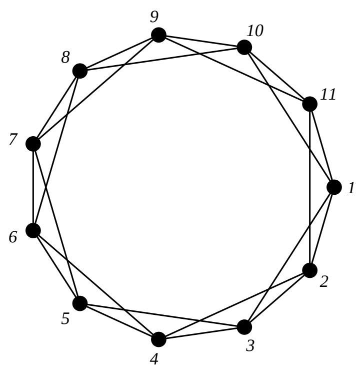
24. Osoita, että n-pisteinen $2k$–säännöllinen verkko $G_{n,2k}$, missä $0 < 2k < n$, voidaan konstruoida seuraavasti: määrittele joukon $[n]$ pisteille p ja q "etäisyys" $\rho(p, q)$:lla ottamalla $\rho(p, q)$:ksi pienempi luvuista $|p - q|$ ja $n - |p - q|$; pane merkille, että jos $0 < i < \frac{1}{2}n$, niin jokaisella $p \in [n]$, joukossa $[n]$ on täsmälleen kaksi alkiota, joiden ρ–etäisyys p:stä on i; valitse verkon $G_{n,2k}$ pisteiden joukoksi P ja viivojen joukoksi $\{\overline{pq} : p, q \in P, p \neq q \text{ ja } \rho(p, q) \leq k\}$.

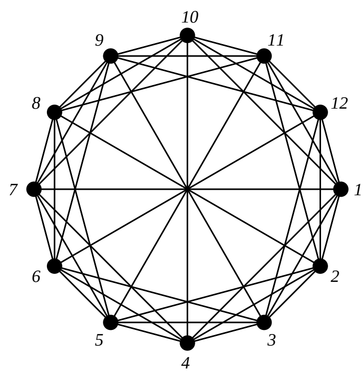
25. Pane merkille, että jos luku n on parillinen, niin edellisessä tehtävässä tarkastellulla joukon $[n]$ etäisyysfunktiolla ρ on seuraava ominaisuus: jokaisella $p \in P$, joukossa $[n]$ on täsmälleen yksi alkio, jonka ρ–etäisyys p:stä on $\frac{1}{2}n$. Olkoon n parillinen, k pariton ja $1 < k < n$. Osoita, että n–pisteinen k–säännöllinen verkko $G_{n,k}$ voidaan konsruoida lisäämällä edellisessä tehtävässä konstruoituun verkkoon $G_{n,k-1}$ viivat $\overline{pq}$, missä $p, q \in P$ ja $\rho(p, q) = \frac{1}{2}n$.

26. Osoita kahden edellisen tehtävän avulla, että jos luonnollisille luvuille n ja k pätee, että $1 < k < n$ ja luku nk on parillinen, niin tällöin on olemassa yhtenäinen n–pisteinen k–säännöllinen verkko.

Seuraavassa on kuvattu muutamia säännöllisiä verkkoja, jotka on konstruoitu edellisissä tehtävissä kuvatulla menetelmällä:







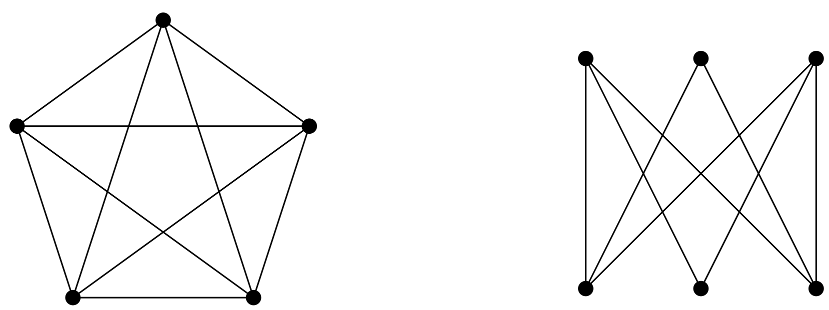
Verkon G *esitys tasossa* (*esitys avaruudessa*) on pari $\mathcal{G} = \Big(\{a_p : p \in P_G\}, \{L_{\overline{pq}} : \overline{pq} \in V_G\}\Big)$, missä a_p on tason piste (avaruuden piste) jokaisella $p \in P_G$ ja $L_{\overline{pq}}$ on pisteiden a_p ja a_q yhdysjana. Jos esityksen janat leikkaavat toisiaan ainoastaan päätepisteissään, niin sanotaan, että kyseessä on verkon G *yksinkertainen esitys* tasossa tai avaruudessa. Jos verkolla G on yksinkertainen esitys tasossa, niin sanotaan, että G on *tasoverkko.*
Huomautus: Esimerkiksi monet tässä kirjassa olevat verkkojen kuvat antavat verkoille esityksiä tasossa. Kuitenkin monissa kuvissa verkon viivoja esitetään käyrillä eikä janoilla. Voidaan osoittaa, että esimerkiksi yllä annettu tasoverkon määritelmä

ei muutu sisällöltään, vaikka sallittaisiin viivojen esittäminen tasokäyrillä. Täten verkko on tasoverkko jos ja vain jos se voidaan piirtää tasoon (siis paperille) siten, että pisteiden yhdysviivat (joiden ei tarvitse olla suoria) leikkaavat toisiaan korkeintaan päätepisteissään.

27. Osoita, että jokaisella verkolla on yksinkertainen esitys avaruudessa (ei tarvitse todistaa tarkasti, pelkkä esityksen kuvailu riittää).
[*Ohje*: esitä verkon pisteet avaruuden pallopinnan pisteinä.]

28. Osoita, että verkko on tasoverkko jos ja vain jos sillä on yksinkertainen esitys pallon pinnalla (tässä esityksessä käytetään pisteitä yhdistäviä ympyränkaaria pisteiden yhdysjanojen asemasta).

29. Alla on kuvattu viiden pisteen täydellinen verkko K_5 sekä kuusipisteinen "täydellinen kaksijakoinen verkko" $K_{3,3}$.



Osoita, ettei kumpikaan verkko ole tasoverkko.
[Tulkinta verkon $K_{3,3}$ tapauksessa: seuraavalle "kunnallistekniikkaongelmalle" ("utilities problem") ei löydy ratkaisua: voidaanko kolmeen taloon vetää putket vesi– kaasu– ja kaukolämpölaitoksilta maan pinnalla siten, että putket eivät mene missään ristiin?]

Huomautus. K. Kuratowskin v. 1930 ilmestyneen kuuluisan lauseen mukaan verkot K_5 ja $K_{3,3}$ ovat "tyyppiesimerkkejä" sellaisista verkoista, joilla ei ole yksinkertaista esitystä tasossa: verkko G on tasoverkko jos ja vain jos G ei "sisällä" kumpaakaan verkoista K_5 ja $K_{3,3}$ ("sisältämisen" täsmällinen määritelmä jätetään tässä antamatta).

30. Olkoon A äärellinen joukko ja olkoon G ehtojen

$$P_G = \mathcal{P}(A) \quad \text{ja} \quad V_G = \{\overline{BC} : B, C \subset A \text{ ja } |B \setminus C| = |C \setminus B| = 1\}$$

määräämä verkko. Määritä verkon G yhtenäiset komponentit.

31. Merkitään J:llä suhteikkoa, jonka pisteinä ovat luvut 2,3,4,...,50 ja pisteiden n ja k välillä on nuoli $\overrightarrow{nk}$ jos ja vain jos luku n jakaa luvun k. Määritä pisteiden 2,13 ja 41 yhtenäiset ja vahvasti yhtenäiset komponentit suhteikossa J.

32. (a) Anna esimerkki yhtenäisestä nelipisteisestä verkosta, jolla on yhtenäinen komplementti.

(b) Näytä, että kohdan (a) verkko on isomorfinen komplementtinsa kanssa.

33. Osoita, että epäyhtenäisen verkon komplementti on yhtenäinen.

34. Osoita, että verkko G on yhtenäinen, mikäli

$$v_G > \frac{1}{2}(p_G - 1)(p_G - 2) \ .$$

[*Vihjeitä*: Edellinen tehtävä, Lause II 3.13.]

35. Osoita, että verkko G ei ole kaksijakoinen, mikäli

$$v_G > \frac{p_G^2}{4} \ .$$

36. Osoita, että jos G on verkko, jossa on n pistettä, m viivaa ja k komponenttia, niin

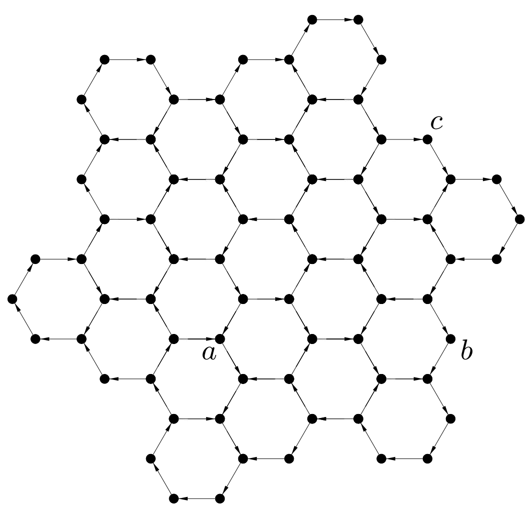
$$m \geq n - k \ .$$

37. *Kulkuetäisyys* ρ_G suhteikossa G määritellään pisteille $x, y \in P_G$ seuraavasti: jos G:ssä ei ole kulkua pisteestä x pisteeseen y, niin asetetaan $\rho_G(x, y) = \infty$; muussa tapauksessa valitaan $\rho_G(x, y)$:ksi pienin niistä luvuista $n \in \mathbb{N}$, joilla suhteikossa G on n–askeleinen kulku pisteestä x pisteeseen y.
(a) Osoita, että vahvasti yhtenäisen suhteikon kulkuetäisyys toteuttaa harjoitustehtävässä II 23 määritellyn metriikan ominaisuuden 1^o sekä kolmioepäyhtälön.
(b) Osoita, että G:n kulkuetäisyys on metriikka jos ja vain jos G on yhtenäinen ja symmetrinen.
(Yhtenäisen ja symmetrisen suhteikon G tapauksessa puhutaan G:n *kulkumetriikasta*).

38. Viereinen kuva esittää suhteikkoa G:

(a) Suhteikko G on selvästi yhtenäinen. Onko G vahvasti yhtenäinen?

(b) Määritä pisteiden a, b ja c väliset kulkuetäisyydet G:ssä.



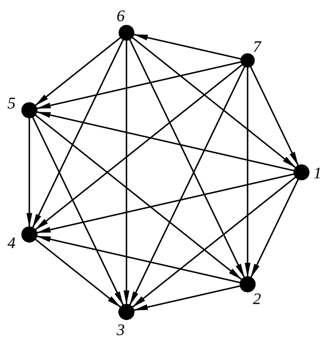
39. Olkoon A äärellinen joukko. Määrittele sellainen yhtenäinen verkko G, että G:n pisteiden joukko on $\mathcal{P}(A)$ ja kulkumetriikka ρ_G joukossa $\mathcal{P}(A)$ on sama kuin harjoitustehtävässä II 23 tarkasteltu joukon $\mathcal{P}(A)$ metriikka d_Δ.

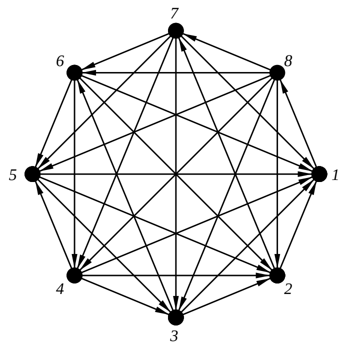
40. Osoita, että edellisessä tehtävässä määritellyssä verkossa G on Hamiltonin kierros ja näytä Hamiltonin kierroksen olemassaolon avulla, että äärellisellä joukolla A on sama määrä parillisalkioisia osajoukkoja kuin paritonalkioisia osajoukkoja.

41. Olkoon B_n n-bittijonojen joukko (eli $B_n = \{0,1\}^n$). Määritellään verkko $\mathbb{B}_n$ valitsemalla $P_{\mathbb{B}_n} = B_n$ ja sopimalla, että kun $x, y \in B_n$, niin $\overline{xy} \in V_{\mathbb{B}_n}$ jos ja vain jos x ja y eroavat toisistaan täsmälleen yhden bitin kohdalla. Kun $y \in B_n$, niin joukko $\{x \in B_n : \rho_{\mathbb{B}_n}(x,y) \leq k\}$ on verkon $\mathbb{B}_n$ *k-säteinen pallo.* Kuinka monta 1-säteistä palloa tarvitaan verkon $\mathbb{B}_n$ kaikkien pisteiden peittämiseen?

42. *Gray–koodi* on sellainen lukujen $0, 1, ..., 2^n - 1$ esitys n-bittijonoina, jossa kahta peräkkäistä lukua vastaavat jonot eroavat toisistaan vain yhdellä bitillä.
(a) Tulkitse lukujen $0, 1, ..., 2^n - 1$ Gray–koodi Hamiltonin kulkuna edellisen tehtävän verkossa $\mathbb{B}_n$.
(b) Etsi verkosta $\mathbb{B}_3$ Hamiltonin kulku ja esitä vastaava Gray–koodi.

43. Etsi Hamiltonin kulut seuraavista täydellisistä suhteikoista. Löytyykö kummastakaan suhteikosta Hamiltonin kierrosta? Jos löytyy, niin etsi sellainen.



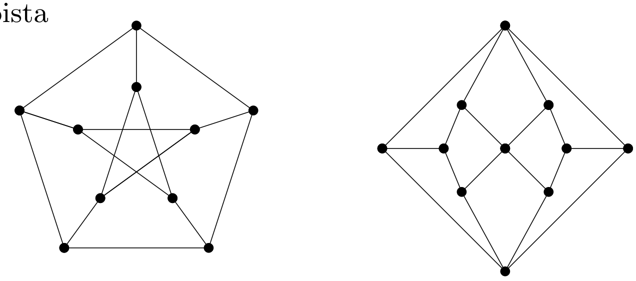


44. Määritellään suhteikko S asettamalla $P_S = [10]$ $(= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\})$ ja $N_S = \{\overrightarrow{xy} : x, y \in [10]\ ,\ (x-y)(x-y+1) \geq 20\ ,\ x \neq 2 \cdot y\ \text{ ja }\ y \neq 2 \cdot x\}$. Näytä, että
(a) S on vahvasti yhtenäinen;
(b) S:ssä ei ole Hamiltonin kierrosta.

45. Edellä on osoitettu, että jokaisella epätyhjällä täydellisellä suhteikolla on juuri. Näytä, että vahvempikin tulos pätee: jokaisessa epätyhjässä täydellisessä suhteikossa S on sellainen piste, josta on korkeintaan kaksi–askeleinen kulku mihin tahansa muuhun suhteikon pisteeseen.

[*Ohje*: valitse piste, jolla on maksimaalinen lähtöaste.]

46. Etsi verkoista



Hamiltonin kulut, ja näytä, ettei kummastakaan löydy Hamiltonin kierrosta.

47. Etsi Grötzschin verkosta (kts. tehtävä 29) Hamiltonin kierros.

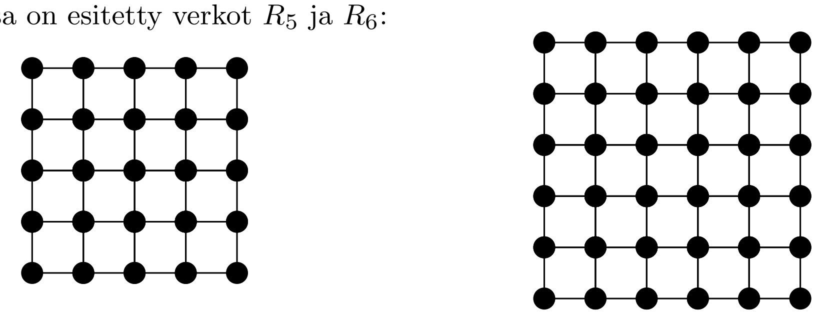
48. Onko tehtävän 10 verkoissa Hamiltonin kulkua tai kierrosta?

49. Shakkiturnauksen jokainen osanottaja pelaa yhden pelin jokaisen muun osanottajan kanssa. Osoita, että tulosluettelo voidaan järjestää niin, että jokainen on voittanut listassa seuraavan tai pelannut tämän kanssa tasapelin.

50. Olkoon G täydellinen suhteikko. Osoita, että on olemassa sellainen joukon P_G ositus $\{P_1, ..., P_k\}$, että
1^o Joukkojen P_i virittämät G:n alisuhteikot ovat vahvasti yhtenäisiä.
2^o Jos $i < j$, niin G:ssä ei ole nuolta joukosta P_j joukkoon P_i.

[*Ohje.* Valitse P_i:ksi joukon $P_G \setminus \bigcup_{j<i} P_j$ virittämän G:n alisuhteikon juurten joukko.]

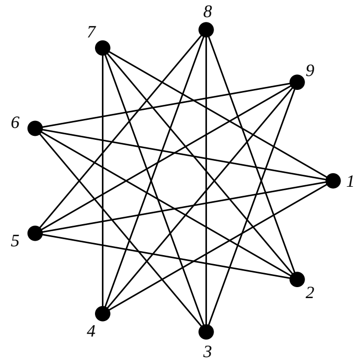
51. Määritellään jokaisella $n \in \mathbb{N}$ "ruudukkoverkko" R_n ottamalla R_n:n pisteiden joukoksi $[n] \times [n]$ ja viivojen joukoksi $\{\overline{(i,j)(k,l)} : |i-k| + |j-l| = 1\}$. Seuraavassa kuvassa on esitetty verkot R_5 ja R_6:

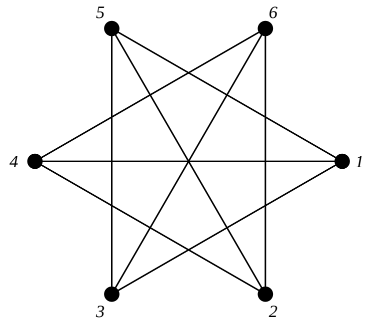


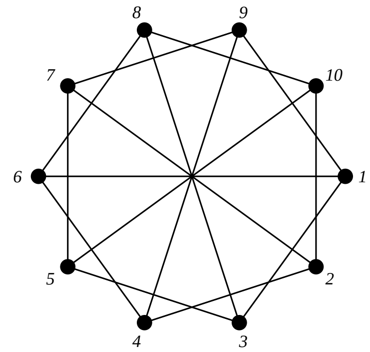
(a) Osoita, että jokaisessa verkossa R_n on Hamiltonin kulku.
(b) Osoita, että jokaisella $n > 1$, verkossa R_n on Hamiltonin kierros jos ja vain jos n on parillinen.

52. Osoita, että jos kutsuilla jokaisella vieraalla on muiden joukossa enemmän tuttuja kuin tuntemattomia, niin vieraat voidaan sijoittaa istumaan pyöreän pöydän ääreen siten, että jokainen tuntee molemmat vierustoverinsa.

53. Onko millään alla kuvatuista verkoista Hamiltonin kierrosta? Entä Hamiltonin kulkua? Etsi kunkin verkon tapauksessa Hamiltonin kierros tai kulku jos sellainen on olemassa.



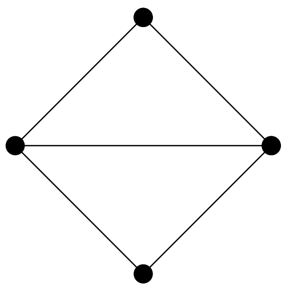
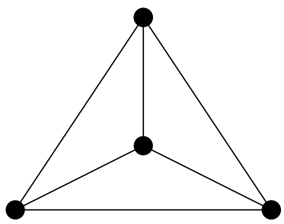
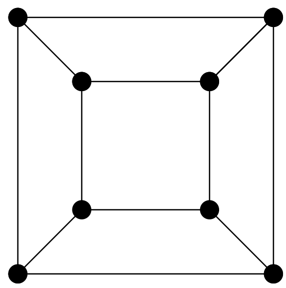




Verkon G *väritysluku* eli *kromaattinen luku* on pienin lukumäärä "värejä", joilla voidaan "värittää" G:n pisteet siten, että mitkään kaksi samanväristä pistettä ei ole vierekkäin G:ssä. Tätä lukua merkitään $\chi(G)$:llä.

