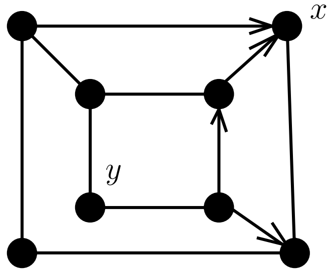
Verkot, syksy 2015
Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 18.12.2015.
Ratkaisut

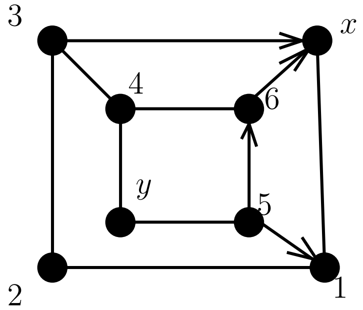
HUOM Kokeessa piti valita vapaasti 5 tehtävää seitsemästä.

1. Olkoon G seuraava suhteikko:



a) Osoita, että G:ssä on olemassa tasan kaksi sellaista Hamiltonin kulkua, joka alkaa pisteestä x.
b) Onko G:ssä olemassa Hamiltonin kulkua, joka alkaa pisteestä y? Onko se yksikäsitteinen?

Ratkaisu: Nimitetään solmut:



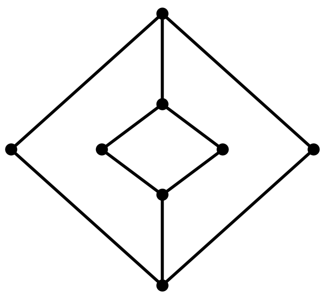
a) Konstruoidaan Hamiltonin kulku, joka alkaa pisteestä x. Tämän pisteen jälkeen voi mennä seuraavaksi vain pisteeseen 1. Pisteestä 1 on nuolia pisteisiin x ja 2, mutta takaisin alkupisteeseen x ei tietystikään voi mennä, joten seuraavaksi pakko mennä pisteeseen 2 ja sen jälkeen välttämättä pisteeseen 3. Kolmosesta pääsee taas joko alkupisteeseen x, mikä ei käy, tai pisteseen 4. Pisteestä 4 pääsee joko pisteeseen y tai pisteeseen 6. Jos mennään pisteeseen 6 seuraavaksi voidaan jatkaa vain alkupisteeseen x, mikä ei käy, koska kaikissa pisteissä ei vielä käyty. Näin ollen on pakko mennä seuraavaksi pisteeseen y ja sen jälkeen pisteeseen 5. Viitosesta pääsisi joko pisteeseen 1, mutta siinä käytiin jo, tai pisteeseen 6, joka on näin ollen ainoa vaihtoehto tässä vaiheessa. Saadaan siis kulku $(x, 1, 2, 3, 4, y, 5, 6)$, jossa esiintyvät kaikki suhteikon pisteet tasan kerran, eli tässä on jo Hamiltonin kulku. *Se ei kuitenkaan ole ainoa*, koska pisteestä 6 voidaan vielä jatkaa alkupisteeseen x, jolloin saadaan *Hamiltonin kierros* $(x, 1, 2, 3, 4, y, 5, 6, x)$. Tämä on toinen Hamiltonin kulku, joka alkaa pisteestä x. Välivaiheista seuraa, että muita ei ole.

Tyypillinen virhe: Ei huomata mahdollisuutta sulkea kulku kierrokseksi ja väitetään, että tehtävänannossa on virhe, ja kulkuja on vain yksi.
Tarinan opetus: Luota opettajaan! :) Sitä paitsi kokeessa ei ollut pakko tehdä kaikki tehtävät, joten tällaisessa tapauksessa, kun vastaus ei täsmääkään väitteen kanssa, kannattaa ehkä valita muita tehtäviä kaiken varalta... Lisäksi kokeessa oli opettaja paikalla valvomassa, jos epäile, että tehtävänannossa on virhe, voi aina KYSYÄ paikan päällä.

