”Verkot”. Kurssin tiivistelmä

Peruskäsitteet

- *Suhteikko* on määritelmän mukaan pari $G = (X, R)$, missä X on äärellinen joukko ja R jokin joukon X relaatio.
- Joukko X on tällöin suhteikon *pistejoukko* tai *solmujoukko*. Sitä merkitään myös P_G:llä ja sen alkioita sanotaan suhteikon G *pisteiksi* tai *solmuiksi*. Pisteiden lukumäärä merkitään myös p_G.
- R on suhteikon relaatio.
- Suhteikkoa sanotaan *symmetriseksi* jos R on symmetrinen relaatio.
- Suhteikko on *silmukaton* jos R on irrefleksiivinen.
- *Verkko* on silmukaton ja symmetrinen suhteikko.
- Suhteikon $G = (X, R)$ *symmetrinen sulkeuma* on symmetrinen suhteikko $G^s = (X, R \cup R^{-1})$, joka saadaan G:stä ”muuttamalla kaikki nuolet viivoiksi”. Suhteikko G^s on verkko jos ja vain jos G on silmukaton.
- Suhteikko on *yksisuuntainen* jos R on antisymmetrinen.
- Suhteikko on *täydellinen* jos se on silmukaton ja kaikilla $x, y \in P_G$, $x \neq y$ joko $(x, y) \in R$ tai $(y, x) \in R$.
- Täydellistä verkkoa, jossa on n pistettä merkitään K_n:llä.
- *Turnaus* on yksisuuntainen täydellinen suhteikko.
- *Kaksijakoinen verkko* on verkko, jonka pisteitä voidaan värittää kahdella värillä (”musta” ja ”punainen”) niin, että samanväriset pisteet eivät koskaan ole naapureita.
- Suhteikoille on määritelty yhdiste-operaatio, joka merkitään symbolilla $\bigvee$.

Nuolet ja viivat

- Merkinnät $(x, y) \in R$ ja yRx tarkoittavat samaa.
- Nuolen suunta kuvissa ja merkinnässä $\overrightarrow{yx}$ noudattaa järjestystä merkinnän yRx mukaan - y on nuolen alkupiste ja x nuolen loppupiste.

- Nuolen formaali joukko-opillinen määritelmä on

$$\overrightarrow{yx} = \{(x, y)\}.$$

- Suhteikon nuolten joukkoa merkitään N_G:llä. Nuolten lukumäärä merkitään n_G:llä.
- Pari (P_G, N_G) sisältää kaiken informaation suhteikosta G, joten käytännössä suhteikko voidaan määritellä antamalla joukot P_G ja N_G.
- Jokaista paria $(x, y) \in R$ vastaa nuoli $\overrightarrow{yx} \in N_G$ ja päinvastoin. Toisin sanoen relaation parit ja nuolet vastaavat toisiaan yksikäsitteisesti. Tästä seuraa, että $|N_G| = |R|$.
- Joukoissa R ja N_G on siis sama määrä alkioita. Kuitenkin itse joukot ovat eri joukkoja! Nuoli **ei ole** sama asia kuin vastaava relaation pari.
- *Viiva* on joukko-opillisesti kahden alkion joukko

$$\overline{yx} = \{(x, y), (y, x)\}.$$

- Kuvassa viiva $\overline{yx}$ korvaa kaksi nuolta $\overrightarrow{xy}$ ja $\overrightarrow{yx}$. Jokaista viivaa siis vastaa kaksi nuolta ja kaksi suhteikon relaation paria.
- Poikkeuksena on *silmukka* $\overline{xx} = \overrightarrow{xx}$. Jokainen silmukka on sekä nuoli, että viiva.
- Viivojen joukkoa merkitään V_G:llä, viivojen lukumäärää v_G:llä.
- Joukko $\overline{xy} \cap R$ on *yhteys* pisteiden x ja y välillä suhteikossa G. Tämä yhteys voi olla tyhjä (jolloin suhteikossa ei ole nuolta x:stä y:hyn eikä nuolta y:stä x:ään), nuoli $\overrightarrow{xy}$ tai viiva $\overline{xy}$.
- Kun suhteikossa on olemassa nuoli $\overrightarrow{xy}$, y on x:n *seuraaja* ja x on y:n *edeltäjä*.
- Kun suhteikossa on olemassa viiva $\overline{xy}$, solmuja x ja y sanotaan toistensa *naapureiksi*

Esitystavat

- Geometrinen kaavio.
- Seuraajaluettelot.
- Matriisiesitykset - yhteysmatriisi, insidenssimatriisi, verkkoinsidenssimatriisit.