54. Näytä, että verkko on kaksijakoinen jos ja vain jos sen väritysluku on korkeintaan kaksi.

55. Määritä seuraavien verkkojen väritysluvut.

56. Osoita, että Grötzschin verkon (kts. tehtävä 29) väritysluku on 4.

57. Osoita, että verkon G pisteiden lukumäärälle p_G on voimassa epäyhtälö

$$p_G \leq \rho(G) \cdot \chi(G) ,$$

missä $\rho(G)$ on Luvussa II.6 määritelty G:n riippumattomuusluku.

58. Määritä tehtävän 11 verkkojen riippumattomuusluvut.

59. Määrittelemme verkkojen G ja H *tulon* $G \times H$ asettamalla $P_{G\times H} = P_G \times P_H$ ja sopimalla, että $\overline{(v_1, w_1)(v_2, w_2)} \in V_{G\times H}$ jos ja vain jos joko $w_1 = w_2$ ja $\overline{v_1 v_2} \in V_G$ tai $v_1 = v_2$ ja $\overline{w_1 w_2} \in V_H$. Osoita, että

(a) $\chi(G \times H) \leq \chi(G) \cdot \chi(H)$;

(b) $\rho(G) \cdot \rho(H) \leq \rho(G \times H)$.

60. Määrittelemme "jonoverkon" I_n asettamalla $P_{I_n} = [n]$ ja $V_{I_n} = \{\overline{k\,k+1} : 1 \leq k < n\}$. Tällaisten verkkojen p-kertaiset tulot $I_n \times I_n \times \cdots \times I_n$ ovat *p-kuutioita* I_n^p.

(a) Pane merkille, että $I_n^2 = R_n$ (kts tehtävä 51).

(b) Määritä verkon I_n^p väritysluku $\chi(I_n^p)$.

61. Todista Lemma II 6.1.

62. Verkon G pisteiden joukon P_G osajoukko A on *hallitseva* eli *dominoiva*, jos jokainen joukon $P_G \setminus A$ piste on vierekkäin jonkun joukon A pisteen kanssa. Verkon G *dominointiluku* $\kappa(G)$ on $\min\{|D| : D \subset P_G$ on dominoiva$\}$.

(a) Olkoon $R \subset P_G$ maksimaalinen riippumaton joukko (siis R on riippumaton eikä sisälly mihinkään muuhun riippumattomaan joukkoon). Näytä, että R on dominoiva.

(b) Todista (a)-kohdan tuloksen avulla epäyhtälö $\kappa(G) \leq \rho(G)$.

63. Näytä, että n–pisteiselle k–säännölliselle verkolle G pätee epäyhtälö $n \leq (k+1)\cdot\kappa(G)$.

64. Verkko G on *permutaatioverkko*, mikäli on olemassa sellainen bijektio $\varphi : P_G \to P_G$, että $V_G = \{\overline{xf(x)} : x \in P_G$ ja $f(x) \neq x\}$.

Näytä, että verkko G on permutaatioverkko jos ja vain jos jokainen G:n komponentti on joko 0-, 1- tai 2-säännöllinen.

65. Verkon G *k-tekijä* on sellainen G:n k-säännöllinen aliverkko H, jolle on voimassa $P_H = P_G$. Verkko G on *k-jakautuva*, mikäli on olemassa sellaiset G:n k-tekijät $H_1, ..., H_n$, että joukot $V_{H_1}, \ldots, V_{H_n}$ ovat keskenään erilliset ja $\bigcup_{i=1}^n V_{H_i} = V_G$.

(a) Näytä, että verkon G aliverkko H on G:n 1-tekijä jos ja vain jos viivajoukko V_H on täydellinen parijako verkossa G.

(b) Osoita, että täydellinen verkko K_4 on 1-jakautuva.

(c) Näytä, että Esimerkin II 6.3 verkolla on 2-tekijä.

66. Näytä, että säännöllinen kaksijakoinen verkko on 1-jakautuva.

[*Ohje*: Käytä Lauseen II 3.6 tulosta.]

67. Todista *Königin ja Egervaryn Lause*: Kun M on 0,1-neliömatriisi (eli sellainen $n \times n$-matriisi, jossa esiintyy vain lukuja 0 ja 1), niin suurin määrä M:n ykkösiä, joista mitkään kaksi eivät ole samassa vaaka- tai pystyrivissä on sama kuin pienin määrä M:n vaaka- ja pystyrivejä, jotka yhdessä sisältävät kaikki M:n ykköset.

[*Ohje*: Olkoon $M = (a_{ij})$. Määrittele verkko G ehdoilla $P_G = \{v_1, ..., v_n\} \cup \{p_1, ..., p_n\}$ ja $V_G = \{\overline{v_i p_j} : a_{ij} = 1\}$. Käytä Königin Lausetta.]

Luku III

Verkon renkaat

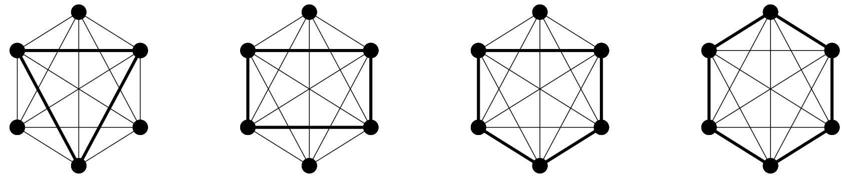
1. Renkaiden olemassaolo.

Olemme jo käyttäneet kulkuja ja kierroksia verkkojen yhtenäisyyden ja eräiden muiden ominaisuuksien tutkimisessa. Nyt määrittelemme kierrosten avulla renkaan käsitteen ja tarkastelemme renkaiden olemassaoloa. Tässä jaksossa käsitellään niitä verkkoja, joilla on paljon renkaita ja seuraavassa jaksossa niitä verkkoja, nk. puita, joilla ei ole laisinkaan renkaita.

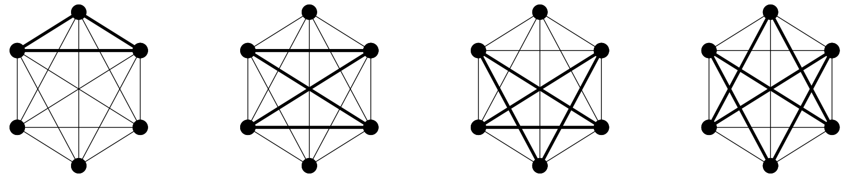
Määritelmä Olkoon G verkko ja olkoon W joukko G:n viivoja. Joukko W on G:n *rengas*, jos on olemassa sellainen yksinkertainen kierros $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ G:ssä, että $n > 2$ ja $W = V(\bar{x})$.

Toisinaan kutsumme 3-renkaita *kolmioiksi*, 4-renkaita *neliöiksi* ja n-renkaita *n-kulmioiksi.*

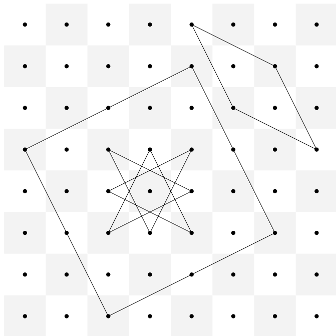
Esimerkkejä (a) "Renkaan" käsitteessä on pohjalla geometrisluontoisia ideoita: tarkastellaan verkon sisältämiä kolmioita, neliöitä, viisi- ja kuusikulmioita jne. Esimerkiksi verkosta K_6 löytyy seuraavannäköisiä viivajoukkoja:



(b) "Neliöt", "viisikulmiot" jne. eivät kuitenkaan aina muistuta geometrisiä vakiomallejansa ja toisinaan niiden tunnistaminen verkosta voi olla vaikeaa:



(c) Jos $p_G > 2$ ja jos $\bar{x}$ on Hamiltonin kierros verkossa G, niin joukko $V(\bar{x})$ on G:n rengas. Täten esimerkiksi edellisessä luvussa kuvattu "ratsun puolimaaginen marssi" määrittää erään renkaan shakkipelin hevosen liikkeiden määräämässä verkossa H. Seuraavassa on kuvattu kolme yksinkertaisempaa rengasta verkossa H.



Yksinkertainen kierros $(x_0, ..., x_n)$, missä $n \leq 2$, on joko muotoa (x) (tapaus $n = 0$) tai muotoa (x, y, x) (tapaus $n = 2$); täten edellisessä määritelmässä asetettu ehto "$n > 2$" sulkee pois tyhjän viivajoukon sekä muotoa $\{v\}$, missä $v \in V_G$, olevat joukot verkon G renkaiden joukosta.

Myöhemmin tarvitsemme seuraavaa yksinkertaista huomiota: jos joukko W on verkon G aliverkon H rengas, niin tällöin W on myös G:n rengas.

Yhtenäisen verkon tapauksessa voimme antaa yksinkertainen luonnehdinnan niille verkon viivoille, jotka kuuluvat johonkin verkon renkaaseen.

Otamme käyttöön seuraavan merkinnän: kun G on verkko ja $v \in V_G$, niin merkitsemme $G - v$:llä sitä G:n aliverkkoa, joka määräytyy ehdoista $P_{G-v} = P_G$ ja $V_{G-v} = V_G \setminus \{v\}$ eli sitä verkkoa, jonka saamme *poistamalla* G:stä *viivan* v.

III 1.1 Lause *Yhtenäisen verkon G viiva v kuuluu johonkin G:n renkaaseen jos ja vain jos verkko $G - v$ on yhtenäinen.*

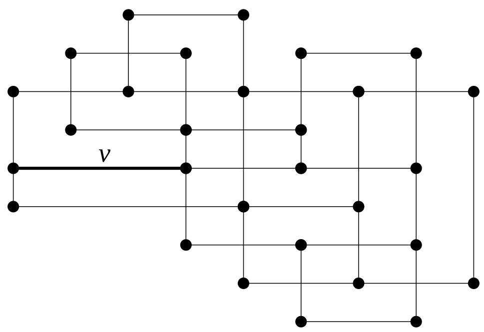
Todistus. Olkoot a ja b viivan v päätepisteet.

Välttämättömyys. Oletamme, että v kuuluu johonkin G:n renkaaseen. Tällöin on olemassa sellainen yksinkertainen kierros $(x_0, ..., x_n)$ G:ssä, että $n > 2$, $x_0 = a$ ja $x_1 = b$. Merkitsemme $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ ja $\bar{z} = (x_n, ..., x_1)$ ja panemme merkille, että $\bar{x}$ on kulku verkossa $G - v$ b:stä a:han ja $\bar{z}$ on kulku $G - v$:ssä a:sta b:hen. Osoitamme nyt verkon $G - v$ yhtenäisyyden Lauseen II 4.8 avulla näyttämällä,

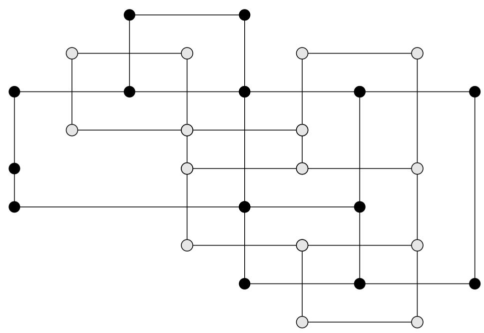
että kaikilla verkon $G-v$ pisteillä p ja q, verkossa $G-v$ on kulku p:stä q:hun. Olkoot siis p ja q verkon $G-v$ pisteitä. Tällöin p ja q ovat verkon G pisteitä ja G:n yhtenäisyydestä seuraa Lauseen II 4.8 ja Lemman II 4.3 nojalla, että G:ssä on yksinkertainen kulku $\bar{y} = (y_0, ..., y_k)$ p:stä q:hun. Jos kulku $\bar{y}$ ei kulje pitkin viivaa v, niin $\bar{y}$ on kulku verkossa $G-v$ p:stä q:hun. Oletetaan, että on olemassa sellainen luku $i \in [k]$, että $\overline{y_{i-1}y_i} = v$. Pannaan merkille, että kulun $\bar{y}$ yksinkertaisuudesta seuraa, että jokaiselle $j \in [k]$ pätee, että jos $j \neq i$, niin $\overline{y_{j-1}y_j} \neq v$. Nyt nähdään, että jos $y_{i-1} = a$ ja $y_i = b$, niin jono $(y_0, ..., y_{i-1}) \star \bar{z} \star (y_i, ..., y_k)$ on kulku $G-v$:ssä p:stä q:hun ja jos $y_{i-1} = b$ ja $y_i = a$, niin jono $(y_0, ..., y_{i-1}) \star \bar{x} \star (y_i, ..., y_k)$ on kulku $G-v$:ssä p:stä q:hun. Olemme osoittaneet, että verkko $G-v$ on yhtenäinen.
Riittävyys. Oletamme, että verkko $G-v$ on yhtenäinen. Koska on voimassa $a, b \in P_G = P_{G-v}$, niin verkossa $G-v$ on Lauseen II 4.8 ja Lemman II 4.3 nojalla yksinkertainen kulku $(z_0, ..., z_k)$ pisteestä a pisteeseen b. Koska verkossa $G-v$ ei ole viivaa $\overline{ab}$, niin on voimassa $k > 1$. Merkitsemme $n = k+1$ ja määrittelemme jonon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ asettamalla $x_n = a$ ja $x_j = z_j$ jokaisella $j < n$; tällöin $\bar{x}$ on yksinkertainen kierros verkossa G. Lisäksi v kuuluu joukkoon $V(\bar{x})$ ja tämä joukko on rengas, koska $n > 2$. □

Huomaamme, että jos $v = \overline{ab}$ on yhtenäisen verkon G viiva, niin verkossa $G-v$ on korkeintaan kaksi komponenttia, nimittäin pisteiden a ja b komponentit: jos H olisi kolmas komponentti, niin yhtenäisestä verkosta G löytyisi viiva w joukkojen P_H ja $P_G \setminus P_H$ välille; koska $a \notin P_H$ ja $b \notin P_H$, niin olisi voimassa $w \neq v$ ja w olisi verkon $G-v$ viiva; tämä on mahdotonta, koska H:n piti olla $G-v$:n komponentti.

Esimerkki Seuraavassa vasemmalla kuvatussa verkossa G kaikki muut G:n viivat kuuluvat johonkin G:n renkaaseen paitsi paksulla piirretty viiva v; oikeanpuolisessa kuvassa näkyvät verkon $G-v$ yhtenäiset komponentit.



G



G-v

Jos v on epäyhtenäisen verkon G viiva, niin voimme soveltaa edellisen lauseen tulosta siihen G:n yhtenäiseen komponenttiin, jonka viiva v on; täten saamme lauseelle seuraavan yleistyksen.

III 1.2 Korollaari *Verkon G viiva v kuuluu johonkin G:n renkaaseen jos ja vain jos verkoilla G ja $G - v$ on sama määrä yhtenäisiä komponentteja.*

Näemme helposti, että verkossa $G-v$ on korkeintaan yksi komponentti enemmän kuin verkossa G. Jos nimittäin $\mathcal{K}$ on G:n kaikkien komponenttien kokoelma ja $H \in \mathcal{K}$ on se komponentti, jolla $v \in V_H$, niin $G - v$:n yhtenäiset komponentit ovat verkot $J \in \mathcal{K} \setminus \{H\}$ sekä verkon $H - v$ komponentit; edellä totesimme, että verkolla $H - v$ on korkeintaan kaksi komponenttia.

Edellisen tuloksen nojalla verkolla on rengas jos ja vain jos sillä on viiva, jonka poistaminen ei lisää yhtenäisten komponenttien lukumäärää. Lauseessa III 2.7 annamme toisen luonnehdinnan renkaan olemassaololle. Seuraavassa lauseessa annamme erään käyttökelpoisen riittävän, muttei välttämättömän ehdon sille, että verkossa on rengas.

III 1.3 Lause *Olkoon G epätyhjä verkko, jolle pätee epäyhtälö $v_G \geq p_G$. Tällöin G:llä on rengas.*

Todistus. Todistamme lauseen väitteen induktiolla luvun p_G suhteen. Tapauksessa $p_G = 1$ väite pätee sisällöttömänä, koska tässä tapauksessa on voimassa $v_G = 0 < p_G$. Oletamme, että on voimassa $p_G > 1$ ja että olemme jo todistaneet väitteen sellaisille verkoille H, joilla $p_H < p_G$. On voimassa $v_G \geq p_G > 1$, joten $V_G \neq \emptyset$. Olkoon v G:n viiva. Jos v kuuluu johonkin G:n renkaaseen, niin G:llä on rengas. Oletamme, ettei v kuulu mihinkään G:n renkaaseen. Olkoot $H_1, ..., H_n$ verkon $G - v$ yhtenäiset komponentit, missä $H_i \neq H_j$ kun $i \neq j$. Korollaarin III 1.2 nojalla on voimassa $n > 1$. Lauseiden II 3.10 ja II 3.8 nojalla on voimassa

$$v_{G-v} = \sum_{i=1}^{n} v_{H_i} \quad \text{ja} \quad p_{G-v} = \sum_{i=1}^{n} p_{H_i}\,.$$

Tästä seuraa, että jollain $i \in [n]$ on voimassa $v_{H_i} \geq p_{H_i}$: muussa tapauksessa olisi voimassa

$$v_G - 1 = v_{G-v} = \sum_{i=1}^{n} v_{H_i} \leq \sum_{i=1}^{n} (p_{H_i} - 1) = p_{G-v} - n = p_G - n$$

ja tästä seuraisi ristiriita oletuksen $v_G \geq p_G$ kanssa. Olkoon $i \in [n]$ sellainen, että $v_{H_i} \geq p_{H_i}$. Tällöin on voimassa $v_{H_i} \geq p_{H_i}$ ja $p_{H_i} < p_{G-v} = p_G$, joten induktio–oletuksen nojalla verkolla H_i on rengas R. Selvästikin R on myös verkon G rengas.
□

III 1.4 Korollaari *Olkoon G epätyhjä verkko, jonka jokaisen pisteen aste on suurempi kuin yksi. Tällöin G:llä on rengas.*

Todistus. Koska jokaiselle $x \in P_G$ pätee, että $d_G(x) \geq 2$, niin Lauseen 2.2.3 nojalla on voimassa

$$2 \cdot v_G = \sum_{x \in P_G} d_G(x) \geq \sum_{x \in P_G} 2 = 2 \cdot |P_G| = 2 \cdot p_G.$$

Näin ollen on voimassa $v_G \geq p_G$ ja Lauseen III 1.9 nojalla G:llä on rengas. □

Näytämme vielä, että edellistä tulosta on mahdollista hieman vahvistaa.

III 1.5 Korollaari *Olkoon G verkko, jossa on ainakin kaksi pistettä. Oletetaan, että on olemassa sellainen $a \in P_G$, että jokaisen muun G:n pisteen aste on suurempi kuin yksi. Tällöin G:llä on rengas.*

Todistus. Tarkastelemme kahta eri tapausta.

Oletamme aluksi, että a on G:n eristetty piste. Merkitsemme G':lla joukon $P_G \setminus \{a\}$ virittämää G:n aliverkkoa. Koska a on G:n eristetty piste, niin jokaisella $b \in P_G \setminus \{a\}$ on voimassa $d_{G'}(b) = d_G(b)$. Näin ollen epätyhjän verkon G' jokaisen pisteen aste on suurempi kuin yksi. Korollaarin III 1.4 nojalla verkossa G' on rengas W. Joukko W on myös verkon G rengas.

Oletamme seuraavaksi, että a ei ole G:n eristetty piste. Tällöin on voimassa $d_G(a) \geq 1$. Koska jokaiselle $x \in P_G \setminus \{a\}$ pätee, että $d_G(x) \geq 2$, niin Lauseen II 2.3 nojalla on voimassa

$$2 \cdot v_G = \sum_{x \in P_G} d_G(x) \geq 1 + \sum_{x \in P_G \setminus \{a\}} 2 = 1 + 2 \cdot |P_G \setminus \{a\}| = 2 \cdot p_G - 1.$$

Näin ollen on voimassa $v_G \geq p_G - \frac{1}{2}$; tästä seuraa, koska v_G on kokonaisluku, että on voimassa $v_G \geq p_G$. Lauseen III 1.3 nojalla G:llä on rengas. □

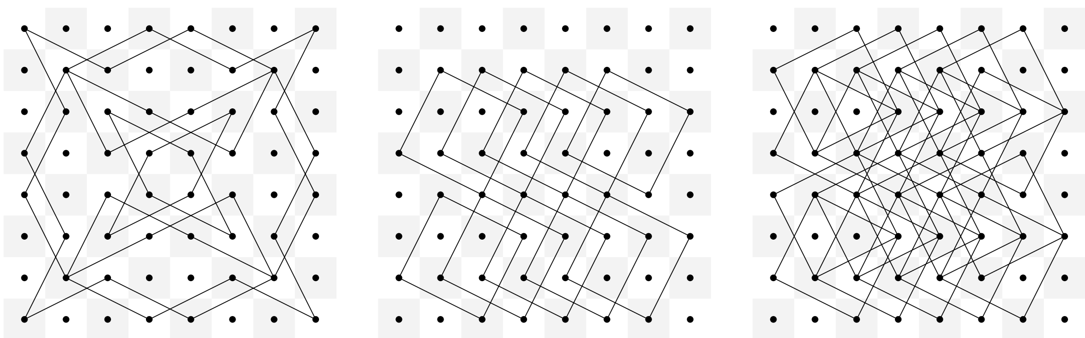
2. Renkaistot.