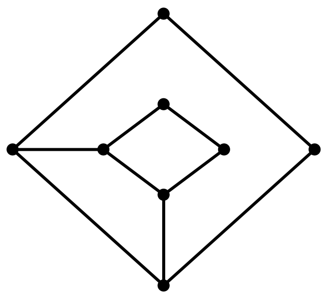
b) Ei ole vaikeata keksiä erilaisia Hamiltonin kulkuja jotka alkavat pisteessä y, esimerkiksi $(y, 5, 1, 2, 3, 4, 6, x)$, $(y, 5, 6, x, 1, 2, 3, 4)$ tai $(y, 5, 6, x, 1, 2, 3, 4, y)$ (tämä on samalla kierros), erityisesti kulku on olemassa ja ei ole yksikäsitteinen.

Toisaalta b)-kohdan kysymykseen voi helposti vastata myös hyödyntämällä suoraan a)-kohdan ratkaisua. Nimittäin yllä on osoitettu, että on olemassa Hamiltonin *kierros* joka alkaa pisteestä x. Mutta kierros voidaan ajatella alkavan mistä tahansa pisteestään, sopivasti uudestaan määriteltynä, joten tästä seuraa suoraan, että on olemassa Hamiltonin kierros, joka alkaa pisteestä y. Ottamalla tästä kierroksesta pois viimeinen piste (eli y) saadaan toinen Hamiltonin kulku, joka alkaa pisteestä y (joka ei ole kierros). Näin ollen kysytty H. kulku on olemassa ja ei ole yksikäsitteinen.

2. Tutki, ovatko alla olevassa kuvassa annetut verkot G ja G' isomorfisia.



Verkko G



Verkko G'

Ratkaisu: Ylivoimaisen suosituin ja kenties yksinkertaisin ratkaisutapa on seuraava. Verkossa G jokaisen 3-asteisen pisteen naapureiden asteet ovat $3, 2, 2$, kun taas verkossa G' jokaisen 3-asteisen pisteen naapureiden asteet ovat $3, 3, 2$. Näin ollen verkot eivät ole isomorfisia.

Muita lähestymistapoja (esitetään idean tasolla):

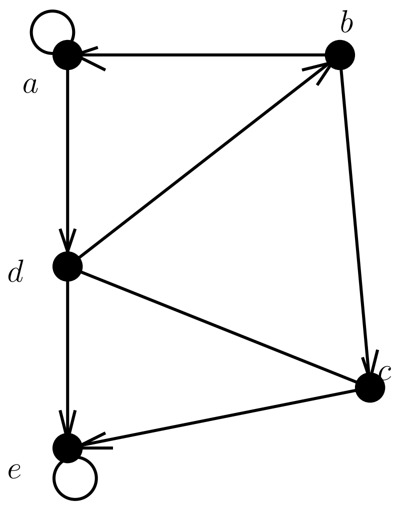
- Verkossa G jokaisen 2-asteisella pisteella on 3-asteinen naapuri, verkossa G' näin ei ole.
- Verkossa G' on Hamiltonin kierros, mutta verkossa G ei ole.
- Verkossa G 3-asteiset pisteet virittävät epäyhtenäisen aliverkon, verkossa G' 3-asteiset pisteet virittävät yhtenäisen aliverkon (joka on erään renkaan määrittämä).

3. Olkoon G suhteikko, jonka solmujoukko on $\{a, b, c, d, e\}$ ja jonka solmujen seuraajaluettelot ovat

$$a : a, d; \;\; b : a, c; \;\; c : d, e; \;\; d : b, c, e; \;\; e : e$$

a) Piirrä kaavio suhteikosta G ja tutki onko G yhtenäinen. Perustele vastauksesi!
b) Määritä suhteikon G vahvasti yhtenäiset komponentit. Perustele vastauksesi!