Alisuhteikot

- Suhteikko $H = (Y, R')$ on suhteikon $G = (X, R)$ *alisuhteikko*, jos $Y \subset X$ and $R' \subset R$.
- Alisuhteikko, joka on suhteikkona verkko, on *aliverkko*.
- Jokainen suhteikon G pistejoukon P_G osajoukko $A \subset P_G$ *virittää* alisuhteikon $G[A]$. Tämän alisuhteikon pistejoukko on A ja nuoliksi otetaan kaikki mahdolliset G:n nuolet, joiden alku- ja loppupisteet ovat joukossa A.
- Mielivaltainen alisuhteikko ei välttämättä ole pistejoukkonsa virittämä.

- Vastaavasti jokainen suhteikon G nuolijoukon N_G osajoukko $B \subset N_G$ *virittää* alisuhteikon $G(B)$. Tämän suhteikon nuolijoukko on B ja pistejoukon muodostavat kaikki B:n alkioiden alku-ja loppupisteet.

- Samalla tavalla voidaan puhua viivajoukon virittämästä aliverkosta. Tällaisia verkkoja tulee vastaan esim. renkaistojen teorian yhteydessä.

Asteet

- Pisteen $x \in G$ *tuloaste* $d_+(x)$ on siihen saapuvien nuolten lukumäärä, $d_+(x) = |R(x)|$. Tämä on sama kuin x:n edeltäjien lukumäärä.

- Pisteen $x \in G$ *lähtöaste* $d_-(x)$ on siitä lähtevien nuolten lukumäärä, $d_-(x) = |R^{-1}(x)|$. Tämä on sama kuin x:n seuraajien lukumäärä.

- Lemma II 2.1 :
$$\sum_{x \in G} d_+(x) = n_G = \sum_{x \in G} d_-(x).$$

- Symmetrisessä suhteikossa $d_+(x) = d_-(x)$ kaikilla $x \in P_G$. Näiden yhteistä arvoa merkitään $d(x)$:llä ja sanotaan pisteen x *asteeksi.*

- Verkossa pätee
$$\sum_{x \in G} d(x) = 2v_G,$$
erityisesti asteiden summa on verkossa aina parillinen määrä.

- Kättelylemma - verkossa on parillinen määrä paritonasteisia pisteitä.

- Jos verkossa on ainakin kaksi pistettä, sillä on kaksi eri solmua, joilla on sama aste.

- Verkon *astejono* saadaan kun laitetaan jonoon kaikkien pisteiden asteet laskevassa järjestyksessä.

Isomorfismit

- Isomorfismi kahden suhteikon G, G' välillä on bijektiivinen kuvaus $f \colon P_G \to P_{G'}$ jolle pätee
$$\overrightarrow{xy} \in N_G \text{ jos ja vain jos } \overrightarrow{f(x)f(y)} \in N_{G'}.$$

- Isomofismi "säilyttää" kaikki verkko-teorettiset ominaisuudet - pisteiden (lähtö-, tulo-)asteet, astejonot, nuolten, pisteiden ja viivojen lukumäärät, naapurien asteet, pisteiden väliset kulkuetäisyydet, (vahvasti) yhtenäiset komponentit, syklit, renkaat, Hamiltonin/Eulerin kulut jne.

- Suhteikot osoitetaan ei-isomorfisiksi löytämällä jokin verkko-teorettinen ominaisuus, joka erottaa suhteikot toisistaan.

- Isomorfismisuus taas on yleensä osoitettava konstruoimalla isomorfismi.