III 2.1 Määritelmä Olkoon G verkko. Joukon V_G osajoukko W on G:n *renkaisto*, jos on olemassa sellainen erillinen perhe $\mathcal{R}$ G:n renkaita, että $W = \bigcup \mathcal{R}$.

Merkitsemme verkon G kaikkien renkaistojen muodostamaa perhettä symbolilla $\mathcal{R}(G)$.

Huomaamme, että annetun määritelmän nojalla sekä tyhjä viivajoukko että jokainen G:n rengas on G:n renkaisto.

Seuraavat kuvat esittävät eräitä renkaistoja shakkipelin hevosen liikkeisiin liittyvässä verkossa H:



Olkoon G verkko ja olkoon W joukon V_G osajoukko. Merkitsemme P_W:lla joukkoa $\{x \in P_G : \overline{xy} \in W \text{ jollain } y \in P_G\}$. Tällöin on olemassa verkon G aliverkko H, joka määräytyy ehdoista $P_H = P_W$ ja $V_H = W$; kutsumme verkkoa *H joukon W virittämäksi G:n aliverkoksi.*

Voimme panna merkille, että viivajoukon virittämässä verkossa ei koskaan ole eristettyjä pisteitä.

Seuraavassa luonnehdimme renkaistoja pisteiden asteiden avulla. Todistamme ensin erään aputuloksen.

III 2.2 Lemma *Olkoon H verkon renkaan virittämä aliverkko. Tällöin jokaisella $x \in P_H$ on voimassa $d_H(x) = 2$.*

Todistus. Olkoon H verkon G renkaan R virittämä G:n aliverkko. Verkossa G on olemassa sellainen yksinkertainen kierros $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$, että $n > 2$ ja $R = V(\bar{x})$. Verkko H määräytyy ehdoista $P_H = \{x_1, ..., x_n\}$ ja $V_H = \{\overline{x_0 x_1}, ..., \overline{x_{n-1} x_n}\}$. Olkoon nyt x verkon H piste. Merkitsemme $I = \{i \in \{0, ..., n\} : x_i = x\}$. Olkoon i joukon I alkio. Jos $i \notin \{0, n\}$, niin kierroksen $\bar{x}$ yksinkertaisuudesta seuraa, että $I = \{i\}$. Tässä tapauksessa on voimassa $\{y \in P_H : \overline{xy} \in V_H\} = \{x_{i-1}, x_{i+1}\}$; lisäksi kulun $\bar{x}$ yksinkertaisuudesta seuraa yhdessä epäyhtälön $n > 2$ kanssa, että on voimassa $x_{i-1} \neq x_{i+1}$; näin ollen on voimassa $d_H(x) = |\{x_{i-1}, x_{i+1}\}| = 2$. Jos taas $i \in \{0, n\}$, niin $I = \{0, n\}$ ja $\{y \in P_H : \overline{xy} \in V_H\} = \{x_1, x_{n-1}\}$; kulun $\bar{x}$ yksinkertaisuudesta yhdessä epäyhtälön $n > 2$ kanssa seuraa, että $x_1 \neq x_{n-1}$, joten $d_H(x) = |\{x_1, x_{n-1}\}| = 2$. □

III 2.3 Lause *Olkoon G verkko. Joukon V_G osajoukko W on G:n renkaisto jos ja vain jos joukon W virittämä G:n aliverkko on parillisasteinen.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Oletamme, että W on renkaisto. Tällöin on olemassa sellaiset G:n erilliset renkaat $R_1, ..., R_n$, että $W = \bigcup_{i=1}^n R_i$. Merkitsemme H:lla joukon W virittämää G:n aliverkkoa ja merkitsemme jokaisella $i \in [n]$, H_i:llä joukon R_i virittämää G:n aliverkkoa. Lemman III 2.2 tuloksen nojalla kaikilla $x \in P_H$ ja $i \in [n]$ on voimassa joko $d_{H_i}(x) = 2$ tai $d_{H_i}(x) = 0$. Koska joukot $R_1, ..., R_N$ ovat erillisiä ja koska pätee, että $W = \bigcup_{i=1}^n R_i$, jokaisella $x \in P_H$ on voimassa $d_H(x) = \sum_{i=1}^n d_{H_i}(x)$; tästä seuraa, että luku $d_H(x)$ on parillinen.

Riittävyys. Todistamme induktiolla joukon V_G osajoukon alkioiden lukumäärän suhteen, että jos osajoukon virittämä G:n aliverkko on parillisasteinen, niin osajoukko on renkaisto. Jos alkioiden lukumäärä on nolla, niin osajoukko on tyhjä ja täten renkaisto. Olkoon nyt $n > 0$ sellainen luku, että olemme jo todistaneet väitteen niille joukoille $V \subset V_G$, joilla $|V| < n$. Olkoon $W \subset V_G$ sellainen joukko, että $|W| = n$ ja W:n virittämä G:n aliverkko H on parillisasteinen. Jokaisella $x \in P_H$ on voimassa $d_H(x) \geq 2$, joten Korollaarin III 1.4 nojalla H:ssa on rengas T. Merkitsemme J:llä viivajoukon T virittämää G:n aliverkkoa. Lemman III 2.2 nojalla verkko J on parillisasteinen. Merkitsemme K:lla viivajoukon $W \setminus T$ virittämää G:n aliverkkoa. Jokaisella $x \in P_K$ on voimassa $d_K(x) = d_H(x) - d_J(x)$; tästä seuraa, että verkko K on parillisasteinen. Koska on voimassa $|W \setminus T| < |W| = n$, niin induktio–oletuksesta seuraa, että joukko $W \setminus T$ on G:n renkaisto. Täten on olemassa sellainen erillinen perhe $\mathcal{R}$ G:n renkaita, että $\bigcup\mathcal{R} = W \setminus T$. Koska $\bigcup W \cap T = \emptyset$, niin perhe $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cup \{T\}$ on erillinen. Lisäksi on voimassa $\bigcup\mathcal{R}' = (\bigcup\mathcal{R}) \cup T = (W \setminus T) \cup T = W$. Olemme osoittaneet, että joukko W on renkaisto. □

III 2.4 Korollaari *Verkko G on parillisasteinen jos ja vain jos joukko V_G on renkaisto.*

Edellisen lauseen tulos on erittäin käyttökelpoinen kun yritämme päätellä, onko annettu viivajoukko renkaisto vai ei. Esimerkiksi edellisellä sivulla kuvattujen viivajoukkojen tapauksissa on helpompaa tarkistaa niiden virittämien verkkojen parillisasteisuus kuin esittää joukot erillisten renkaiden yhdisteinä.

Olkoon G verkko. Korollaarin I 1.13 nojalla pari $(\mathcal{P}(V_G), \Delta)$ on ryhmä. Osoitamme nyt Lauseen III 2.3 avulla, että joukon $\mathcal{P}(V_G)$ osajoukko $\mathcal{R}_G$ on ryhmän $(\mathcal{P}(P_G), \Delta)$ aliryhmä.

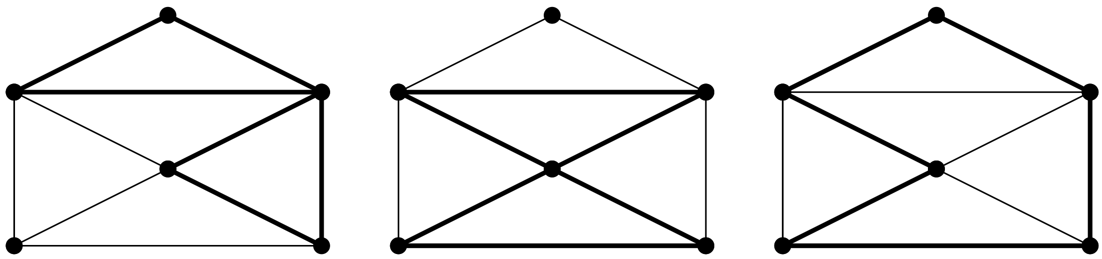
III 2.5 Lause *Olkoot W_1 ja W_2 verkon G renkaistoja. Tällöin joukko $W_1 \Delta W_2$ on G:n renkaisto.*

Todistus. Merkitään $W_0 = W_1 \Delta W_2$. Jokaisella $i \in \{0, 1, 2\}$ merkitään H_i:llä joukon W_i virittämää G:n aliverkkoa. Lauseen III 2.3 nojalla pätee, että verkot H_1 ja H_2 ovat parillisasteisia sekä että joukko W_0 on G:n renkaisto, mikäli verkko H_0 on parillisasteinen. Olkoon x verkon H_0 piste. Merkitsemme V:llä niiden G:n viivojen muodostamaa joukkoa, joilla on x yhtenä päätepisteenä ja pannaan merkille, että $d_{H_i}(x) = |W_i \cap V|$; täten joukoissa $W_1 \cap V$ ja $W_2 \cap V$ on verkkojen H_1 ja H_2 parillisasteisuuden nojalla parilliset määrät alkioita. Koska $W_0 = W_1 \Delta W_2$, niin Lemman A 1.9 nojalla on voimassa

$$W_0 \cap V = (W_1 \cap V)\,\Delta\,(W_2 \cap V)\,.$$

Edellisestä seuraa Korollaarin A 1.16 nojalla, että joukossa $W_0 \cap V$ on parillinen määrä alkioita; täten luku $d_{H_0}(x) = |W_0 \cap V|$ on parillinen. On näytetty, että verkko H_0 on parillisasteinen. □

Esimerkki Seuraava kuva esittää “kirjekuoriverkon” kahta renkaistoa U ja W sekä niiden symmetristä erotusta $U \Delta W$.



U $\qquad\qquad$ W $\qquad\qquad$ $U \triangle W$

Koska ryhmän $(\mathcal{P}(V_G), \Delta)$ neutraalialkio $\emptyset$ on G:n renkaisto ja koska jokainen ryhmän alkio on itsensä käänteisalkio, niin Lauseen III 2.5 tuloksesta seuraa, että pari $(\mathcal{R}(G), \Delta)$ on ryhmä (ryhmän $(\mathcal{P}(V_G), \Delta)$ "aliryhmä"). Ryhmää $(\mathcal{R}(G), \Delta)$ kutsutaan verkon G *renkaistoryhmäksi.*

Lauseen III 2.5 avulla voimme todistaa vielä erään luonnehdinnan renkaan olemassaololle verkossa. Todistamme ensin seuraavan apulauseen.

III 2.6 Lemma *Olkoot a ja b verkon G pisteitä, $a \neq b$ ja olkoot $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ yksinkertaisia kulkuja G:ssä pisteestä a pisteeseen b. Tällöin joukko $V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$ on G:n renkaisto.*

Todistus. Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ ja $\bar{y} = (y_0, ..., y_k)$. Tarkastellaan neljää eri tapausta.

Tapaus 1: On voimassa $\overline{ab} \in V(\bar{x})$ ja $\overline{ab} \in V(\bar{y})$. Tällöin kulkujen $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ yksinkertaisuudesta seuraa, että on voimassa $\bar{x} = (a, b) = \bar{y}$ ja täten $V(\bar{x})\Delta V(\bar{y}) = \emptyset$.

Tapaus 2: On voimassa $\overline{ab} \in V(\bar{x})$ ja $\overline{ab} \notin V(\bar{y})$. Tällöin $\bar{x} = (a, b)$ ja kulku $\bar{z} = (y_0, ..., y_k, y_0)$ on yksinkertainen kierros G:ssä. Koska $\overline{ab} \notin V(\bar{y})$, on voimassa $k > 1$ ja tästä seuraa, että kulun $\bar{z}$ askelten lukumäärä on suurempi kuin kaksi. Näin ollen $V(\bar{z})$ on G:n rengas. Lisäksi on voimassa $V(\bar{z}) = V(\bar{x}) \cup V(\bar{y}) = V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$.

Tapaus 3: On voimassa $\overline{ab} \in V(\bar{y})$ ja $\overline{ab} \notin V(\bar{x})$. Tämä tapaus käsitellään aivan samoin kuin Tapaus 2.

Tapaus 4: On voimassa $\overline{ab} \notin V(\bar{x})$ ja $\overline{ab} \notin V(\bar{y})$. Tällöin $n > 1$ ja $k > 1$. Merkitään G':lla ehtojen $P_{G'} = P_G$ ja $V_{G'} = V_G \cup \{\overline{ab}\}$ määräämää verkkoa. Kulut $\bar{x}' = (x_0, ..., x_n, x_0)$ ja $\bar{y}' = (y_0, ..., y_k, y_0)$ ovat yksinkertaisia kierroksia verkossa G' ja kummankin askelten lukumäärä on suurempi kuin kaksi; täten $U = V(\bar{x}')$ ja $W = V(\bar{y}')$ ovat G':n renkaita. Lauseen III 2.5 nojalla joukko $U\Delta W$ on G':n renkaisto. Koska $U = V(\bar{x}) \cup \{\overline{ab}\}$ ja $W = V(\bar{y}) \cup \{\overline{ab}\}$, on voimassa $U\Delta W = V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$; näin ollen joukko $V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$ on renkaisto. $\square$

Luonnehdimme nyt renkaan olemassaoloa kulkujen avulla.

III 2.7 Lause *Verkossa G on rengas jos ja vain jos on olemassa sellaiset G:n pisteet a ja b, että $a \neq b$ ja G:ssä on ainakin kaksi eri yksinkertaista kulkua pisteestä a pisteeseen b.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Renkaan olemassaolosta seuraa lauseessa mainitun ehdon voimassaolo: jos nimittäin G:ssä on rengas, niin tällöin G:ssä on yksinkertainen kierros $(x_0, ..., x_n)$, missä $n > 2$; tässä tapauksessa voidaan valita $a = x_1$ ja $b = x_0$, jolloin $(x_1, ..., x_n)$ ja (x_1, x_0) ovat kaksi eri yksinkertaista kulkua pisteestä a pisteeseen b.

Riittävyys. Oletetaan, että on olemassa sellaiset G:n pisteet a ja b ja sellaiset G:n yksinkertaiset kulut $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ pisteestä a pisteeseen b, että $a \neq b$ ja $\bar{x} \neq \bar{y}$. Lemman III 2.6 nojalla joukko $V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$ on G:n renkaisto. Lisäksi nähdään, koska $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat yksinkertaisia kulkuja a:sta b:hen ja $\bar{x} \neq \bar{y}$, että $V(\bar{x}) \neq V(\bar{y})$: jos vaikkapa $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ ja $\bar{y} = (y_0, ..., y_k)$ ja jos merkitään $j = \max\{i : (x_0, ..., x_i) = (y_0, ..., y_i)\}$, niin tällöin on voimassa $j < n$ ja $\overline{x_j x_{j+1}} \in V(\bar{x}) \setminus V(\bar{y})$. Edellisestä seuraa, että G:n renkaisto $V(\bar{x})\Delta V(\bar{y})$ on epätyhjä; täten verkossa G on rengas. □

Todistamme lopuksi renkaistojen avulla seuraavan tärkeän luonnehdinnan verkon kaksijakoisuudelle.

III 2.8 Lause *Verkko G on kaksijakoinen jos ja vain jos jokaisessa G:n renkaassa on parillinen määrä viivoja.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Olkoon R kaksijakoisen verkon G rengas. On olemassa sellainen G:n yksinkertainen kierros $\bar{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, että $R = V(\bar{x})$. Kirjoitamme $P_G = A \cup B$, missä joukot A ja B ovat riippumattomia ja $A \cap B = \emptyset$. Olkoon vaikkapa voimassa $x_0 \in A$. Jokaisella $1 \leq i \leq n$ pisteet x_{i-1} ja x_i ovat vierekkäin G:ssä, joten pätee, että $x_{i-1} \in A \iff x_i \in B$. Koska $x_0 \in A$, edellisestä seuraa induktiolla, että $x_k \in A$ kun k on parillinen ja $x_k \in B$ kun k on pariton. Koska $x_n = x_0 \in A$, luku n on parillinen. Näin ollen R:n viivojen lukumäärä $|V(\bar{x})| = n$ on parillinen.

Riittävyys. Oletamme, että jokaisessa verkon G renkaassa on parillinen määrä viivoja. Osoitamme, että G on kaksijakoinen. Aikaisemman huomion nojalla riittää näyttää, että jokainen G:n yhtenäinen komponentti on kaksijakoinen. Olkoon H

verkon G yhtenäinen komponentti ja olkoon a verkon H piste. Jokaisella $x \in P_H$ merkitsemme $f(x)$:llä pienintä lukua n, jolla H:ssa on n-askeleinen kulku a:sta x:ään.

Näytämme, että joukko $A = \{x \in P_H : \text{luku } f(x) \text{ on parillinen}\}$ on riippumaton verkossa H. Teemme vastaväitteen: on olemassa sellaiset pisteet $x, y \in A$, että $\overline{xy} \in V_H$. Merkitsemme $n = f(x)$ ja $k = f(y)$. Tällöin on olemassa n-askeleinen kulku $\bar{x}$ pisteestä a pisteeseen x ja k-askeleinen kulku $\bar{y}$ pisteestä a pisteeseen y. Panemme merkille, että lukujen n ja k minimaalisuuden nojalla kulut $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ ovat yksinkertaisia. Olkoon vaikkapa voimassa $n \leq k$. Tällöin $\bar{z} = \bar{x} \star (x, y)$ on yksinkertainen kulku pisteestä a pisteeseen y. Lemman 2.6 nojalla joukko $V(\bar{y})\Delta V(\bar{z})$ on H:n renkaisto. Koska luku $|V(\bar{y})| = k$ on parillinen ja luku $|V(\bar{z})| = n + 1$ on pariton, Lemman I.1.15 tuloksesta seuraa, että renkaistossa $V(\bar{y})\Delta V(\bar{z})$ on pariton määrä viivoja. Edellisestä seuraa, että jossain H:n renkaassa on pariton määrä viivoja, mutta tämä on ristiriita, koska jokainen H:n rengas on myös G:n rengas. Näin ollen vastaväite oli väärä ja joukko A on riippumaton verkossa H. Vastaavasti näemme, että joukko $B = \{x \in P_H : \text{luku } f(x) \text{ on pariton}\}$ on riippumaton verkossa H. Olemme osoittaneet, että H on kaksijakoinen. □

3. Eulerin kulut.

Kuten edellä mainitsimme, ainakaan toistaiseksi ei ole löytynyt mitään välttämättömiä ja riittäviä ehtoja, joiden avulla voisi helposti päätellä onko annetussa verkossa Hamiltonin kulkua vai ei. Tarkastelemme nyt kulkuja, jotka verkon pisteiden asemesta luettelevat yksinkertaisesti verkon viivat; tällaisia kulkuja kutsutaan Eulerin kuluiksi. Osoitamme seuraavassa, että Eulerin kulkujen olemassaololle löytyy luonnehdinta yksinkertaisella ehdolla, jonka voimassaolo on usein helposti tarkastettavissa annetun verkon tapauksessa.

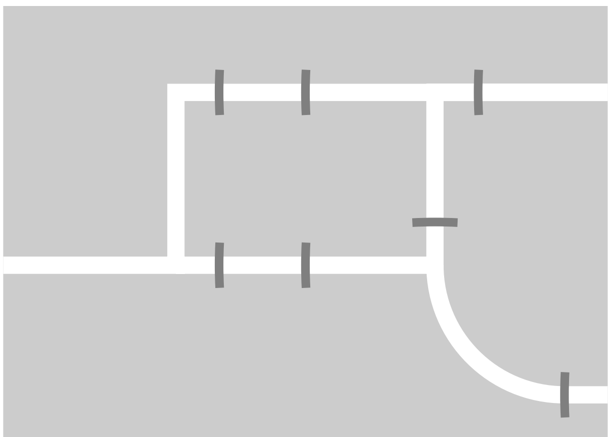
III 3.1 Määritelmä Olkoon G verkko. *Eulerin kulku* verkossa G on sellainen kulku $(x_0, ..., x_n)$ G:ssä, että jokainen G:n viiva esiintyy täsmälleen yhden kerran jonossa $(\overline{x_0 x_1}, ..., \overline{x_{n-1} x_n})$.