Ratkaisu: a) Suhteikko kaavion muodossa:



Suhteikko G on yhtenäinen. Tämän voi perustella monella eri tavalla:

- Suhteikosta löytyy kulku, joka käy sen jokaisessa pisteessä, esim. (a, d, b, c, e), joka on itse asiassa jopa Hamiltonin kulku.
- Suhteikon symmetrinen sulkeuma on yhtenäinen - oleellisesti samasta syystä.

b) Aloitetaan huomaamalla, että pisteen e vahvasti yht. komponentissa H_1 ei ole muita pisteitä kuin e itse. Nimittäin oletetaan, että joku toinen piste x on myös samassa koponentissa H_1. Tällöin $P = \{e\}$ on tämän komponentin H_1 solmujoukon aito epätyhjä osajoukko. Koska H_1 on vahvasti yhtenäinen, suhteikossa H_1 on oltava nuoli joukosta P sekä nuoli joukkoon P. Mutta koko suhteikossa G ei ole yhtäkään nuolta joukosta $P = \{e\}$. Näin ollen H_1:ssä ei voi olla muita pisteitä kuin e. Tarkemmin sanottuna H_1 on pistejoukon $\{e\}$ virittämä alisuhteikko. Sen ainoa nuoli on silmukka e:ssä.

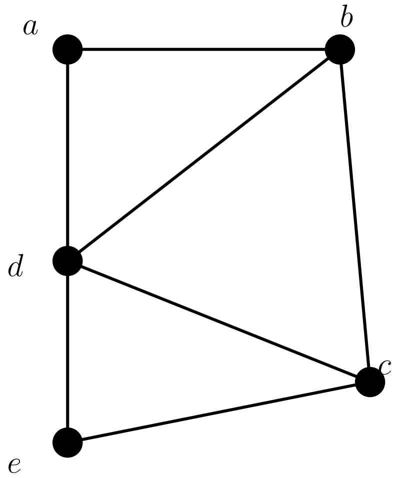
Jäljellä pisteet a, b, c, d. Osoitetaan, että ne muodostavat toisen vahv. yhtenäisen komponentin H_2. Huomataan, että suhteikossa on kierros (a, d, b, a), joten sen pisteet a, b, d kuuluvat samaan vahvasti yhtenäiseen komponenttiin. Lisäksi on olemassa kierros (d, b, c, d), joten myös pisteet b, c, d kuuluvat samaan vahvasti yhtenäiseen komponenttiin. Koska sama piste ei voi kuulua kahteen eri komponenttiin, tästä seuraa, että kaikki pisteet a, b, c, d ovat samassa komponentissa H_2. Tämä on välttämättä niiden virittämä, koska muita pisteitä siinä ei voi olla - piste e todettiin jo olevan eri komponentissa.

Tyypilliset puutteet ratkaisuissa:

- Annetaan oikeat vastaukset, mutta ei perustella niitä kunnolla tai lainkaan.
- Annetaan komponentti pistejoukkona eika suhteikkona.
- Unohdetaan silmukasta, esimerkiksi pisten e komponentin kohdalla väitetään, että sen nuolijoukko on tyhjä, vaikka siinä on silmukka.

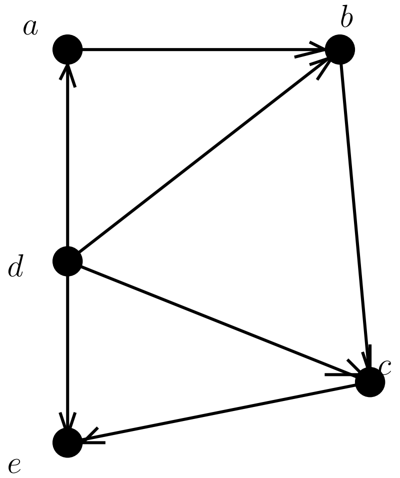
4. Olkoon G kuten edellisessä tehtävässä ja olkoon G' verkko, joka saadaan G:n symmetrisestä sulkeumasta poistamalla siitä kaikki silmukat.
a) Onko G':ssa Eulerin kierros/kulku?
b) Keksi G':lle sellainen yksisuuntaistus, jonka jokainen vahvasti yhtenäinen komponentti sisältää korkeintaan kaksi pistettä, tai osoita, että sellaista ei ole olemassa. Myönteisessä tapauksessa riittää antaa yksisuuntaistus kuvan muodossa.