Viivojen lukumäärät ja komplementit

- Jos verkossa on n pistettä, siinä on korkeintaan $n(n-1)/2$ viivaa. Viivojen määrä on tasan $n(n-1)/2$ jos ja vain jos verkko on täydellinen.
- Verkon G komplementti on verkko $\tilde{G}$, jonka pistejoukko on $P_{\tilde{G}} = P_G$ ja jossa kahden eri pisteen välillä on olemassa viiva $\overline{xy}$ jos ja vain jos tällaista viivaa ei ole verkossa G.
- Jos verkossa G on k viivaa, verkossa $\tilde{G}$ on
$$\frac{p_G(p_G-1)}{2} - k$$
viivaa.
- Kaksi verkkoa ovat isomorfisia jos ja vain jos niiden komplementit ovat isomorfisia.
- Yhtenäisessä verkossa pätee $v_G \geqslant p_G - 1$. Yhtäsuuruus tällöin pätee jos ja vain jos verkko on puu.
- Jos verkolle pätee $v_G \geqslant p_G$, verkossa on ainakin yksi rengas.

Yhtenäisyys ja kulut

- On olemassa kaksi yhtenäisyyden käsitettä: *vahva yhtenäisyys* ja (tavallinen) *yhtenäisyys*. Symmetrisille suhteikoille nämä käsitteet ovat samoja, mutta suhteikoille yleisesti eivät ole.
- Suhteikko on vahvasti yhtenäinen jos kaikilla $\emptyset \neq P \subsetneq P_G$ on olemassa nuoli joukkoon P ja nuoli joukosta P.
- Suhteikko on yhtenäinen jos kaikilla $\emptyset \neq P \subsetneq P_G$ on olemassa nuoli joukkoon P tai nuoli joukosta P.
- Suhteikko on yhtenäinen jos ja vain jos sen symmetrinen sulkeuma on yhtenäinen. Käytännössä yhtenäisyyttä usein kannattaa tutkia juuri tämän lähestymistavan avulla. Symmetrisenä suhteikkona suhteikon symmetrinen sulkeuma on yhtenäinen jos ja vain jos se on vahvasti yhtenäinen.
- *Kulku* suhteikossa G on jono $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ sen solmuja siten, että $e_i = \overrightarrow{x_{i-1}x_i} \in N_G$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$.
- Tällöin jono $(e_1, \ldots, e_n)$ on kulun askelten jono. Kulun pituus on sen askelten lukumäärä (ei pisteiden lukumäärä!).
- Kulku on *kierros* jos sen alkupiste x_0 ja sen loppupiste x_n ovat samoja.
- Kulku on *yksinkertainen*, jos siinä ei ole pisteiden toistoa, paitsi, että sallitaan mahdollisuus $x_0 = x_n$.
- *Sykli* on yksinkertainen kierros. Sykli, jonka pituus on vähintään 3 määrittelee *renkaan.*

- Jos kahden pisteen välillä on olemassa kulku, niin niiden välillä on olemassa myös yksinkertainen kulku.
- Käytännössä vahvaa yhtenäisyyttä kannattaa tutkia kulkujen ja kierrosten kautta. Suhteikko on vahvasti yhtenäinen jos ja vain jos jokaisesta pisteestä on (yksinkertainen) kulku jokaiseen toiseen pisteeseen.
- Suhteikko on vahvasti yhtenäinen jos ja vain jos siinä on kierros joka käy jokaisessa pisteessä.
- Jos suhteikossa on kulku, joka käy jokaisessa pisteessä, suhteikko on yhtenäinen. Käänteinen väite ei kuitenkaan päde.
- Semikulku on kulku symmetrisessä sulkeumassa. Suhteikko on yhtenäinen, jos ja vain jos jokaisesta pisteestä on (yksinkertainen) semikulku jokaiseen toiseen pisteeseen.
- Lemma II 3.6: (Vahvasti) yhtenäisten suhteikkojen yhdiste on (vahvasti) yhtenäinen jos niiden joukossa on yksi suhteikko, jolla on yhteisiä pisteitä kuiden muiden tarkasteltavien suhteikkojen kanssa.
- Suhteikon G piste x on sen *juuri*, jos jokaisella $y \in G$ on olemassa kulku x:stä y:hyn.