Jos Eulerin kulku $(x_0, ..., x_n)$ on kierros, niin sanomme sen olevan *Eulerin kierros*.

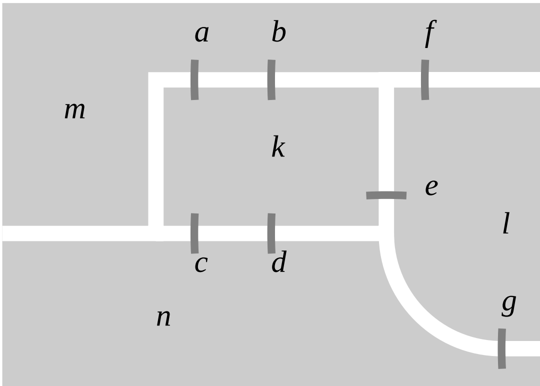
Kulku $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ verkossa G on täten Eulerin kulku G:ssä jos ja vain jos seuraavat kaksi ehtoa toteutuvat:(1) kaikilla $0 < i < j \leq n$ on voimassa $\overline{x_{i-1}x_i} \neq \overline{x_{j-1}x_j}$; (2) $V(\bar{x}) = V_G$.

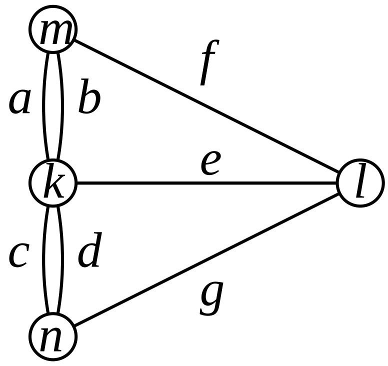
Koko verkkoteorian voi katsoa alkaneen v. 1736 ilmestyneestä artikkelista, jossa L. Euler ratkaisi seuraavan nk. Königsbergin siltojen ongelman.

III 3.2 Esimerkki Königsbergin kaupungin (nyk. Kaliningrad) läpi virtaavan Pregel–joen ja sen sivuhaaran rantoja sekä Kneiphof in saarta yhdistämään oli rakennettu alla olevan kaavakuvan mukaiset seitsemän siltaa:

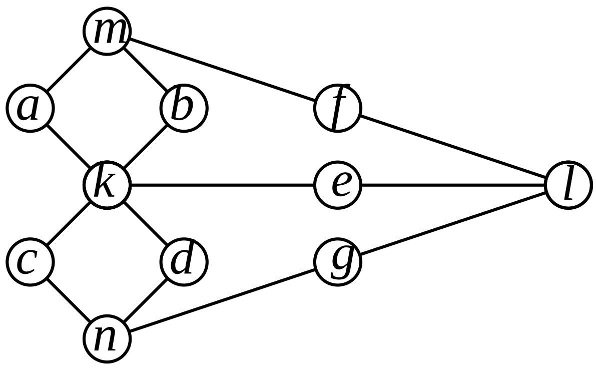


Kaupunkilaiset olivat pohtineet seuraavaa ongelmaa: Olisiko mahdollista kulkea jotakin reittiä pitkin kaikkien seitsemän sillan yli kulkematta minkään sillan yli kahteen kertaan? Ongelman ratkaisemiseksi yritetään kuvata sitä verkkojen avulla. Annetaan aluksi jokien erottamille maa–alueille ja maa–alueita yhdistäville silloille nimet ja muodostetaan tämän jälkeen alla oikeanpuolisen kuvion mukainen “verkko”, jonka pisteinä ovat maa–alueet m, n, k, l ja viivoina maa–alueita yhdistävät sillat a, b, c, d, e, f, g.





Valitettavasti kuvion "verkko" ei ole verkko annetun määritelmän mielessä, koska verkon määritelmästä seuraa, että verkon kahden pisteen välillä voi olla vain yksi viiva. Saamme määritelmän mukaisen verkon ottamalla pisteiksi sekä kaikki maa–alueet että kaikki sillat ja ottamalla viivoiksi kaikki ne viivat $\overline{pi}$, joilla sillan i toinen pää sijaitsee alueella p; tämä verkko on kuvattu alla olevassa kuvassa.



Näemme helposti, että Königsbergin siltojen ongelma palautuu Eulerin kulun etsimiseen yllä kuvatusta verkosta.

Seuraavassa annamme luonnehdinnan Eulerin kulun olemassaololle verkon parillisasteisuuden ja yhtenäisyyden avulla. Kyseisen luonnehdinnan todistamisessa voimme käyttää hyväksi aikaisempia renkaistoja koskevia tuloksia.

III 3.3 Lemma *Jos verkossa on Eulerin kierros, niin verkon viivat muodostavat renkaiston.*

Todistus. Todistamme väitteen induktiolla verkon viivojen lukumäärän suhteen. Jos viivojen lukumäärä on nolla, niin viivojen joukko on tyhjä ja täten renkaisto. Olkoon nyt $n > 0$ sellainen luonnollinen luku, että väite pätee niille verkoille, joissa on vähemmän kuin n viivaa. Näytämme, että väite pätee tällöin myös n–viivaisille verkoille. Olkoon G n–viivainen verkko, jossa on Eulerin kierros. Jos V_G on rengas, niin väite pätee verkolle G. Oletamme, ettei V_G ole rengas. Olkoon $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ Eulerin kierros verkossa G. Koska V_G ei ole rengas, niin kulku $\bar{x}$ ei ole yksinkertainen. Täten on olemassa sellaiset luvut $0 < i < j \leq n$, että $x_i = x_j$. Merkitsemme $\bar{y} = (x_i, ..., x_j)$ ja $\bar{z} = (x_1, ...x_i) \star (x_j, ..., x_n)$; panemme merkille, että $\bar{y}$ ja $\bar{z}$ ovat kierroksia verkossa G. Koska $\bar{x}$ on Eulerin kulku G:ssä, niin on voimassa $V(\bar{y}) \cap V(\bar{z}) = \emptyset$ ja $V(\bar{y}) \cup V(\bar{z}) = V_G$. Merkitsemme H:lla joukon $V(\bar{y})$ ja K:lla joukon $V(\bar{z})$ virittämää G:n aliverkkoa; tällöin $V_H = V(\bar{y})$ ja $V_K = V(\bar{z})$. Koska $\bar{x}$ on Eulerin kierros verkossa G, niin $\bar{y}$ on Eulerin kierros verkossa H ja $\bar{z}$ on Eulerin kierros verkossa K. Koska pätee, että $|V_H| = |V(\bar{y})| < n = v_G$ ja $|V_K| = |V(\bar{z})| < n = v_G$, niin induktio–oletuksesta seuraa, että joukot V_H ja V_K ovat renkaistoja. Tästä seuraa, koska $V_H \cap V_K = \emptyset$, että joukko $V_H \cup V_K = V_G$ on renkaisto. □

Yhtenäisen verkon tapauksessa pätee myös edellisen tuloksen käänteistulos.

III 3.4 Lemma *Jos yhtenäisen verkon viivat muodostavat renkaiston, niin verkossa on Eulerin kierros.*

Todistus. Todistamme induktiolla luvun n suhteen, että jos yhtenäisen verkon viivojen joukko on n:n erillisen renkaan yhdiste, niin verkossa on Eulerin kierros. Väite pätee triviaalisti tapauksissa $n = 0$ ja $n = 1$. Oletamme nyt, että $n > 1$ ja että olemme jo todistaneet väitteen niille yhtenäisille verkoille, joiden viivojen joukko on $n-1$:n erillisen renkaan yhdiste. Olkoon G sellainen yhtenäinen verkko, että sen kaikkien viivojen joukolla on esitys $V_G = \bigcup \mathcal{W}$, missä $\mathcal{W}$ on erillinen perhe G:n renkaita ja $|\mathcal{W}| = n$. Todistamme väitteen verkolle G. Merkitsemme jokaisella $W \in \mathcal{W}$ $G(W)$:llä renkaan W virittämää G:n aliverkkoa; panemme merkille, että verkko $G(W)$ on yhtenäinen. On voimassa $G = \bigvee_{W \in \mathcal{W}} G(W)$ ja tästä seuraa Lemman II 3.11 nojalla, koska G on yhtenäinen, että joukolla $\mathcal{W}$ on sellainen esitys $\mathcal{W} = \{W_i : i = 1, ..., n\}$, että jokaisella $1 < i \leq n$ on voimassa $P_{G(W_i)} \cap P_{G(W_j)} \neq \emptyset$ jollain $j < i$. Merkitsemme $G' = \bigvee_{i=1}^{n-1} G(W_i)$. Verkko G' on Lemman

II 3.12 nojalla yhtenäinen. Induktio–oletuksen nojalla verkossa G' on Eulerin kierros $\bar{x} = (x_0, ..., x_k)$. Olkoon luvulle $j \leq n-1$ ja G:n pisteelle p voimassa $p \in P_{G(W_n)} \cap P_{G(W_j)}$. Olkoon $\bar{z}$ sellainen yksinkertainen kierros verkossa G, että $W_n = V(\bar{z})$; voimme olettaa, että $\bar{z}$ on pisteestä p lähtevä kierros. Koska $p \in P(G(W_j)) \subset P_{G'} = P(\bar{x})$, on olemassa sellainen luku $l \leq k$, että $x_l = p$. Nyt näemme helposti, että jono $(x_0, ..., x_l) \star \bar{z} \star (x_l, ..., x_k)$ on Eulerin kierros verkosssa G. □

Seuraavassa lauseessa luonnehdimme sellaisia verkkoja, joissa ei ole eristettyjä pisteitä ja joissa on Eulerin kulku. Eristettyjen pisteiden puuttumista koskeva rajoitus ei ole kovin oleellinen, sillä eristetyillä pisteillä ei ole merkitystä Eulerin kulun olemassaololle: jos nimittäin G ja H ovat verkkoja, joille pätee, että $V_G = V_H$, niin verkossa G on Eulerin kulku jos ja vain jos verkossa H on Eulerin kulku.

III 3.5 Lause *Olkoon G verkko, jossa ei ole eristettyjä pisteitä. Tällöin verkossa G on Eulerin kierros jos ja vain jos G on yhtenäinen ja parillisasteinen.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Jos G:ssä on Eulerin kierros, niin G on Lemman III 3.3 ja Korollaarin III 2.4 nojalla parillisasteinen; koska G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä, niin Eulerin kierros käy jokaisessa G:n pisteessä ja G on täten Lauseen II 4.8 nojalla yhtenäinen.
Riittävyys. Lemma III 3.4 ja Korollaari III 2.4. □

Luonnehdimme seuraavaksi niitä eristettyjä pisteitä vailla olevia verkkoja, joissa on sellainen Eulerin kulku, joka ei ole kierros.

III 3.6 Lause *Olkoon G verkko, jolla ei ole eristettyjä pisteitä ja olkoot a ja b G:n pisteitä, $a \neq b$. Tällöin G:ssä on Eulerin kulku pisteestä a pisteeseen b jos ja vain jos G on yhtenäinen, pisteet a ja b ovat paritonasteisia ja kaikki muut G:n pisteet ovat parillisasteisia.*

Todistus. Käytämme todistuksessa hyväksi seuraavaa konstruktiota: valitsemme jonkin "pisteen" q, joka ei kuulu joukkoon P_G ja määrittelemme uuden verkon G' asettamalla $P_{G'} = P_G \cup \{q\}$ ja $V_{G'} = V_G \cup \{\overline{aq}, \overline{qb}\}$. Panemme merkille, että koska G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä, niin myöskään verkolla G' ei ole eristettyjä pisteitä.
Välttämättömyys. Oletamme, että verkossa G on sellainen Eulerin kulku $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$, että $x_0 = a$ ja $x_n = b$. Näemme helposti, että jono $(q, x_0, ..., x_n, q)$

on Eulerin kierros verkossa G'. Näin ollen G' on Lauseen III 3.5 nojalla parillisasteinen. Jokaisella $x \in P_G \setminus \{x_0, x_n\}$ on voimassa $d_G(x) = d_{G'}(x)$, joten verkko G on parillisasteinen pisteessä x. Toisaalta, jos $y = x_0$ tai $y = x_n$, niin $d_G(y) = d_{G'}(y) - 1$ ja tästä seuraa, että verkko G on paritonasteinen pisteessä y. Näin ollen verkossa G on täsmälleen kaksi paritonasteista pistettä, nimittäin pisteet $x_0 = a$ ja $x_n = b$. Toisaalta, koska G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä, niin Eulerin kulku $\bar{x}$ käy jokaisessa G:n pisteessä. Lauseen II 4.8 nojalla verkko G on yhtenäinen.

Riittävyys. Oletamme, että G on yhtenäinen ja että a ja b ovat ainoat G:n paritonasteiset pisteet. Verkon G' pisteen y aste määräytyy seuraavasti. Jos $y \in P_G \setminus \{a, b\}$, niin $d_{G'}(y) = d_G(y)$. Jos $y \in \{a, b\}$, niin $d_{G'}(y) = d_G(y) + 1$. Jos $y = q$, niin $d_{G'}(y) = 2$. Edellisen nojalla verkko G' on parillisasteinen. Verkon G yhtenäisyydestä seuraa, että myös verkko G' on yhtenäinen. Lauseen III 3.5 nojalla verkossa G' on Eulerin kierros $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$; voidaan olettaa, että $\bar{x}$ on G':n pisteestä q lähtevä kierros eli että $x_0 = x_n = q$. Koska $\bar{x}$ on Eulerin kierros, niin on voimassa $\overline{x_0 x_1} \neq \overline{x_{n-1} x_n}$; tästä seuraa, koska $\overline{aq}$ ja $\overline{qb}$ ovat ainoat verkon G' viivat, joilla on piste q toisena päätepisteenä, että on voimassa $\{x_1, x_{n-1}\} = \{a, b\}$ ja $x_i \neq q$ jokaisella $0 < i < n$. Edellisen nojalla pätee, että

$$\{\overline{x_1 x_2}, ..., \overline{x_{n-2} x_{n-1}}\} = V_{G'} \setminus \{\overline{qa}, \overline{bq}\} = V_G.$$

Edellä esitetystä seuraa, että jono $\bar{y} = (x_1, ..., x_{n-1})$ on Eulerin kulku verkossa G. Koska $\{x_1, x_{n-1}\} = \{a, b\}$, niin on voimassa joko $x_1 = a$ ja $x_{n-1} = b$ tai $x_1 = b$ ja $x_{n-1} = a$; ensimmäisessä tapauksessa $\bar{y}$ on Eulerin kulku G:ssä pisteestä a pisteeseen b ja jälkimmäisessä tapauksessa $(x_{n-1}, ..., x_1)$ on Eulerin kulku G:ssä pisteestä a pisteeseen b. □

Korollaarin II 2.7 nojalla verkon paritonasteisten pisteiden lukumäärä on parillinen; erityisesti, jos paritonasteisia pisteitä on korkeintaan kaksi kappaletta, niin joko niitä on täsmälleen kaksi kappaletta tai sitten verkko on parillisasteinen. Näin ollen Lauseiden III 3.5 ja III 3.6 tulokset voidaan yhdistää seuraavalla tavalla.

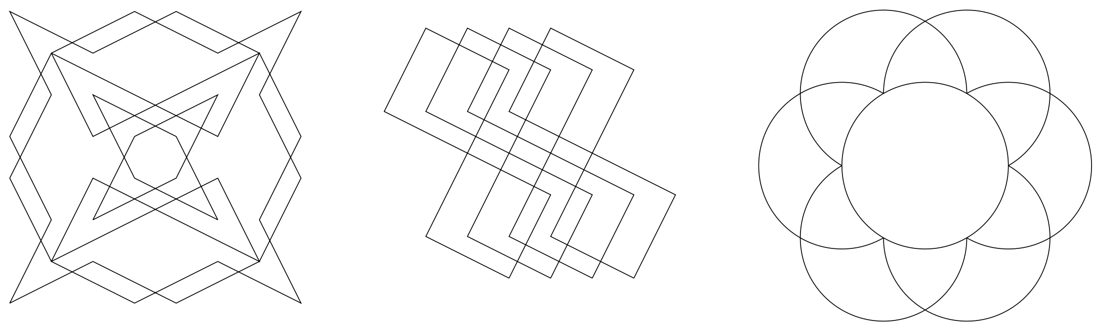
III 3.7 Korollaari *Eristettyjä pisteitä vailla olevassa verkossa on Eulerin kulku jos ja vain jos verkko on yhtenäinen ja siinä on korkeintaan kaksi paritonasteista pistettä.*

III 3.8 Esimerkkejä. **(a)** Korollaarin III 3.7 tuloksesta seuraa, ettei kaikkia Königsbergin siltoja voi ylittää kulkematta jonkun sillan yli useampaan kertaan, sillä Esimerkissä III 3.2 mainitussa verkossa on neljä paritonasteista pistettä.

(b) Ongelma: Onko mahdollista suorittaa shakkipelin ratsulla peräkkäin kaikki sallitut siirrot yhteen suuntaan toistamatta mitään siirtoa edes toiseen suuntaan?

Ratkaisu: Ongelma palautuu Eulerin kulun etsimiseen shakkipelin hevoseen liittyvästä verkosta H, jota olemme tarkastelleet aikaisemmissa esimerkeissä. Verkon H kahdeksalla "nurkkaruudun viereisellä reunaruudulla" on asteena kolme. Täten verkossa H ei ole Eulerin kulkua ja ongelmassa mainittua tehtävää ei ole mahdollista suorittaa.

(c) Tehtävät, joissa pyydetään piirtämään joku kuvio "yhteen kertaan kynää nostamatta", palautuvat Eulerin kulkujen etsimiseen kuvioita vastaavista verkoista. Seuraavassa eräitä tällaisia kuvioita:



4. Verkon yksisuuntaistukset.

Suhteikon sanotaan olevan *yksisuuntainen*, mikäli siinä ei ole kahta "vastakkaista" nuolta $\overrightarrow{ab}$ ja $\overrightarrow{ba}$. Verkko on yksisuuntainen vain siinä triviaalissa tapauksessa, että sillä ei ole yhtään viivaa; kuitenkin myös epätriviaaleihin verkkoihin liittyy yksisuuntaisia suhteikkoja, joiden tarkastelu saattaa selvittää verkon rakennetta.

Määritelmä Olkoon G verkko. Suhteikko $\vec{G}$ on verkon G *yksisuuntaistus*, jos $\vec{G}$ on yksisuuntainen ja $\vec{G}^s = G$.

Määritelmän mukaisesti $\vec{G}$ on siis G:n yksisuuntaistus, mikäli $\vec{G}$ on saatu G:stä valitsemalla jokaisella $\overline{xy} \in V_G$, jompikumpi, mutta ei molempia, nuolista $\overrightarrow{xy}$ ja $\overrightarrow{yx}$ joukkoon $N_{\vec{G}}$.

Jos G on yhtenäinen verkko, niin jokainen G:n yksisuuntaistus on Lauseen II 3.3 nojalla yhtenäinen. Tarkastelemme nyt eräitä yhtenäisyyttä voimakkaampia ominaisuuksia verkkojen yksisuuntaistusten yhteydessä.

Täydellisen verkon jokainen yksisuuntaistus on täydellinen suhteikko, joten Lauseen II 5.4 korollaari osoittaa, että täydellisen verkon jokaisella yksisuuntaistuksella on juuri. Mielivaltaisen yhtenäisen verkon tapauksessa pätee seuraava heikompi tulos.

III 4.1 Lause *Olkoon G yhtenäinen verkko ja olkoon a G:n piste. Tällöin G:llä on sellainen yksisuuntaistus $\vec{G}$, että a on $\vec{G}$:n juuri.*

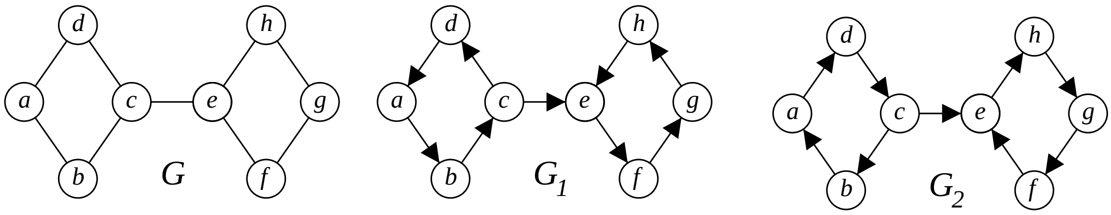
Todistus. Koska G on yhtenäinen, niin jokaisella $y \in P_G$ on olemassa kulku pisteestä a pisteeseen y. Jokaisella $y \in P_G$ merkitsemme $f(y)$:llä pienintä lukua $n \in \mathbb{N}$, jolla G:ssä on n–askeleinen kulku a:sta y:hyn.