Ratkaisu: Verkko G':



a) Verkko G' on yhtenäinen ja siinä on tasan kaksi paritonasteista pistettä (b ja c). Kurssin teoreettisten tietojen mukaan (Junnila, Lauseet III 3.5-3.6) verkossa ei tällöin ole Eulerin kierrosta, mutta on Eulerin kulku.

b) Vaadittu yksisuuntaistus on olemassa, tässä on esimerkki tällaisesta:

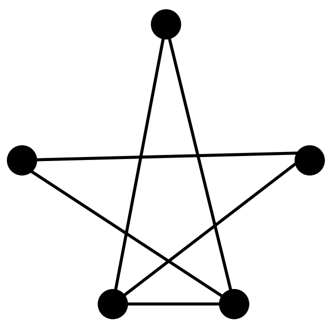


Tämä ei ole suinkaan ainoa toimiva esimerkki, vaan niitä on hyvin paljon. Tässä suhteikossa jokaisen vahv. yht. komponentin solmujoukko on yksiö. Tämä pätee itse asiassa kaikissa mahdollisissa esimerkkeissä, sillä yksisuuntaisen suhteikon mikään vahv. yht. komponentti ei voi sisältää tasan kahta solmua.

Tehtävässä tosiaankin riitti antaa toimiva esimerkki ilman perusteluja. Perustellaan vielä kuitenkin miksi yllä annetussa yksisuuntaistuksessa vahv. yht. komponenttien solmujoukot ovat yksiöitä. Ensin huomataan, että pisteeseen d ei saavu yhtään nuolta ja pisteestä e ei lähde mitään nuolia. Tästä seuraa samalla tavalla kuten edellisen tehtävän ratkaisuissa, että kumpikin piste on vahv. yht. komponentinsa ainoa piste. Pisteestä c lähtee nuoli vain pisteeseen e, tästä seuraa, että pisteen c vahv. yht. komponentissa ei voi olla muita pisteitä kuin c. Nimittäin olkoon x jokin toinen tämän komponentin piste. Tällöin on olemassa kierros, joka sisältää c:n ja x:n ja alkaa vaikkapa c:stä. Koska ainoa c:stä alkava nuoli menee e:hen, tämä kierros alkaa tästä nuolesta, jolloin e esiintyy kierroksessa myös. Tästä seuraisi, että myös e on samassa komponentinsa kuin c, mikä tiedetään jo olevan epätotta. Näin ollen c on ainoa komponentinsa solmu. Samalla tavalla sen jälkeen päätetään, että b:n komponentissa on vain b itse (koska siitä lähtee tasan yksi nuoli - pisteeseen c, joka on jo käsitelty), minkä jälkeen a:n komponentinkin on pakko myöskin olla triviaali.

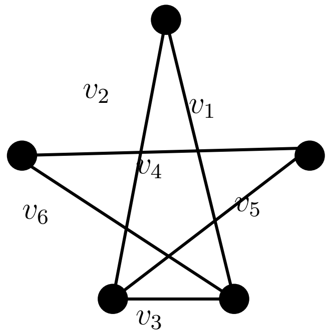
Toimivan esimerkin konstruonnissa kannattaa hyödyntää yllä mainittu tosiasia - jos solmun lähtö- tai tuloaste on nolla, niin tämän pisteen vahv. yht. komponentissa ei voi olla muita solmuja.

5. Olkoon G seuraava verkko:

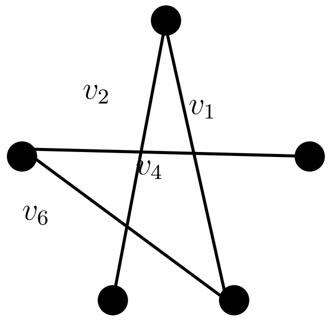


a) Keksi verkolle jokin virittävä puu T (riittää antaa puu).
b) Laske verkon perusrenkaat tämän puun T suhteen.
c) Määritä kaikki verkon G renkaat. Montako niitä on?