Jokaisella $v \in V_G$ valitsemme sellaisen nuolen $\overrightarrow{a_v\, b_v}$, että $\overline{a_v b_v} = v$ ja $f(a_v) \leq f(b_v)$. Tällöin suhteikko $\vec{G}$, joka määräytyy ehdoista $P_{\vec{G}} = P_G$ ja $N_{\vec{G}} = \{\overrightarrow{a_v b_v} : v \in V_G\}$, on verkon G yksisuuntaistus.

Osoitamme, että a on suhteikon $\vec{G}$ juuri. Olkoon y $\vec{G}$:n piste. Tällöin $y \in P_G$, joten G:ssä on kulku $(x_0, ..., x_n)$ a:sta y:hyn, missä $n = f(y)$. Osoitamme, että $(x_0, ..., x_n)$ on myös kulku suhteikossa $\vec{G}$. Teemme vastaväitteen: on olemassa sellainen $i \in [n]$, että $\overrightarrow{x_{i-1}x_i}$ ei ole suhteikon $\vec{G}$ nuoli. Koska $\overline{x_{i-1}x_i} \in V_G$ ja $\overrightarrow{x_{i-1}x_i} \notin N_{\vec{G}}$, niin $\overrightarrow{x_i x_{i-1}} \in N_{\vec{G}}$ ja tästä seuraa joukon $N_{\vec{G}}$ alkioiden valinnan nojalla, että on voimassa $f(x_i) \leq f(x_{i-1})$. Koska $(x_0, ..., x_{i-1})$ on $i-1$ – askeleinen kulku G:ssä pisteestä a pisteeseen x_{i-1}, niin on voimassa $f(x_{i-1}) \leq i-1$. Näin ollen pätee, että $f(x_i) \leq f(x_{i-1}) \leq i-1$. Olkoon $(y_0, ..., y_k)$ sellainen kulku G:ssä a:sta x_i:hin, että $k = f(x_i)$. Tällöin on voimassa $k = f(x_i) \leq i-1$. Mutta nyt $(y_0, ..., y_k, x_{i+1}, ..., x_n)$ on kulku G:ssä a:sta y:hyn ja tämän kulun askelten lukumäärä on $k + (n-i) \leq n-1$; tämä on ristiriidassa sen kanssa, että $n = f(y)$. Edellisen nojalla vastaväite on väärä ja suhteikossa $\vec{G}$ on täten kulku $(x_0, ..., x_n)$ pisteestä a pisteeseen y. $\square$

Yleensä annetulla yhtenäisellä verkolla on useita eri yksisuuntaistuksia, joilla on annettu verkon piste juurena.

III 4.2 Esimerkki Alla molemmat oikealla puolella olevat suhteikot ovat vasemmalla kuvatun verkon G yksisuuntaistuksia ja kummallakin on G:n piste c juurena.



Huomaamme, että edellisen esimerkin verkossa on rengas. Seuraava tulos selittää tämän huomion.

III 4.3 Lause *Jos verkolla on kaksi eri yksisuuntaistusta, joilla on yhteinen juuri, niin verkossa on rengas.*

Todistus. Oletamme, että verkolla G on kaksi eri yksisuuntaistusta, joilla kummallakin on piste $a \in P_G$ juurena. Verkko G on yhtenäinen koska sillä on juurellinen yksisuuntaistus. Määrittelemme funktion $f : P_G \to \mathbb{N}$ ja verkon G yksisuuntaistuksen $\vec{G}$ kuten edellisen lauseen todistuksessa. Oletuksemme nojalla G:llä on sellainen yksisuuntaistus $\vec{\vec{G}}$, että $\vec{\vec{G}} \neq \vec{G}$ ja piste a on $\vec{\vec{G}}$:n juuri.

Olkoon G:n pisteille x ja y voimassa $\overrightarrow{xy} \in N_{\vec{G}}$ ja $\overrightarrow{yx} \in N_{\vec{\vec{G}}}$. Merkitsemme $m = f(x)$. Luvun $f(x)$ määrittelyn nojalla verkossa G on kulku $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_m)$ pisteestä a pisteeseen x. Luvun $f(x)$ minimaalisuuden nojalla kulku $\bar{x}$ on yksinkertainen. Koska $\overrightarrow{xy} \in N_{\vec{G}}$, on voimassa $f(y) \geq f(x)$ ja tästä seuraa, että $y \notin \{x_0, \ldots, x_m\}$. Edellisen nojalla $\bar{y} = (x_0, \ldots, x_m, y)$ on yksinkertainen kulku G:ssä pisteestä a pisteeseen y. Toisaalta, koska a on myös suhteikon $\vec{\vec{G}}$ juuri, suhteikossa $\vec{\vec{G}}$ on yksinkertainen kulku $\bar{z}$ pisteestä a pisteeseen y. Koska $\overrightarrow{x_m y} = \overrightarrow{xy}$ ei ole suhteikon $\vec{\vec{G}}$ nuoli, on voimassa $\bar{z} \neq \bar{y}$.

Edellä esitetyn nojalla verkossa G kaksi eri yksinkertaista kulkua pisteestä a pisteeseen y. Koska $\overrightarrow{xy} \in N_{\vec{G}}$, on voimassa $y \neq a$. Lauseen III 2.7 nojalla verkossa G on rengas. $\square$

Tietyissä käytännön tilanteissa haluaisimme löytää annetulle (yhtenäiselle) verkolle G sellaisen yksisuuntaistuksen $\vec{G}$, että suhteikossa $\vec{G}$ voidaan kulkea mistä tahansa pisteestä mihin tahansa muuhun pisteeseen.

Näemme helposti yllä olevassa esimerkissä, että jos $\vec{G}$ on sellainen G:n yksisuuntaistus, jolla on piste a juurena, niin G:ssä on oltava nuoli $\overrightarrow{ce}$; vastaavasti, jos $\vec{G}$ on sellainen G:n yksisuuntaus, jolla on piste g juurena, niin $\vec{G}$:ssä on oltava nuoli $\overrightarrow{ec}$. Emme siis voi yksisuuntaistaa verkkoa G siten, että sekä a että g olisivat juuria. Näin ollen mikään G:n yksisuuntaistus ei ole vahvasti yhtenäinen. Luonnehdimme nyt niitä verkkoja, joilla on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus.

III 4.4 Määritelmä Verkko G on *kahdesti yhtenäinen*, mikäli verkko $G - v$ on yhtenäinen jokaisella $v \in V_G$.

Lemman III 1.2 nojalla saamme seuraavan tuloksen.

III 4.5 Lause *Verkko on kahdesti yhtenäinen jos ja vain jos verkko on yhtenäinen ja sen jokainen viiva kuuluu johonkin renkaaseen.*

Seuraava tulos antaa perustelun yllä käyttöönottamallemme nimitykselle.

III 4.6 Lemma *Verkko G on kahdesti yhtenäinen jos ja vain jos jokaisella joukon P_G aidolla, epätyhjällä osajoukolla P, verkossa G on ainakin kaksi viivaa joukkojen P ja $P_G \setminus P$ välillä.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

III 4.7 Lause *Verkolla on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus jos ja vain jos verkko on kahdesti yhtenäinen.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Oletamme, että verkolla G on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus $\vec{G}$. Osoitamme edellisen lemman avulla, että verkko G on kahdesti yhtenäinen. Olkoon P joukon P_G epätyhjä aito osajoukko. Koska $\vec{G}$ on vahvasti yhtenäinen, $\vec{G}$:ssä on nuoli $\overrightarrow{ab}$ joukkoon P ja nuoli $\overrightarrow{cd}$ joukosta P. On voimassa $\overrightarrow{ab} \neq \overrightarrow{cd}$ ja tästä seuraa, koska $\vec{G}$ on yksisuuntainen, että $\overline{ab} \neq \overline{cd}$. Koska $\vec{G}$ on G:n yksisuuntaistus, niin $\overline{ab}$ ja $\overline{cd}$ ovat G:n viivoja; lisäksi kumpikin näistä viivoista on joukkojen P ja $P_G \setminus P$ välinen viiva. Olemme osoittaneet, että edellisen lemman ehto toteutuu.

Riittävyys. Oletamme, että verkko G on kahdesti yhtenäinen. Osoitamme, että G:llä on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus. Väite pätee triviaalisti jos $|P_G| = 1$, joten voimme olettaa, että $|P_G| \neq 1$. Lauseen III 4.5 nojalla voimme kirjoittaa $V_G = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, missä kukin R_i on rengas. Jokaisella $i \in [n]$ on olemassa sellainen yksinkertainen kierros $\bar{x}^i = (x_0^i, ..., x_{n_i}^i)$ verkossa G, että $R_i = V(\bar{x}^i)$. Panemme merkille, että G:ssä ei ole eristettyjä pisteitä ja että täten on voimassa $P_G = \bigcup_{i=1}^{n} P(\bar{x}^i)$.

Määrittelemme G:n yksisuuntaistuksen $\vec{G}$ seuraavasti. Olkoon v verkon G viiva. Merkitsemme k:llä epätyhjän lukujoukon $\{i \in [n] : v \in R_i\}$ pienintä lukua. Olkoon $j \in [n_k]$ se luku, jolle pätee, että $v = \overline{x_{j-1}^k x_j^k}$. Suunnistamme viivan v valitsemalla nuolen $\overrightarrow{x_{j-1}^k x_j^k}$ joukkoon $N_{\vec{G}}$.

Osoitamme, että $\vec{G}$ on vahvasti yhtenäinen. Olkoon P joukon $P_{\vec{G}} = P_G$ epätyhjä aito osajoukko. Koska G on yhtenäinen, viivajoukko $V = \{\overline{pq} \in V_G : p \in P \text{ ja } q \in P_G \setminus P\}$ on epätyhjä. Merkitsemme k:lla joukon $\{i \in [n] : V \cap R_i \neq \emptyset\}$ pienintä lukua. Lemman II 4.1(c) nojalla voimme olettaa, että $\overline{x_0^k x_1^k}$ on joukkojen P ja $P_G \setminus P$ välinen viiva. Oletamme, että vaikkapa $x_0^k \in P$ ja $x_1^k \notin P$; tapauksen $x_0^k \notin P$ ja $x_1^k \in P$ voimme käsitellä aivan vastaavasti. Merkitsemme j:llä suurinta niistä luvuista $i \in [n_k]$, joilla $x_i^k \notin P$. Panemme merkille, että on voimassa $j < n_k$, koska $x_{n_k}^k = x_0^k \in P$. Nyt $\overrightarrow{x_0^k x_1^k}$ on nuoli joukosta P ja $\overrightarrow{x_j^k x_{j+1}^k}$ on nuoli joukkoon P. Lisäksi nämä nuolet kuuluvat joukkoon $N_{\vec{G}}$, sillä luvun k minimaalisuudesta seuraa, ettei kumpikaan joukkojen P ja $P_G \setminus P$ välisistä viivoista $\overline{x_0^k x_1^k}$ ja $\overline{x_j^k x_{j+1}^k}$ voi kuulua mihinkään joukkoon R_i, missä $i < k$. Olemme osoittaneet, että suhteikko $\vec{G}$ on vahvasti yhtenäinen. □

Edellisen lauseen tulos antaa esimerkiksi riittävän ja välttämättömän (joskin teoreettisen) ehdon sille, että jossakin kaupungissa kaikki kadut voitaisiin tehdä yksisuuntaisiksi ilman, että estettäisiin pääsyä mistään paikasta mihinkään toiseen paikkaan.

Lauseessa 4.6 luonnehdimme niitä verkkoja, joilla on sellainen yksisuuntaistus, jossa jokaisesta pisteestä pääsee kulkemaan mihin tahansa muuhun pisteeseen. Luonnehdimme vielä sellaisia verkkoja, joilla on "kulkukelvoton" yksisuuntaistus.

4.7 Lemma *Verkko G on kaksijakoinen jos ja vain jos G:llä on sellainen yksisuuntaistus $\vec{G}$, että jokainen kulku suhteikossa $\vec{G}$ on korkeintaan yksiaskeleinen.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Olkoot A ja B sellaisia verkon G riippumattomia pistejoukkoja, että $P_G = A \cup B$ ja $A \cap B = \emptyset$. Kaikki G:n viivat ovat joukkojen A ja B välisiä viivoja. Olkoon $\vec{G}$ se verkon G yksisuuntaistus, jossa jokainen $n \in N_{\vec{G}}$ on nuoli joukosta A joukkoon B. Tällöin jokainen kulku $\vec{G}$:ssä on joko muotoa $()$, tai muotoa (x) jollain $x \in P_G$, tai muotoa (a, b) joillain $a \in A$ ja $b \in B$.

Riittävyys. Oletamme, että G:llä on sellainen yksisuuntaistus $\vec{G}$, että jokainen kulku $\vec{G}$:ssä on korkeintaan yksiaskeleinen. Merkitsemme

$$A = \{x \in P_G : x \text{ on jonkun } \vec{G}\text{:n nuolen alkupiste}\}$$

ja panemme merkille, että mikään joukon A piste ei ole minkään $\vec{G}$:n nuolen päätepiste; tästä seuraa, että A on verkon G riippumaton pistejoukko. Koska mikään joukon $B = P_G \setminus A$ piste ei ole minkään $\vec{G}$:n nuolen alkupiste, myös joukko B on riippumaton. □

HARJOITUSTEHTÄVIÄ LUKUUN III

1. Osoita, että verkon G aliverkko H on jonkun G:n renkaan virittämä jos ja vain jos H on 2-säännöllinen ja yhtenäinen.

   [*Huom.* Tämä täsmentää Lemman III 2.2 tulosta.]

2. Näytä, että tetraedriin liittyvässä verkossa (eli verkossa K_4) ei ole kahta erillistä rengasta.

3. Näytä, että tetraedriin liittyvän verkon renkaiden lukumäärä on seitsemän.

4. Osoita, että viiden pisteen täydellisessä verkossa K_5 ei ole kahta keskenään erillistä neliötä (eli 4-rengasta).

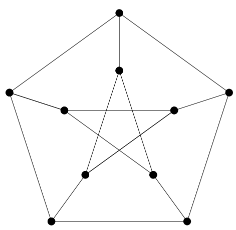
5. Näytä, että jos verkon K_5 jokainen viiva väritetään joko siniseksi tai punaiseksi, niin väritetystä verkosta löytyy yksivärinen rengas. Päteekö vastaava tulos verkolle K_4?

6. Olkoon A joukon $[n]$ k-osajoukko, missä $k > 2$. Näytä, että täydellisessä verkossa K_n on täsmälleen $\frac{(k-1)!}{2}$ sellaista k-rengasta, joiden viivojen päätepisteet ovat joukossa A.

   [*Ohje*: Jokaiseen tuollaiseen renkaaseen liittyy kaksi joukon A syklistä permutaatiota (katso kombinatoriikan monisteen tehtävää II 47).]

7. Johda edellisen tehtävän avulla lauseke verkon K_n renkaiden lukumäärälle. Vertaa lausekkeesi antamaa tulosta tapauksessa $n = 4$ yllä tehtävässä 2 annettuun lukuun.

8. Alla olevassa Petersenin verkon P esityksessä näkyy selvästi uloimpien viivojen muodostama 5-rengas. Nähdään myös helposti että sisimpien viivojen muodostama tähtikuvio on P:n 5-rengas, joka on erillinen ulommasta 5-renkaasta. Näytä, että vastaava tilanne pätee verkon P jokaisen 5-renkaan kohdalla (eli että jos R on mielivaltainen P:n 5-rengas, niin P:ssä on R:stä erillinen 5-rengas).



9. Osoita edellisen tehtävän avulla, että Petersenin verkon kaikkien 5-renkaiden joukko voidaan esittää kuuden eri 10-viivaisen renkaiston yhdisteenä.

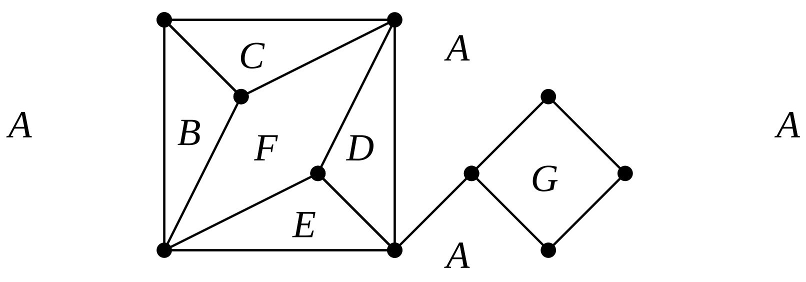
10. Osoita, ettei Petersenin verkossa ole yhtään kolmiota tai neliötä.

11. Osoita, että verkko on kaksijakoinen (katso Luvun II harjoitustehtävä 8) jos ja vain jos verkon jokaisessa renkaassa on parillinen määrä viivoja.

12. Osoita, että verkko G on rengasverkko jos ja vain jos G on yhtenäinen ja 2–säännöllinen (katso Luvun I harjoitustehtävä 23).

13. Osoita, että täydellisen verkon K_{2n+1} kaikkien viivojen joukolle V löytyy sellainen esitys renkaistona: $V = \bigcup_{i=1}^{n} V(\bar{x}_i)$, että kulut $\bar{x}_i$ ovat K_{2n+1}:n Hamiltonin kierroksia.

Oletetaan, että tasoverkko G on esitetty yksinkertaisesti tasossa (katso Harjoitustehtävä II 37). Voidaan osoittaa, että esityksen janat jakavat tason äärellisen moneen osaan, joista kullakin on janojen muodostama murtoviiva “reunana”; näistä osista yksi on rajoittamaton ja muut rajoitettuja. Kyseisiä tason osia kutsutaan tasoverkon *alueiksi.* Esimerkiksi alla kuvattu verkko jakaa tason rajoittamattomaan alueeseen A sekä rajoitettuihin alueisiin B,C,D,E,F ja G.



14. Osoita, että tasoverkon jokaista rajoitettua aluetta reunustavan murtoviivan sisältämien janojen joukko (tarkemmin: näitä janoja vastaavien verkon viivojen joukko) on

verkon rengas. Osoita, että kaikki nämä renkaat yhdessä virittävät verkon renkaistoryhmän (toisinsanoen, että jokainen verkon renkaisto voidaan esittää muodossa $R_1\Delta\cdots\Delta R_k$, missä R_i't ovat alueiden reunoihin liittyviä renkaita). Osoita myös, että nämä "reunarenkaat" ovat toisistaan riippumattomat siinä mielessä, ettei mitään niistä voida esittää muiden reunarenkaiden symmetrisenä erotuksena.

15. Dominopalikan kummassakin päässä on $0-6$ pistettä. Todista, että kaikki dominopalikat (yksi kutakin tyyppiä) voidaan sovittaa yhteen umpinaiseksi renkaaksi, jossa palikoiden toisiaan koskettavissa päissä on sama pisteluku. Onko tämä mahdollista, jos pisteitä on $0-5$?

Luonnehdimme edellä Eulerin kulun olemassaoloa vain verkkojen tapauksessa, mutta tuloksilla on myös vastineet yleisille suhteikoille. Olkoon S suhteikko ja olkoon $\bar{x}=(x_0,...,x_n)$ kulku suhteikossa S. Sanomme, että $\bar{x}$ on *Eulerin kulku pitkin suhteikon S nuolia*, mikäli jokainen S:n nuoli esiintyy täsmälleen yhden kerran jonossa $(\overrightarrow{x_0x_1},...,\overrightarrow{x_{n-1}x_n})$; jos $\bar{x}$ on lisäksi kierros, niin sanomme, etta se on *Eulerin kierros pitkin suhteikon S nuolia.*

16. Näytä, että eristettyjä pisteitä vailla olevassa suhteikossa S on nuolia pitkin kulkeva Eulerin kierros jos ja vain jos S on yhtenäinen ja $d_S^+(x)=d_S^-(x)$ jokaisella $x\in P_S$.
[*Ohje*: muunna Lauseen IV 3.5 todistusta.]

17. Osoita edellisen tehtävän avulla, että jokaisessa yhtenäisessä verkossa on nuolia pitkin kulkeva Eulerin kierros.

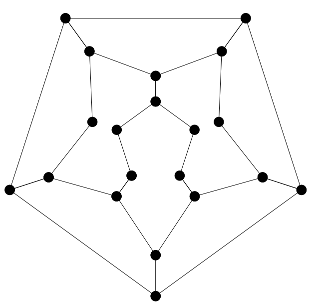
18. Osoita, että jos S on eristettyjä pisteitä vailla oleva suhteikko, niin S:ssä on nuolia pitkin kulkeva Eulerin kulku S:n pisteestä a S:n pisteeseen b, missä $a\neq b$, jos ja vain jos S on yhtenäinen, $d_S^-(a)=d_S^+(a)+1$, $d_S^+(b)=d_S^-(b)+1$ ja jokaisella $x\in P_S\setminus\{a,b\}$ on voimassa $d_S^+(x)=d_S^-(x)$.
[*Ohje*: Tehtävän 15 tulos ja Lauseen IV 3.7 todistus.]

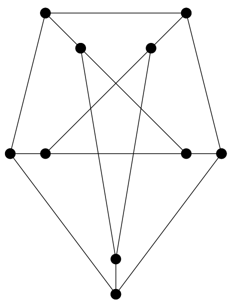
19. Aseta 8 nollaa ja 8 ykköstä renkaaksi niin, että jokainen yhdistelmä $0000, 0001, \ldots, 1111$ esiintyy siinä kerran. (Vihje: Nuolia pitkin kulkeva Eulerin kulku suhteikossa, jonka pisteet ovat $000, 001, \ldots, 111$.)

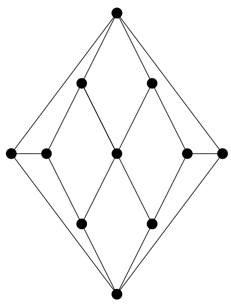
20. Olkoon S suhteikko, jolla on pistejoukkona $[4]$ ja yhteysmatriisina $\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}$.
Etsi suhteikosta S (a) nuolia pitkin kulkeva Eulerin kulku;
(b) Hamiltonin kulku. (Mikäli sellainen kulku on olemassa).

21. Todista Lauseen III 4.3 käänteistulos: Jos yhtenäisessä verkossa G on rengas, niin G:llä on kaksi eri yksisuuntaistusta, joilla on yhteinen juuri.
[*Ohje*: Olkoon $W=\{\overrightarrow{x_ix_{i+1}} : i=0,1,\ldots,n-1\}$ G:n rengas ja $\vec{G}$ sellainen G:n yksisuuntaistus, jolla on juuri a. Muuta joukon W viivoja vastaavien $\vec{G}$:n nuolien suuntauksia kahdella eri tavalla: kierroksen $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ kulkusuunnan mukaisiksi tai kulkusuunnan vastaisiksi. Näytä, että saaduilla kahdella G:n yksisuuntaistuksella on kummallakin a juurena.]

22. Etsi seuraavassa kuvatuille verkoille vahvasti yhtenäiset yksisuuntaistukset.



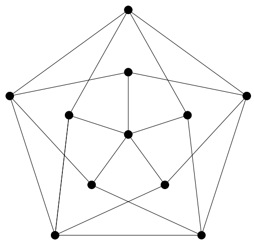


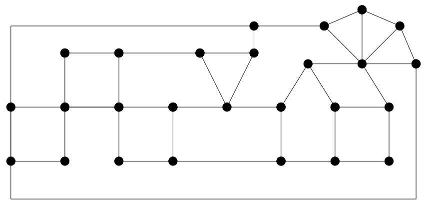


23. Olkoon G verkko. Osoita Korollaarin II 2.4 avulla, että jos G ei jo valmiiksi ole parillisasteinen, niin G voidaan tehdä parillisasteiseksi "lisäämällä yksi piste", toisin sanoen, on olemassa sellainen parillisasteinen verkko H, että $P_G \subset P_H$, $|P_H \setminus P_G| = 1$ ja G on joukon P_G virittämä H:n aliverkko.

24. Osoita Eulerin Lauseen (III 3.5) ja edellisen tehtävän avulla, että jokaisella verkolla G on sellainen yksisuuntaistus $\vec{G}$, että jokaisella $x \in P_G$ on voimassa $|d^+_{\vec{G}}(x) - d^-_{\vec{G}}(x)| \leq 1$.

25. Etsi edellisen tehtävän mukainen yksisuuntaistus seuraaville verkoille:





26. Näytä, että verkon G aliverkko H on G:n 2-tekijä jos ja vain jos H on 2-säännöllinen ja $P_H = P_G$.

    [*Muistutus*: k-tekijä määriteltiin tehtävässä II 65.]

27. Olkoon $k > 0$. Näytä, että jokaisella $2k$-säännöllisellä verkolla on 2-tekijä.

    [*Ohje*: Riittää näyttää, että $2k$-säännöllisen verkon G jokaisella komponentilla on 2-tekijä, joten voit olettaa, että G on yhtenäinen. Olkoon $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ Eulerin kierros G:ssä ja $P_G = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Merkitse $A = \{q_1, \ldots, q_m\}$ ja $B = \{r_1, \ldots, r_m\}$. Määrittele verkko H ehdoilla $P_H = A \cup B$ ja $V_H = \{\overline{q_i r_j} : (p_i, p_j) = (x_\ell, x_{\ell+1})$ jollain $i = 0, \ldots, n-1\}$. Huomaa, että H on kaksijakoinen ja k-säännöllinen. Konstruoi H:n täydellisen parijaon avulla 2-tekijä G:lle.]

28. Olkoon $k > 0$. Osoita, että jokainen $2k$-säännöllinen verkko on 2-jakautuva.

    [*Ohje*: Käytä edellisen tehtävän tulosta samaan tapaan kuin tehtävässä II 66 käytettiin Lauseen II 3.6 tulosta.]

Luku IV

Puut

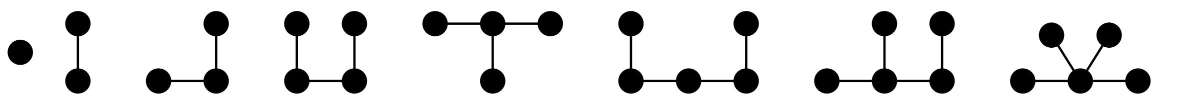
1. Puiden perusominaisuudet.

IV 1.1 Määritelmä Olkoon G verkko.

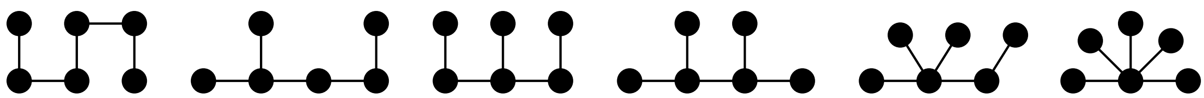
G on *renkaaton*, jos G:llä ei ole yhtään rengasta.

G on *puu*, jos G on renkaaton ja yhtenäinen.

IV 1.2 Esimerkki Seuraava kuva esittää puita, joilla on korkeintaan viisi pistettä:



On helppo nähdä, että kuvassa on esitetty siinä mielessä *kaikki* korkeintaan viisipisteiset puut, että jokainen tällainen puu on isomorfinen jonkin kuvassa näkyvän puun kanssa. Seuraavassa kuvassa on puolestaan esitetty isomorfiaa vaille kaikki erilaiset kuusipisteiset puut.



Aikaisempien tulosten avulla voidaan johtaa tärkeä yhtälö, joka vallitsee puun pisteiden ja viivojen lukumäärien välillä.

IV 1.3 Lause *Jokaiselle epätyhjälle puulle T on voimassa yhtälö*

$$\boxed{v_T = p_T - 1}$$

Todistus. Olkoon T puu. Koska T on yhtenäinen, niin Lauseen II 3.13 nojalla on voimassa epäyhtälö $v_T \geq p_T - 1$. Toisaalta, koska T on renkaaton, niin Lauseen III 1.3 nojalla pätee epäyhtälö $v_T < p_T$. Yhdistämällä edelliset kaksi epäyhtälöä saamme halutun yhtälön $v_T = p_T - 1$. □

Edellisen lauseen yhtälö ei luonnehdi puita verkkojen joukossa, kuten näemme vaikkapa tarkastelemalla verkkoa $K_3 \vee (\{4\}, \emptyset)$, joka koostuu yhdestä kolmiosta sekä yhdestä eristetystä pisteestä.

Puun renkaattomuuden ja Lauseen III 2.8 nojalla saamme seuraavan tuloksen.

IV 1.4 Lause *Jokainen puu on kaksijakoinen.*

IV 1.5 Määritelmä Puun T piste x on T:n *lehti*, mikäli $d_T(x) = 1$.

IV 1.6 Lause A. *Jos puulla on vähintäänkin kaksi pistettä, niin sillä on ainakin kaksi lehteä.*

B. *Jos epätyhjän puun kaikki pisteet ovat lehtiä, niin puussa on täsmälleen kaksi pistettä.*

Todistus. A. Olkoon T puu, $|P_T| \geq 2$. Korollaarin III 1.5 nojalla T:llä on sellaiset pisteet x ja y, että $x \neq y$, $d_T(x) \leq 1$ ja $d_T(y) \leq 1$. Koska T on yhtenäinen, T:ssä ei ole eristettyjä pisteitä; tästä seuraa, että $d_T(x) = d_T(y) = 1$.

B. Olkoon T sellainen epätyhjä puu, että jokaisella $x \in P_T$ on voimassa $d_T(x) = 1$. Tällöin on voimassa $\sum_{x \in P_T} d_T(x) = p_T$. Lauseen II 2.3 nojalla pätee, että $\sum_{x \in P_T} d_T(x) = 2 \cdot v_T$. Edellisestä seuraa, että $p_T = 2 \cdot v_T$. Koska Lauseen IV 1.3 nojalla pätee, että $v_T = p_T - 1$, niin saadaan yhtälö $p_T = 2 \cdot (p_T - 1)$ ja tästä seuraa vaadittu yhtälö $p_T = 2$. □

Annamme esimerkin Lauseen IV 1.3 käytöstä puiden tarkastelussa.

Tehtävä *Laske puun 3-asteisten pisteiden lukumäärä, kun puussa on niiden lisäksi vain kuusi lehteä, yksi 2-asteinen ja yksi 4-asteinen piste.*

Ratkaisu. Olkoon T tehtävän puu. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ merkitsemme $a_n = |\{x \in P_T : d_T(x) = n\}|$. On siis voimassa $a_1 = 6$, $a_2 = 1 = a_4$ ja $a_n = 0$ kun $n > 4$.

Puulle T pätee Lauseen IV 1.3 nojalla, että $v_T = p_T - 1$. Lisäksi on voimassa yhtälöt $2v_T = \sum_{x \in P_T} d_T(x) = 6 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + a_3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 12 + 3 \cdot a_3$ sekä $p_T = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8 + a_3$. Edellisen nojalla on voimassa $12 + 3a_3 = 2(p_T - 1) = 14 + 2a_3$ ja tästä saamme a_3:lle arvoksi 2, joka on siis T:n 3-asteisten pisteiden lukumäärä. $\square$

Luonnehdimme Lauseessa III 2.8 verkon kaksijakoisuutta verkon renkaiden koon avulla; lauseen ehto toteutuu triviaalisti renkaattomalle verkolle, joten saamme seuraavan tuloksen.

IV 1.7 Lause *Jokainen puu on kaksijakoinen.*

Esitämme nyt eräitä välttämättömiä ja riittäviä ehtoja sille, että verkko on puu. Luonnehdimme aluksi puita kulkujen avulla.

IV 1.8 Lause *Verkko G on puu jos ja vain jos kaikilla $x, y \in P_G$, missä $x \neq y$, on olemassa täsmälleen yksi yksinkertainen kulku G:ssä pisteestä x pisteeseen y.*

Todistus. Koska G:ssä on jokaisella $z \in P_G$ kulku pisteestä z pisteeseen z, Lauseen II 4.8 ja Lemman II 4.3 tuloksista seuraa, että G on yhtenäinen jos ja vain jos kaikilla $x, y \in P_G$, missä $x \neq y$, G:ssä on ainakin yksi yksinkertainen kulku pisteestä x pisteeseen y. Toisaalta, Lauseen III 2.7 nojalla, G on renkaaton jos ja vain jos kaikilla $x, y \in P_G$, missä $x \neq y$, G:ssä on korkeintaan yksi yksinkertainen kulku pisteestä x pisteeseen y. Näin ollen G on yhtenäinen ja renkaaton jos ja vain jos lauseen ehto on voimassa. $\square$

Seuraavaksi luonnehdimme puita "minimaalisina yhtenäisinä verkkoina" ja "maksimaalisina renkaattomina verkkoina". Otamme käyttöön seuraavat nimitykset. Olkoot G ja H verkkoja. Jos $P_G = P_H$ ja $V_G \subsetneq V_H$, niin sanomme, että H on saatu *lisäämällä* G:hen *viivoja* tai että G on saatu *poistamalla* H:sta *viivoja.*

IV 1.9 Lause *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät epätyhjälle verkolle G:*

A. *G on puu.*

B. *G on yhtenäinen, mutta jokainen verkko, joka on saatu poistamalla G:stä viivoja, on epäyhtenäinen.*

C. *G on renkaaton, mutta jokaisella verkolla, joka on saatu lisäämällä G:hen viivoja, on rengas.*

Todistus. A$\Longrightarrow$B ja A$\Longrightarrow$C: Oletamme, että G on puu. Tällöin G on yhtenäinen ja renkaaton ja Lauseen IV 1.3 nojalla on voimassa yhtälö $v_G = p_G - 1$. Olkoon nyt H verkko, joka on saatu poistamalla G:stä viivoja. Tällöin on voimassa $p_H = p_G$ ja $v_H < v_G$, joten $v_H < v_G = p_G - 1 = p_H - 1$. Lauseen II 3.13 nojalla verkko H on epäyhtenäinen. Olemme osoitettaneet, että ehto B on voimassa. Olkoon H' verkko, joka on saatu lisäämällä G:hen viivoja. Tällöin on voimassa $p'_H = p_G$ ja $v'_H > v_G$, joten $v'_H > v_G = p_G - 1 = p'_H - 1$. Lauseen III 1.3 nojalla verkolla H' on rengas. Olemme osoittaneet, että ehto C on voimassa.

B$\Longrightarrow$A: Oletamme, että ehto B pätee. Tällöin G on yhtenäinen, joten G on puu, mikäli G on renkaaton. Verkon G renkaattomuus seuraa Lauseen III 1.1 tuloksesta, sillä jokainen muotoa $G - v$, missä $v \in V_G$, oleva verkko on saatu poistamalla G:stä viivoja.

C$\Longrightarrow$A: Oletamme, että ehto C pätee. Koska G on renkaaton, ehdon A todistamiseksi riittää näyttää, että G on yhtenäinen. Teemme vastaväitteen: G on epäyhtenäinen. Olkoon H sellainen yhtenäinen verkko, joka on saatu lisäämällä G:hen viivoja ja jolla luku $|V_H|$ on pienin mahdollinen. Koska ehto C pätee, verkossa H on rengas W. Koska verkko G on renkaaton, on olemassa viiva $v \in W \setminus V_G$. Lauseen III 1.1 nojalla verkko $H' = H - v$ on yhtenäinen. Tämä on kuitenkin ristiriidassa luvun $|V_H|$ minimaalisuuden kanssa, sillä H' on saatu lisäämällä G:hen viivoja ja $|V_{H'}| < |V_H|$. □

IV 1.10 Korollaari *Seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitävät epätyhjälle verkolle G:*

A. *G on puu.*

B. *G on yhtenäinen ja $v_G \leq p_G - 1$.*

C. *G on renkaaton ja $v_G \geq p_G - 1$.*

Todistus. Puun määritelmän ja Lauseen IV 1.3 nojalla on voimassa A$\Longrightarrow$B ja A$\Longrightarrow$C.

B$\Longrightarrow$A: Oletamme, että ehto B on voimassa. Osoitamme, että tällöin edellisen lauseen ehto B on voimassa. Olkoon H verkko, joka on saatu poistamalla G:stä viivoja. Tällöin on voimassa $v_H < v_G$ ja $p_H = p_G$, joten $v_H < v_G \leq p_G - 1 = p_H - 1$. Edellisestä seuraa Lauseen II 3.13 nojalla, että verkko H on epäyhtenäinen. Olemme näyttäneet, että edellisen lauseen ehto B on voimassa; lauseen nojalla verkko G on puu.

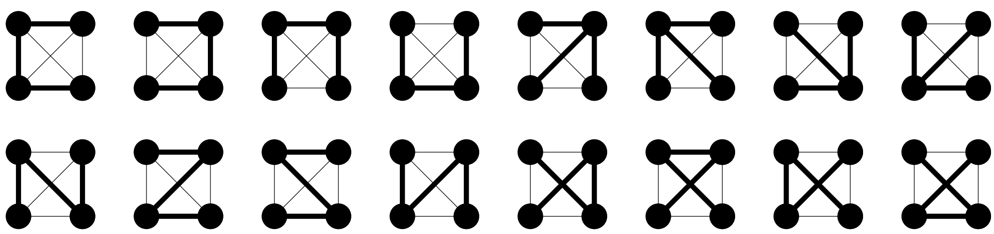
C$\Longrightarrow$A: Oletamme, että ehto C on voimassa. Osoitamme, että tällöin edellisen lauseen ehto C pätee. Olkoon H verkko, joka on saatu lisäämällä G:hen viivoja. Tällöin $v_H > v_G$ ja $p_H = p_G$, joten $v_H > v_G \geq p_G - 1 = p_H - 1$. Edellisestä seuraa Lauseen III 1.3 nojalla, että verkossa H on rengas. Olemme näyttäneet, että G toteuttaa edellisen lauseen ehdon C; kyseisen lauseen nojalla G on puu. □

2 VIRITTÄVÄT PUUT.

Puita voidaan käyttää hyväksi myös sellaisten verkkojen tapauksessa, jotka eivät ole puita. Otamme käyttöön seuraavan käsitteen.

IV 2.1 Määritelmä Olkoon G verkko. Verkon G aliverkko H on G:n *virittävä puu*, mikäli H on puu ja $P_H = P_G$.

IV 2.2 Esimerkki Alla on esitetty täydellisen neljän pisteen verkon virittäviä puita:



IV 2.3 Lause *Verkolla G on virittävä puu jos ja vain jos G on yhtenäinen.*

Todistus. *Välttämättömyys.* Oletamme, että G:llä on virittävä puu H. Koska H on G:n yhtenäinen aliverkko, jolle pätee, että $P_H = P_G$, näemme verkon G olevan yhtenäinen.

Riittävyys. Oletamme, että G on yhtenäinen. Merkitsemme

$$\mathcal{H} = \{H < G : H \text{ on yhtenäinen ja } P_H = P_G\}.$$

Panemme merkille, että on voimassa $\mathcal{H} \neq \emptyset$ koska $G \in \mathcal{H}$. Merkitsemme n:llä lukujoukon $\{v_H : H \in \mathcal{H}\}$ pienintä lukua. Olkoon T sellainen joukon $\mathcal{H}$ alkio, että

$v_T = n$. Osoitamme, että T on G:n virittävä puu. Koska $T \in \mathcal{H}$, on voimassa yhtälö $P_T = P_G$; näinollen T on G:n virittävä puu, mikäli T on puu. Käytämme tämän osoittamiseen Lauseen IV 1.9 ehdon B antamaa puiden luonnehdintaa. Koska $T \in \mathcal{H}$, verkko T on yhtenäinen. Olkoon nyt L verkko, joka on saatu poistamalla T:stä viivoja. Tällöin on voimassa $v_L < v_T = n$, joten luvun n määritelmästä seuraa, että $L \notin \mathcal{H}$; tästä puolestaan seuraa, koska $P_L = P_T = P_G$, että verkko L ei ole yhtenäinen. Olemme osoittaneet, että Lauseen IV 1.9 ehto B on voimassa. Verkko T on kyseisen lauseen nojalla puu. □

Yllä esitetty todistus antaa seuraavan menetelmän yhtenäisen verkon G virittävän puun löytämiseksi: poistetaan G:stä viivoja niin pitkään kuin tämä on mahdollista tekemättä saatavaa verkkoa epäyhtenäiseksi; viimeiseksi saatu verkko on G:n virittävä puu. Toinen menetelmä, joka perustuu Lauseen IV 1.9 ehtoon C, on seuraava: aloitetaan verkosta $(P_G, \emptyset)$ ja lisätään viivoja joukosta V_G niin kauan kuin tämä on mahdollista ilman, että saatavassa verkossa on yhtään rengasta.