Ratkaisu: Nimitetään viivat:



a) Verkolla on hyvin paljon erillaisia virittäviä puita. Tässä on yksi esimerkki, joka saadaan poistamalla verkosta viivat v_3 ja v_5:



Tehtävässä ei tarvinnut kuin vaan antaa puu, ei tarvitse perustella, että se on virittävä puu. Jos perusteluja kaipaa, niin voidaan sanoa, että esitetty verkko on G:n aliverkko, joka sisältää kaikki sen pisteet, on yhtenäinen (mikä voidaan helposti osoittaa kulkujen avulla) ja sille pätee $4 = v_T = p_T - 1 = 5 - 1$.
b) Perusrenkaat a)-kohdassa esitetyn vir. puun suhteen ovat:

$$R(v_3, T) = \{v_1, v_2, v_3\},$$

$$R(v_5, T) = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6\}.$$

c)Koska G on yhtenäinen, sen *renkaistojen* lukumäärä on $2^{v_G - p_G + 1} = 2^2 = 4$. Niistä yksi on tyhjä renkaisto, joka ei tietystikään ole rengas ja kaksi ovat jo löydetyt perusrenkaat $R(v_3, T)$ ja $R(v_5, T)$. Jäljellä on vielä yksi renkaisto, joka on

$$R(v_3, T) \triangle R(v_5, T) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}.$$

Helposti nähdään, että tämä renkaisto on rengas, esimerkiksi esittämällä sykli, jonka viivajoukko se on. Näin ollen renkaita on tasan kolme.

Tyypilliset virheet/puutteet:

- Ei perustella miksi renkaita on juuri kolme. ”Kuvasta nähdään” ei hyväksytään perusteluksi.
- Lasketaan perusrenkaat väärin.
- Ei perustella miksi perusrenkkaiden symm. erotus c)-kohdassa on rengas, vaan oletetaan se itsestään selväksi. A priori perusrenkkaiden symm. erotus on renkaisto, mutta sen ei yleisesti ottaen tarvitse olla rengas.

6. Olkoon G yhtenäinen verkko ja $v \in V_G$. Osoita, että v kuuluu johonkin G:n renkaaseen jos ja vain jos verkko $G - v$ on yhtenäinen.

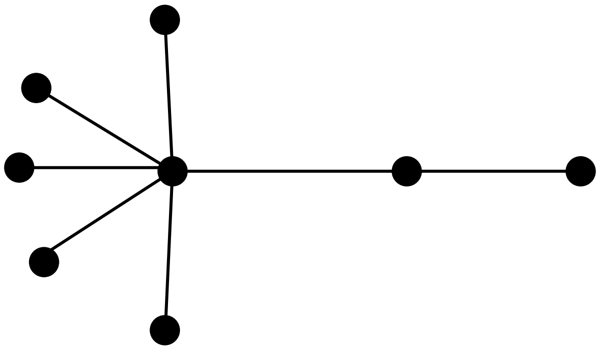
Ratkaisu: Oletetaan, että $v = \overline{ab}$ kuuluu renkaaseen $R = \{v, v_1, \ldots, v_n\}$, $n \geqslant 2$. Sykli, jonka viivajoukko on R, voidaan valita niin, että se alkaa pisteessä a ja lisäksi viiva v esiintyy siinä viimeisenä, toisin sanoen syklinä $(a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b, a)$. Tästä seuraa, että (yksinkertainen) kulku $(a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b)$ on kulku pisteestä a pisteeseen b jopa aliverkossa $G - v$. "Käänteiskulku" $(b, x_{n-1}, \ldots, x_1, a)$ on tällöin kulku $G - v$:ssä pisteestä b pisteeseen a.