Jokaisella puulla on vain yksi virittävä puu, mutta yleensä yhtenäisellä verkolla on useampia eri virittäviä puita. Laskemme nyt montako virittävää puuta n–pisteisellä yhtenäisellä verkolla voi olla, toisin sanoen, laskemme täydellisen verkon K_n virittävien puiden lukumäärän. Todistamme ensin eräitä aputuloksia.

IV 2.4 Lemma *Olkoon T puu, jossa on vähintään kolme pistettä ja olkoon $A \subset P_T$ joukko T:n lehtiä. Tällöin joukon $P_T \setminus A$ virittämä T:n aliverkko T' on puu. Lisäksi on olemassa sellainen kuvaus $f : A \to P_T \setminus A$, että $V_T = V_{T'} \cup \{\overline{af(a)} : a \in A\}$.*

Todistus. Osoitamme aluksi kuvauksen f olemassaolon. Olkoon a joukon A alkio. Tällöin a on T:n lehti, joten on olemassa täsmälleen yksi sellainen $x \in P_T$, että $\overline{ax} \in V_T$; merkitsemme tätä alkiota x $f(a)$:lla. Osoitamme, että $f(a) \notin A$. Yhtenäisessä verkossa T on viiva v epätyhjien joukkojen $\{a, f(a)\}$ ja $P_T \setminus \{a, f(a)\}$ välillä. Koska $\overline{af(a)} \in V_T$, T:n lehti a ei voi olla viivan v päätepisteenä ja tästä seuraa, että $f(a)$ on v:n päätepiste. Edellisen nojalla pätee, että $f(a)$ ei ole T:n lehti; täten $f(a) \notin A$. Olemme osoittaneet, että f on kuvaus $A \to P_T \setminus A$. Joukossa $\{\overline{af(a)} : a \in A\}$ ovat kaikki ne T:n viivat, joilla on päätepiste joukossa A; koska kaikki muut T:n viivat ovat joukon $P_T \setminus A$ virittämän T:n aliverkon viivoja, on voimassa $V_T = V_{T'} \cup \{\overline{af(a)} : a \in A\}$.

Renkaattoman verkon T aliverkko T' on renkaaton, joten T' on puu, mikäli T' on yhtenäinen. Olkoon P joukon $P_{T'}$ epätyhjä, aito osajoukko. Merkitsemme $P' = P \cup \{a \in A : f(a) \in P\}$ ja panemme merkille, että P' on joukon P_T epätyhjä ja aito osajoukko. Yhtenäisessä verkossa T on sellainen viiva $\overline{xy}$, että $x \in P'$ ja $y \in P_T \setminus P'$. Jokaisella $a \in A \cap P'$ on voimassa $f(a) \in P'$ ja tästä seuraa, että $x \notin A$; vastaavasti, jokaisella $a \in A \setminus P'$ on voimassa $f(a) \notin P'$ ja tästä seuraa, että $y \notin A$. Edellisen nojalla pätee, että $x \in P$ ja $y \in P_{T'} \setminus P$; koska tästä seuraa myös, että $\overline{xy} \in V_{T'}$, olemme näyttäneet T':n olevan yhtenäinen. □

IV 2.5 Lemma *Olkoon S epätyhjä puu, olkoon A sellainen joukko, että $A \cap P_S = \emptyset$ ja olkoon f kuvaus $A \to P_S$. Tällöin ehtojen $P_G = P_S \cup A$ ja $V_G = V_S \cup \{\overline{af(a)} : a \in A\}$ määräämä verkko G on puu ja jokainen A:n alkio on puun G lehti.*

Todistus. Panemme merkille, että on voimassa $p_G = p_S + |A|$ ja $v_G = v_S + |A|$ ja näinollen $p_G - v_G = p_S - v_S$. Lauseen IV 1.3 nojalla on voimassa $p_S - v_S = 1$. Edellisen nojalla pätee, että $p_G - v_G = 1$ ja tästä seuraa Korollaarin IV 1.10 nojalla, että G on puu, mikäli G on yhtenäinen. Olkoon p jokin puun S piste. Osoitamme, että jokaisella $x \in P_G$, G:ssä on kulku pisteestä x pisteeseen p. Jos $x \in P_S$, niin tällöin S:ssä on kulku $\bar{x}$ pisteestä x pisteeseen p ja $\bar{x}$ on myös kulku verkossa G. Jos taas $x \in A$, niin tällöin S:ssä on kulku $(x_0, ..., x_n)$ pisteestä $f(x)$ pisteeseen p ja tässä tapauksessa $(x, x_0, ..., x_n)$ on kulku G:ssä x:stä p:hen. Olemme näyttäneet, että jokaisella $x \in P_G$, G:ssä on kulku x:stä p:hen; tästä seuraa Lauseen II 4.8 nojalla, että G on yhtenäinen.

Edellä esitetyn nojalla G on puu. Jokaisella $a \in A$, piste a on G:n lehti, sillä $\overline{af(a)}$ on ainoa G:n viiva, jolla on a päätepisteenä. □

Käyttämällä hyväksi edellisiä lemmoja sekä summa- ja erotusperiaatetta voimme nyt määrittää täydellisen verkon virittävien puiden lukumäärän.

IV 2.6 Lause *Jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$, verkon K_n virittävien puiden lukumäärä on n^{n-2}.*

Todistus. Merkitsemme jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$, π_n:llä verkon K_n virittävien puiden lukumäärää ja panemme merkille, että jokaisessa n–pisteisessä täydellisessä verkossa on sama määrä virittäviä puita. Osoitamme induktiolla luvun n suhteen, että jokaisella $n \in \mathbb{N}^*$ on voimassa $\pi_n = n^{n-2}$.

Verkot K_1 ja K_2 ovat puita, joten on voimassa $\pi_1 = \pi_2 = 1$; näinollen yhtälö $\pi_k = k^{k-2}$ pätee, kun $k = 1, 2$.

Olkoon nyt $n > 2$ sellainen luku, että jokaisella $k < n$ on voimassa $\pi_k = k^{k-2}$. Osoitamme summa– ja erotusperiaatteen (Lause A 2.5) avulla, että on voimassa $\pi_n = n^{n-2}$. Merkitsemme $\mathcal{T}$:llä verkon K_n kaikkien virittävien puiden muodostamaa kokoelmaa ja jokaisella $a \in [n]$ merkitsemme $\mathcal{T}_a = \{T \in \mathcal{T} : a \text{ on puun } T \text{ lehti}\}$. Merkitsemme edelleen $\mathcal{T}_A = \bigcap_{a \in A} \mathcal{T}_a$ jokaisella $\emptyset \neq A \subset [n]$. Lauseen IV 1.6 nojalla on voimassa $\mathcal{T} = \bigcup_{a \in [n]} \mathcal{T}_a$. Summa– ja erotusperiaatteen (kombinatoriikan monisteen Lause II 2.3) nojalla on voimassa

$$\pi_n = |\mathcal{T}| = \sum_{\emptyset \neq A \subset [n]} (-1)^{|A|+1} \Big| \mathcal{T}_A \Big|. \tag{$*$}$$

Osoitamme, että jokaisella $\emptyset \neq A \subset [n]$ on voimassa $|\mathcal{T}_A| = (n - |A|)^{n-2}$. Yhtälö pätee, jos $A = [n]$, sillä tässä tapauksessa $\mathcal{T}_A = \emptyset$ Lauseen IV 1.6 ja epäyhtälön $n > 2$ nojalla. Olkoon nyt A joukon $[n]$ epätyhjä aito osajoukko. Puu $T \in \mathcal{T}$ kuuluu joukkoon $\mathcal{T}_A$ jos ja vain jos jokainen A:n alkio on T:n lehti. Edellisen ja Lemman IV 2.4 nojalla on jokaisella $T \in \mathcal{T}_A$ olemassa sellainen kuvaus $f_T : A \to [n] \setminus A$ ja sellainen puu $S(T)$, että $P_{S(T)} = [n] \setminus A$ ja $V_T = V_{S(T)} \cup \{\overline{a f_T(a)} : a \in A\}$. Merkitsemme $\mathcal{S}$:llä täydellisen verkon $K_{[n] \setminus A}$ virittävien puiden muodostamaa joukkoa ja panemme merkille, että jokaisella $T \in \mathcal{T}_A$ on voimassa $S(T) \in \mathcal{S}$. Määrittelemme kuvauksen $\psi : \mathcal{T}_A \to ([n] \setminus A)^A \times \mathcal{S}$ asettamalla $\psi(T) = (f_T, S(T)$ jokaisella $T \in \mathcal{T}_A$. Kuvaus ψ on injektio, koska jokainen $T \in \mathcal{T}_A$ määräytyy kuva–alkiostaan $\psi(T)$ ehtojen $P_T = [n]$ ja $V_T = V_{S(T)} \cup \{\overline{a f_T(a)} : a \in A\}$ kautta. Kuvaus ψ on myös surjektio, sillä jokaisella $(f, S) \in ([n] \setminus A)^A \times \mathcal{S}$, jos määrittelemme verkon G kuten Lemmassa IV 2.5, niin tällöin kyseisen lemman nojalla pätee, että $G \in \mathcal{T}_A$ ja toisaalta näemme helposti, että on voimassa $\psi(G) = (f, S)$. Edellisen nojalla kuvaus ψ on bijektio. Täten on voimassa $|\mathcal{T}_A| = \big|([n] \setminus A)^A \times \mathcal{S}\big|$ ja näinollen $|\mathcal{T}_A| = (n - |A|)^{|A|} \cdot |\mathcal{S}|$. Lisäksi pätee, että $|\mathcal{S}| = \pi_{n-|A|}$. Koska $0 < n - |A| < n$, induktio–oletuksesta seuraa, että $\pi_{n-|A|} = (n-|A|)^{n-|A|-2}$. Edellä esitetyn nojalla on voimassa

$$|\mathcal{T}_A| = (n - |A|)^{|A|} \cdot (n - |A|)^{n-|A|-2} = (n - |A|)^{n-2}.$$

Koska jokaiselle $\emptyset \neq A \subset [n]$ on voimassa $|\mathcal{T}_A| = (n-|A|)^{n-2}$ ja koska jokaisella $i \in [n]$, joukon $[n]$ i–alkioisten osajoukkojen lukumäärä on $\binom{n}{i}$, saamme yhtälön

(*) nojalla yhtälön $\pi_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}(n-i)^{n-2}$. Voimme kirjoittaa viimeisen yhtälön oikean puolen muotoon $n^{n-2} - \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}(n-i)^{n-2}$. Kombinatoriikan monisteen Korollaarin II 3.14 nojalla pätee, että $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}(n-i)^{n-2} = 0$ ja näin saamme halutun yhtälön $\pi_n = n^{n-2}$. □

Huomautus *Koska Esimerkissä IV 2.2 kuvattiin 16 eri virittävää puuta verkolle K_4, niin edellisen lauseen nojalla siinä kuvattiin kaikki verkon K_4 virittävät puut.*

Voimme käyttää verkon virittäviä puita hyväksi tutkiessamme verkon renkaita ja renkaistoja.

IV 2.7 Lemma *Olkoon T verkon G virittävä puu ja olkoon v joukon $V_G \smallsetminus V_T$ alkio. Tällöin on olemassa sellainen G:n rengas R, että $R \smallsetminus V_T = \{v\}$.*

Todistus. Olkoon $v = \overline{xy}$. Tällöin $x \neq y$ ja $x, y \in P_G = P_T$. Lauseen IV 1.8 nojalla verkossa T on yksinkertainen kulku $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ pisteestä x pisteeseen y. Koska T on G:n aliverkko, niin $\bar{x}$ on kulku myös verkossa G. Koska $\overline{x_n x_0} = v \in V_G$, niin jono $\bar{x}' = (x_0, ..., x_n, x_0)$ on kierros verkossa G. Kulun $\bar{x}$ yksinkertaisuudesta seuraa, että myös kierros $\bar{x}'$ on yksinkertainen. Koska $\overline{x_0 x_1} \in V_T$ ja $\overline{x_0 x_n} = v \notin V_T$, niin on voimassa $x_n \neq x_1$ ja täten $n > 1$. Edellisen nojalla kierros $\bar{x}'$ on vähintään kolmiaskeleinen; näin ollen joukko $R = V(\bar{x}')$ on G:n rengas. Lisäksi on voimassa $R \smallsetminus V_T = V(\bar{x}') \smallsetminus V(\bar{x}) = \{\overline{x_n x_0}\} = \{v\}$. □

Osoitamme nyt, että edellisessä lemmassa mainittu rengas on yksikäsitteisesti määrätty.

IV 2.8 Lemma *Olkoon T verkon G virittävä puu ja olkoot Q ja Q' sellaisia G:n renkaistoja, että $Q \smallsetminus V_T = Q' \smallsetminus V_T$. Tällöin $Q = Q'$.*

Todistus. Lauseen III 2.5 nojalla joukko $Q \Delta Q'$ on G:n renkaisto. Koska $Q \smallsetminus V_T = Q' \smallsetminus V_T$, niin $Q \Delta Q' \subset V_T$. Täten $Q \Delta Q'$ on puun T renkaisto. Koska T on renkaaton, niin renkaisto $Q \Delta Q'$ on tyhjä; tästä seuraa Korollaarin I 1.13 nojalla, että $Q = Q'$. □

Olkoon T verkon G virittävä puu. Merkitsemme jokaisella $v \in V_G \smallsetminus V_T$, $R(v, T)$:llä Lemmojen IV 2.7 ja IV 2.8 yksikäsitteiseksi osoittamaa G:n rengasta. Kutsumme näitä renkaita $R(v, T)$, $v \in V_G \smallsetminus V_T$, verkon G *perusrenkaiksi* virittävän puun T suhteen.

IV 2.9 Lause *Olkoon T verkon G virittävä puu ja olkoon V joukon $V_G \smallsetminus V_T$ osajoukko. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi sellainen G:n renkaisto Q, että $Q \smallsetminus V_T = V$.*

Todistus. Renkaiston Q yksikäsitteisyys seuraa Lemman IV 2.8 tuloksesta, joten riittää todistaa Q:n olemassaolo. Esitämme joukon V muodossa, $\{v_1, ..., v_n\}$, missä $v_i \neq v_j$ kun $i \neq j$. Merkitsemme $Q = R(v_1, T)\Delta \cdots \Delta R(v_n, T)$ ja panemme merkille, että koska joukot $R(v_i, T)$, $i \in [n]$, ovat G:n renkaita, niin joukko Q on Lauseen III 2.5 nojalla G:n renkaisto. Osoitamme, että $Q \smallsetminus V_T = V$. Olkoon w joukon $V_G \smallsetminus V_T$ alkio. Tällöin jokaiselle $i \in [n]$ pätee Lemman IV 2.7 nojalla, että $w \in R(v_i, T) \iff v_i = w$; tästä seuraa Lemman I 1.14 nojalla, että on voimassa

$$\begin{aligned} w \in Q &\iff |\{i \in [n] : w \in R(v_i, T)\}| \text{ pariton} \\ &\iff |\{i \in [n] : v_i = w\}| = 1 \\ &\iff \exists \text{ sellainen } i \in [n], \text{ että } v_i = w \\ &\iff w \in V \ . \end{aligned}$$

Edellä esitetyn nojalla on voimassa $Q \smallsetminus V_T = V$. □

Yllä oleva todistus osoittaa, että yhtenäisen verkon virittävään puuhun liittyvät perusrenkaat "virittävät" G:n renkaistoryhmän $(\mathcal{R}(G), \Delta)$:

IV 2.10 Korollaari *Olkoon T yhtenäisen verkon G virittävä puu ja olkoon Q verkon G renkaisto. Tällöin joukossa $V_G \smallsetminus V_T$ on sellaiset viivat $v_1, ..., v_n$, että $Q = R(v_1, T)\Delta \cdots \Delta R(v_n, T)$.*

Lauseen IV 2.9 avulla voimme määrätä yhtenäisen verkon renkaistojen lukumäärän. Olkoon T yhtenäisen verkon G virittävä puu. Lauseen IV 2.9 nojalla on olemassa sellainen kuvaus $\varphi : \mathcal{P}(V_G \smallsetminus V_T) \to \mathcal{R}(G)$, että jokaisella $V \in \mathcal{P}(V_G \smallsetminus V_T)$ on voimassa $\{Q \in \mathcal{R}(G) : Q \smallsetminus V_T = V\} = \{\varphi(V)\}$. Kuvaus φ on selvästikin injektio, mutta se on myös surjektio, sillä Lauseen IV 2.9 nojalla jokaiselle $Q \in \mathcal{R}(G)$ pätee, että $Q = \varphi(Q \smallsetminus V_T)$. Näinollen kuvaus φ on bijektio ja on voimassa $|\mathcal{R}(G)| = |\mathcal{P}(V_G \smallsetminus V_T)| = 2^{|V_G \smallsetminus V_T|}$. Koska Lauseen IV 1.3 nojalla on voimassa $|V_G \smallsetminus V_T| = v_G - v_T = v_G - (p_T - 1) = v_G - p_G + 1$, niin saamme seuraavan tuloksen.

IV 2.11 Korollaari *Yhtenäiselle verkolle G on voimassa*

$$\boxed{|\mathcal{R}(G)| = 2^{v_G - p_G + 1}}$$

3. Suunnatut puut.

Puita esiintyy mitä erilaisimmissa yhteyksissä (sukupuut, etsintäpuut,...). Usein puun kaikki pisteet eivät ole tarkastelun kannalta samanarvoisia, vaan joku niistä on valittu "alkupisteeksi" (yhteinen esi–isä tai –äiti, etsinnän alkutilanne,...). "Alkupisteen" valinnan lisäksi on käytännössä esiintyvissä puissa usein myös määrätty puun viivoille suunnistus ja tällöin puu tulisi itse asiassa esittää suhteikkona, jolla on "alkupiste" juurena ja jossa nuolet osoittavat "alkupisteestä poispäin". Seuraavassa lauseessa osoitamme, että kyseisenlainen suunnistus määräytyy yksikäsitteisesti puun rakenteen ja "alkupisteen" valinnan nojalla.

Olkoon a puun T piste. Koska T on yhtenäinen ja renkaaton, Lause III 4.1 osoittaa, että T:llä on sellainen yksisuuntaistus $\vec{T}$, että piste a on suhteikon $\vec{T}$ juuri ja Lause III 4.3 osoittaa, ettei piste a ole minkään muun T:n yksisuuntaistuksen juuri. Näin ollen saamme seuraavan tuloksen.

IV 3.2 Lause *Olkoon a puun T piste. Tällöin T:llä on täsmälleen yksi sellainen yksisuuntaistus $\vec{T}$, että a on $\vec{T}$:n juuri.*

Lauseen IV 4.1 todistus antaa menetelmän edellisen lauseen yksikäsitteiseksi osoittaman yksisuuntaistuksen löytämiseksi: viiva $v \in V_T$ korvataan sillä nuolella $\overrightarrow{xy}$, jolle pätee, että $\overline{xy} = v$ ja piste x on verkossa T "lähempänä" pistettä a kuin piste y. Havainnollisempi tapa kyseisen yksisuuntaistuksen löytämiseksi on seuraava: otamme puusta kiinni pisteen a kohdalta ja ravistelemme, kunnes kaikki puun viivat roikkuvat pystysuorassa; tämän jälkeen suuntaamme viivat siten, että kaikki nuolet osoittavat alaspäin.

Seuraavassa käytämme merkintää $\vec{T}_{(a)}$ sille puun T yksisuuntaistukselle, jolla on piste a juurena. Kutsumme muotoa $\vec{T}_{(a)}$ olevia suhteikkoja suunnatuiksi puiksi.

IV 3.3 Määritelmä *Suunnattu puu* on sellainen yksisuuntainen juurellinen suhteikko J, että J:tä vastaava symmetrinen suhteikko J^s on puu.

Suunnatusta puusta käytämme yleensä muotoa $\vec{T}$ olevaa merkintää, jolloin T tarkoittaa jotain puuta ja $\vec{T}$ jotain sen juurellista yksisuuntaistusta. Panemme merkille, että suunnatulla puulla on vain yksi juuri: tämä seuraa yksisuuntaisuudesta sekä siitä tuloksesta (Lause IV 1.8), että puun pisteestä toiseen on olemassa vain yksi yksinkertainen kulku.

Termi “juuri” on verraten vakiintunut. Huolimatta tähän terminologiaan liittyvistä mielikuvista, suunnatut puut kuvataan usein siten, että “juuri” tulee piirrettävän kuvion ylimmäiseksi pisteeksi.

Otamme nyt käyttöön lisää suunnattuihin puihin liittyvää havainnollista sanastoa.

IV 3.3 Määritelmä Suunnatun puun $\vec{T}$ piste b on $\vec{T}$:n *lehti*, mikäli $d^-_{\vec{T}}(b) = 0$.

Olkoon a suunnatun puun $\vec{T}$ juuri. Näemme helposti, että a on $\vec{T}$:n lehti jos ja vain jos a on $\vec{T}$:n ainoa piste. Lukija voi harjoitustehtävänä osoittaa, että jos $\vec{T}$:llä on a:n lisäksi muitakin pisteitä, niin sen piste b on lehti jos ja vain $b \neq a$ ja b on T:n lehti. Näiden tulosten ja Lauseen IV 1.6 nojalla saamme seuraavan tuloksen.

IV 3.4 Lause *Jokaisella suunnatulla puulla on ainakin yksi lehti.*

Usein on tarpeellista arvioida suunnatun puun lehtien lukumäärää puun muiden ominaisuuksien avulla tai, kääntäen, arvioida muita puuhun liittyviä suureita lehtien lukumäärän avulla. Määrittelemme nyt eräitä suunnattuihin puihin liittyviä tunnuslukuja.

Panemme merkille, että jokaisella suunnatun puun $\vec{T}_{(a)}$ pisteellä c, suhteikossa $\vec{T}_{(a)}$ on yksinkertainen kulku $\bar{x} = (x_0, ..., x_k)$ juuresta a pisteeseen c ja koska $\bar{x}$ on kulku myös puussa T, niin Lauseen IV 1.8 tuloksesta seuraa, että $\bar{x}$ on ainoa kulku suhteikossa $\vec{T}_{(a)}$, jolla on vaadittu ominaisuus; tämä osoittaa, että voimme yksikäsitteisesti määritellä pisteen c korkeuden $T_{(a)}$:ssa.

IV 3.5 Määritelmä Olkoon $\vec{T}$ suunnattu puu ja olkoon a sen juuri.

A. $\vec{T}$:n piste c on *korkeudella* k $\vec{T}$:ssa, mikäli suhteikossa $\vec{T}$ on yksinkertainen kulku $\bar{x} = (x_0, ..., x_k)$ juuresta a pisteeseen c.

B. $\vec{T}$:n n:s *taso* on joukko $\{c \in P_T : c \text{ on korkeudella } n\ \vec{T}\text{:ssa}\}$.

C. $\vec{T}$:n *korkeus* on suurin luvuista k, joilla $\vec{T}$:n k:s taso on epätyhjä.

D. $\vec{T}$:n *haaraisuus* on suurin luvuista $d^-_{\vec{T}}(c)$, missä c on T:n piste.

Esitämme nyt epäyhtälön, joka vallitsee suunnatun puun lehtien lukumäärän ja edellä määriteltyjen tunnuslukujen välillä.

IV 3.6 Lause *Olkoon suunnatun puun $\vec{T}$ pisteiden lukumäärä p, korkeus k, haaraisuus h ja lehtien lukumäärä l. Tällöin on voimassa*

$$\boxed{lh \leq p(h-1)+1 \leq h^{k+1}}$$

Todistus. Olkoon a $\vec{T}$:n juuri. Epäyhtälöt toteutuvat triviaalisti, jos $\vec{T}$:ssa ei ole muita pisteitä kuin a. Merkitsemme $P_{\vec{T}} = P$ ja oletamme, että $P \neq \{a\}$.

Merkitsemme jokaisella $n \in \mathbb{N}$, L_n:llä $\vec{T}$:n n:ttä tasoa. Osoitamme induktiolla n:n suhteen, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on voimassa $|L_n| \leq h^n$. Koska $L_0 = \{a\}$, niin epäyhtälö toteutuu n:n arvolla 0. Oletamme, että $n > 0$ ja epäyhtälöt on jo todistettu arvolle $n-1$. Jokainen joukon L_n alkio on jonkun joukon L_{n-1} alkion seuraaja suhteikossa $\vec{T}$: jos $s \in L_n$ ja jos $\bar{x} = (x_0, ..., x_n)$ on yksinkertainen kulku a:sta s:ään, niin $x_{n-1} \in L_{n-1}$ ja $x_n = s$ on x_{n-1}:n seuraaja $\vec{T}$:ssa. Jokaisella $t \in L_{n-1}$, pisteen t seuraajien lukumäärä $d^-_{\vec{T}}(r)$ on pienempi tai yhtäsuuri kuin luku h. Näinollen on voimassa $|L_n| \leq |L_{n-1}| \cdot h$; koska induktio–oletuksen nojalla pätee, että $|L_{n-1}| \leq h^{n-1}$, niin saadaan vaadittu epäyhtälö $|L_n| \leq h^n$.

Koska $k = \max\{n \in \mathbb{N} : L_n \neq \emptyset\}$, niin on voimassa $P = \bigcup_{n=0}^{k} L_n$ ja täten edelleen

$$p = |P| = \Sigma_{n=0}^{k}|L_n| \leq \Sigma_{n=0}^{k} h^n = \frac{1-h^{k+1}}{1-h}.$$

Tästä saadaan lauseen oikeanpuolinen epäyhtälö $p(h-1)+1 \leq h^{k+1}$.

Suhteikon $\vec{T}$ nuolien lukumäärä, eli puun T viivojen lukumäärä v_T, voidaan Lemman II 2.1 nojalla esittää muodossa $v_T = \Sigma_{x \in P} d^-_{\vec{T}}(x)$. Merkitään L:llä $\vec{T}$:n lehtien muodostamaa joukkoa. Koska jokaisella $x \in L$ on voimassa $d^-_{\vec{T}}(x) = 0$, niin edellinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $v_T = \Sigma_{x \in P \smallsetminus L} d^-_{\vec{T}}(x)$. Koska jokaisella $x \in P$ on voimassa $d^-_{\vec{T}}(x) \leq h$, niin viimeisestä yhtälöstä seuraa epäyhtälö $v_T \leq |P \smallsetminus L| \cdot h$. Pannaan merkille, että $|L| = l$ ja $|P \smallsetminus L| = |P| - |L| = p - l$; tästä seuraa, että $v_T \leq (p-l)h$. Lauseen IV 1.3 nojalla on voimassa $v_T = p_T - 1$ eli $v_T = p - 1$. Edelläesitetystä seuraa epäyhtälö $p - 1 \leq (p-l)h$ eli lauseen vasemmanpuolinen epäyhtälö. □

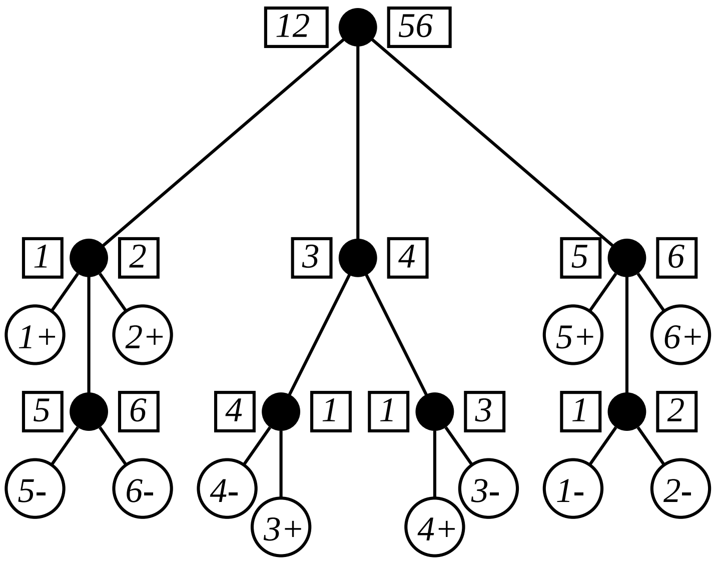
IV 3.7 Korollaari *Olkoon suunnatun puun $\vec{T}$ korkeus k, haaraisuus h ja lehtien lukumäärä l. Tällöin on voimassa*

$$\boxed{l \leq h^k}$$

Edellisiä epäyhtälöitä voidaan käyttää hyväksi mm. etsintäpuiden yhteydessä:

IV 3.8 Esimerkki Niin kutsutussa *väärän kolikon ongelmassa* pitää etsiä annetusta kolikkojoukosta mahdollinen väärä raha kun tiedetään, että väärä kolikko on eripainoinen kuin oikeat, keskenään samanpainoiset, kolikot. Apuvälineenä on tasavarsivaaka, joka näyttää joko punnittavien samanpainoisuuden tai eripainoisten punnittavien painojärjestyksen.

Ongelmasta on monta versiota, mutta tässä tarkastelemme vain yhtä yksinkertaista tapausta: tiedämme, että kuuden kolikon joukossa on yksi väärä raha ja tehtävänä on selvittää, mikä on väärä kolikko ja onko se painavampi vai kevyempi kuin muut. Tehtävä voidaan ratkaista kolmella punnituksella: seuraavassa kuvattu puu osoittaa, miten voidaan menetellä. Tutkittavat kolikot on numeroitu $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Puun mustalla merkityt pisteet vastaavat punnituksia ja niiden viereen on merkitty vaakakuppien sisältö; punnituksen jälkeen haaraudutaan alaoikealle, jos oikeanpuoleisen vaakakupin sisältö osoittautuu painavammaksi kuin vasemmanpuoleisen; alavasemmalle, jos vasemmanpuoleisen kupin sisältö osoittautuu painavammaksi kuin oikeanpuoleisen; suoraan alaspäin, jos kuppien sisällöt osoittautuvat samanpainoisiksi. Puun lehdet vastaavat "etsinnän" lopputulosta: niihin on merkitty vääräksi osoittautuneen kolikon numero ja sen perään merkki "+", jos väärä kolikko oli oikeita painavampi ja merkki "-", jos väärä kolikko oli oikeita kevyempi.



Korollaarin IV 3.7 tuloksesta seuraa, että kaksi punnitusta ei aina riitä väärän kolikon löytämiseen kuuden kolikon joukosta ja sen painon poikkeamissuunnan määrittämiseen. Mahdollisia lopputuloksia on kaksitoista ja kuhunkin etsintämenetelmään liittyvän suunnatun puun haaraisuus on korkeintaan kolme; jos jossakin menetelmässä selvittäisiin kahdella punnituksella, niin vastaavan suunnatun puun korkeus olisi kaksi, joten sen lehtien lukumäärä olisi korkeintaan yhdeksän.

Harjoitustehtäviä lukuun IV

1. Esitä kaikki (isomorfiaa vaille) erilaiset n–pisteiset puut kun $n = 7$ ja kun $n = 8$.

2. Osoita, että jokainen puu on kaksijakoinen verkko.

3. Olkoon k luonnollinen luku ja olkoon T sellainen puu, että jokaisen T:n pisteen aste on joko 1 tai k. Merkitään p:llä T:n pisteiden lukumäärää ja l:llä T:n lehtien lukumäärää.
   (a) Osoita, että jos $k = 3$, niin luku p on parillinen ja on voimassa $l = \frac{p}{2} + 1$.
   (b) Osoita, että jos $k \geq 3$, niin $l > \frac{p}{2}$.

4. Olkoon T puu, jonka pisteet ovat korkeintaan 4 asteisia. Laske 3–asteisten pisteiden lukumäärä, kun tiedetään, että 1–asteisia pisteitä on 6, 2–asteisia 1 ja 4–asteisia 1.

5. (a) Näytä, että 10-pisteisessä paritonasteisessa puussa on ainakin kuusi lehteä.
   (b) Anna esimerkki 10-pisteisestä paritonasteisesta puusta, jonka lehtien lukumäärä on kuusi.

6. Olkoon G täydellinen neljän pisteen verkko ja olkoon $W \subset V_G$ 3-joukko. Osoita, että joko W on G:n rengas tai W on G:n virittävän puun viivojen joukko.

7. Korollaarin IV 2.11 tuloksesta seuraa, että yhtenäisen verkon G renkaiden lukumäärä on yksi jos ja vain jos G:llä on yhtä monta pistettä kuin viivaa; luonnehdi tällaisia verkkoja G renkaiden ja puiden avulla.

8. Luonnehdi renkaiden avulla niitä kahdesti yhtenäisiä verkkoja G, joilla
   (a) $v_G = p_G$.
   (b) $v_G = p_G + 1$.

9. Olkoon G yhtenäinen verkko. Verkon G *leikkausjoukko* on sellainen osajoukko $Q \subseteq V_G$, jolla verkko $G - Q$ on epäyhtenäinen. Olkoon T G:n virittävä puu. Osoita, että jokainen G:n leikkausjoukko sisältää ainakin yhden T:n viivan.

10. Olkoon T puu, jossa on ainakin kaksi pistettä, joiden aste on suurempi kuin kaksi. Mikä on T:n lehtien pienin mahdollinen lukumäärä?

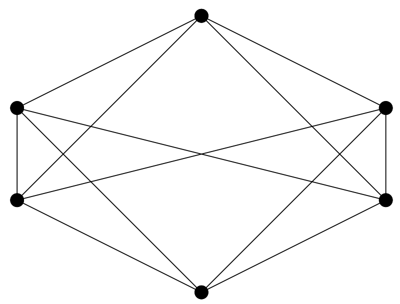
11. Olkoot T ja T' puita, joilla ei ole yhteisiä viivoja. Näytä, että verkko $T \vee T'$ on puu jos ja vain jos puilla T ja T' on täsmälleen yksi yhteinen piste.

12. Olkoon T n–pisteinen puu. Mikä on T:n lehtien pienin ja suurin mahdollinen lukumäärä?

13. Näytä, että jos puussa T on k–asteinen piste, niin T:ssä on ainakin k lehteä.

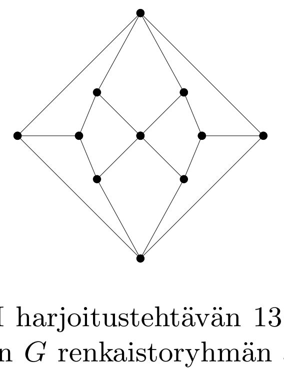
14. Näytä, että jokaiselle verkolle G pätee, että $v_G \geq p_G - k$, missä k on G:n komponenttien lukumäärä, ja että yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos G on renkaaton. [*Ohje jälkimmäiseen kohtaan*: Tarkastele G:n komponentteja.]

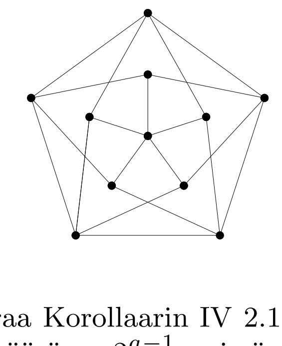
15. Määritä alla kuvatun verkon virittävien puiden lukumäärä.



16. Etsi verkon G:
    a : b c d   b : a d   c : a d   d : a b c
    virittävät puut.

17. Alla vasemmalla on kuvattu *Herschelin verkko* ja oikealla *Grötzschin verkko.* Selvitä kummankin verkon tapauksessa, onko verkolla kahta virittävää puuta, joilla ei ole yhteisiä viivoja.





18. Luvun III harjoitustehtävän 13 tuloksesta seuraa Korollaarin IV 2.11 nojalla, että tasoverkon G renkaistoryhmän alkioiden lukumäärä on 2^{a-1}, missä a on G:n määräämien tasoalueiden lukumäärä. Johda tästä Korollaarin IV 2.11 avulla seuraava tulos: Olkoon G yhtenäinen tasoverkko, jolla on p pistettä, v viivaa ja a aluetta. Tällöin on voimassa

$$p - v + a = 2 \qquad \textit{(Eulerin kaava)}$$

19. Johda Eulerin kaavan avulla yhtälö avaruuden monitahokkaan kärkien, särmien ja tahkojen lukumäärien välille.

20. Laske Petersenin verkon renkaiden lukumäärä.

    [*Ohje*: Korollaari IV 2.11 ja Luvun III harjoitustehtävät 8 ja 9.]

21. Olkoon S yksisuuntainen suhteikko, jolla on juuri a. Osoita, että S on suunnattu puu jos ja vain jos $d_S^+(a) = 0$ ja $d_S^+(b) = 1$ jokaisella $b \in P_S \setminus \{a\}$.

22. Näytä edellisen tehtävän tuloksen avulla, että jos suunnatulla puulla $\vec{T}$:llä on juuren a lisäksi muitakin pisteitä, niin piste b on $\vec{T}$:n lehti jos ja vain $b \neq a$ ja b on puun T lehti.

23. Olkoon suunnatun puun $\vec{T}$ haaraisuus h ja lehtien lukumäärä ℓ ja olkoon r $\vec{T}$:n haarautumispisteiden lukumäärä (eli niiden pisteiden lukumäärä, jotka eivät ole lehtiä). Osoita, että on voimassa $r \geq \frac{\ell-1}{h-1}$.

24. Olkoon $\vec{T}$ suunnattu puu, jonka jokaisella haarautumispisteellä on d seuraajaa. Näytä, että $\vec{T}$:n haarautumispisteiden lukumäärä r ja lehtien lukumäärä ℓ toteuttavat ehdon
$$(d-1)r = \ell - 1.$$

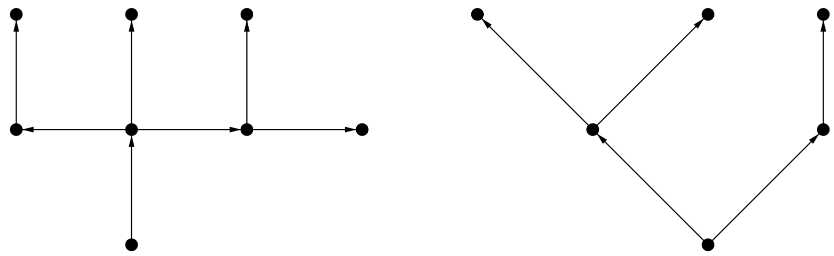
25. Olkoon n luonnollinen luku. Osoita, että on olemassa n–pisteinen suunnattu puu, jonka jokaisella haarautumispisteellä on täsmälleen kaksi seuraajaa, jos ja vain jos n on pariton.

26. Yksi kahdestatoista kolikosta on väärä ja eroaa muista painoltaan (kevyempi tai painavampi). Montako punnitusta tasavarsivaa'alla tarvitaan väärän kolikon löytämiseksi ja sen laadun selvittämiseksi?

27. Olkoon $n \in \{1, 2, \ldots, 40\}$. Tehtävänä on määrittää n kysymyksillä, jotka ovat tyyppiä "onko $n \leq a$?" jollakin $a \in \mathbb{N}$. Montako kysymystä tarvitaan?

    Suunnatun puun $\vec{T}$ *Matula–luku* $M(\vec{T})$ määritellään rekursiivisesti puun korkeuden $k(\vec{T})$ suhteen seuraavalla tavalla. Olkoon a $\vec{T}$:n juuri. Jos $k(\vec{T}) = 0$ eli jos $\vec{T}$:llä ei ole a:n lisäksi mitään muita pisteitä, niin asetetaan $M(\vec{T}) = 1$. Oletetaan, että $k(\vec{T}) > 0$ ja että $M(S)$ on jo määritelty kaikille niille suunnatuille puille $\vec{Y}$, joilla $k(\vec{Y}) < k(\vec{T})$. Merkitään N_a:lla pisteen a seuraajien muodostamaa joukkoa ja pannaan merkille, että joukon $P_{\vec{T}} \setminus \{a\}$ virittämä aliverkko on esitettävissä muodossa $\bigvee_{b \in N_a} S_b$, missä S_b on kyseisen aliverkon pisteen b yhtenäinen komponentti. Jokaisella $b \in N_a$, suhteikon $\vec{T}$ alisuhteikko S_b on suunnattu puu, jolle on voimassa $k(S_b) < k(\vec{T})$; täten luku $M(S_b)$ on määritelty. Nyt määritellään luku $M(\vec{T})$ tulona, jonka tekijöinä ovat luvut $p(M(S_b))$, $b \in N_a$; tässä merkintä $p(i)$ tarkoittaa i:nnettä alkulukua, siis i:nnettä lukua jonossa $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \ldots$

28. Laske seuraavien suunnattujen puiden Matula–luvut.



29. Konstruoi sellaiset suunnatut puut $\vec{T}$ ja $\vec{Y}$, että $M(\vec{T}) = 7$ ja $M(\vec{Y}) = 12$.