Nyt ei ole vaikea osoittaa, että verkossa $G - v$ on olemassa kulku mistä tahansa pisteestä c mihin tahansa (toiseen) pisteeseen d, mistä verkon $G - v$ yhtenäisyys seuraa. Nimittäin yhtenäisessä verkossa G on olemassa kulku pisteestä c pisteeseen d. Jos tässä kulussa esiintyy viiva v, toisin sanoen joko askel $\overrightarrow{ab}$ tai askel $\overrightarrow{ba}$, jokainen tällainen esiintyminen voidaan korvata joko kululla pisteestä a pisteeseen b verkossa $G - v$ tai kululla pisteestä b pisteeseen a verkossa $G - v$ (kumpikin on löydetty yllä). Näin saadaan kulku c:stä d:hen verkossa $G - v$.

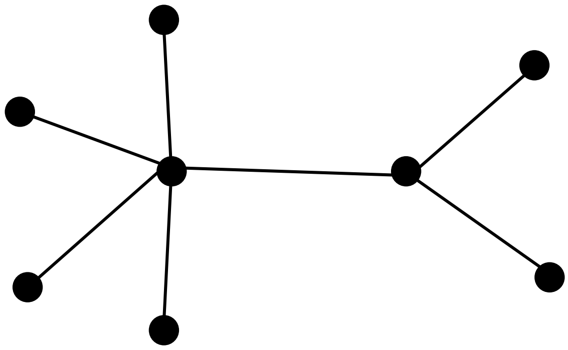
Oletetaan, että verkko $G - v$ on yhtenäinen. Tällöin siinä on olemassa kulku $(a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b)$ pisteestä a pisteeseen b ja voidaan olettaa, että tämä kulku on *yksinkertainen*. Tällöin $(a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b, a)$ on hyvin määritelty *sykli* verkossa G, jonka viivajoukko on tällöin rengas R, joka sisältää viivan v.

7. Kuinka monta isomorfiaa vaille erilaista 8 pisteen puuta, jolla on tasan 6 lehteä, on olemassa? Piirrä kaavio jokaisen isomorfialuokan edustajasta. **Vastaus ja (selkeät) piirrokset riittävät**.

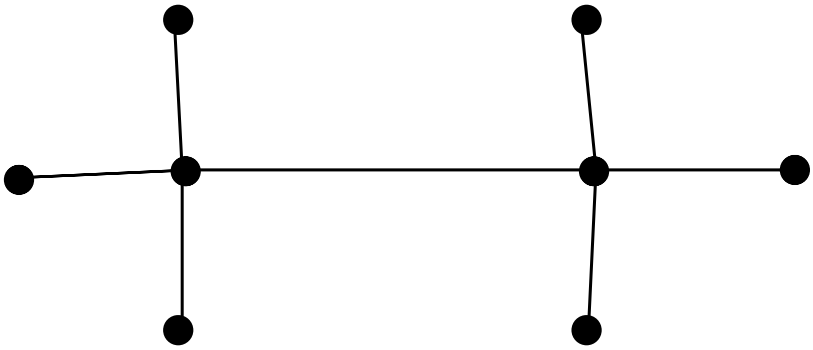
Ratkaisu: Puita on kolme kappaletta:



Verkko T_1

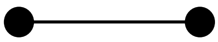


Verkko T_2



Verkko T_3

Tästä piiroksesta siis saa täydelliset pisteet ei asiaa tarvinnut perustella sen enempää.
Käydän kuitenkin vielä lyhyesti läpi mihin ratkaisu perustuu. Kun 8 pisteen puusta otetaan pois 6 lehtiä, saadaan kahden alkion puu, joka on oleellisesti seuraavan muotoinen:



Sen jälken on olemassa tasan kolme oleellisesti eri tapaa jakaa 6 lehtiä kahdelle alkiolle: $5-1$ (saadaan puu T_1), $4-2$ (saadaan puu T_2), $3-3$ (saadaan puu T_3). Lopuksi vielä kannattaa tarkistaa, että saadut puut eivät ole isomorfisia keskenään. Eivät ole, koska helposti nähdään, että niillä on kaikilla eri astejono kuin muilla.