Komponentit

- *(Vahvasti) yhtenäinen komponentti* on suhteikon maksimaalinen (vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko.
- Jokainen suhteikon (vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko sisältyy täsmälleen yhteen (vahvasti) yhtenäiseen komponenttiin.
- Suhteikon jokainen solmu kuuluu tasan yhteen (vahvasti) yhtenäiseen komponenttiin.
- Suhteikon jokainen nuoli kuuluu tasan yhteen yhtenäiseen komponenttiin. Tämä ei yleisesti päde vahvasti yhtenäisille komponenteille!
- Suhteikon jokainen viiva kuuluu tasan yhten (vahvasti) yhtenäiseen komponenttiin.
- Jokainen (vahvasti) yhtenäinen komponentti H on pistejoukkonsa P_H virittämä alisuhteikko. Tästä seuraa, että riittää selvittää mitkä pisteet kuuluvat mihinkään komponenttiin. On kuitenkin muistettava, että komponentti ei ole sama asia kuin sen pisteiden joukko, vaan se on suhteikko.
- Olkoot x, y suhteikon solmuja. Tällöin x ja y kuuluvat samaan vahvasti yhtenäiseen komponenttiin jos ja vain jos suhteikossa on olemassa kulku pisteestä x pisteeseen y ja on olemassa kulku pisteestä y pisteeseen x.
- Vastaavasti x ja y ovat samassa yhtenäisessä komponentissa, jos ja vain jos suhteikossa on olemassa kulku pisteestä x pisteeseen y (tässä riittää yksi suunta).

Pisteiden x, y *kulkuetäisyys* $d(x, y)$. suhteikossa G on pienin luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$ jolla on olemassa *yksinkertainen* kulku x:stä y:hyn.

Hamiltonin kulut

- *Hamiltonin kulku* on yksinkertainen kulku, joka käy suhteikon jokaisessa pisteessä.
- *Hamiltonin kierros* on Hamiltonin kulku, joka on kierros.
- Hamiltonin kulun tai kierroksen olemassaololle ei ole olemassa yksinkertaista karakterisaatiota tai menetelmää.
- Jos kaksijakoisessa verkossa on olemassa Hamiltonin kierros, sen punaisten ja mustien pisteiden lukumäärien on oltava samat.
- Jos kaksijakoisessa verkossa on olemassa Hamiltonin kulku, sen punaisten ja mustien pisteiden lukumäärät eroavat korkeintaan yhdellä.
- Täydellisissä kaksijakoisissa verkoissa myös pätevät kahden edellisen väitteen käänteisväitteet.
- Jokaisessa täydellisessä suhteikossa on olemassa Hamiltonin kulku.
- Täydellisessä suhteikossa on olemassa Hamiltonin kierros jos ja vain jos suhteikko on vahvasti yhtenäinen.
- Lause II 5.7 - Jos verkossa G on ainakin kolme pistettä ja kaikilla $x, y \in P_G$ siten, että x ja y eivät ole naapureita pätee $d(x) + d(y) \geqslant p_G$, niin G:ssä on Hamiltonin kierros

Renkaat ja renkaistot

- n-*Rengas* on n-sykliin liittyvä viivajoukko.
- *Renkaisto* on renkaiden erillinen yhdiste.
- Viiva kuuluu johonkin renkaaseen jos ja vain jos sen poistaminen verkosta ei muuta yhtenäisten komponenttien lukumäärä.
- Jos verkolle pätee $v_G \geqslant p_G$, verkossa on ainakin yksi rengas.
- Jos verkon jokaisen pisteen aste on ainakin kaksi, verkossa on ainakin yksi rengas.
- Viivajoukko on renkaisto jos ja vain jos sen virittämän aliverkon jokaisen pisteen aste on parillinen.
- Kahden renkaiston *symmetrinen erotus* on myös renkaisto.
- Verkko on kaksijakoinen jos ja vain jos se ei sisällä renkaita, joiden koko on pariton luku.
- Eulerin kulku verkossa on sellainen kulku, jossa jokainen verkon viiva esiintyy tasan kerran. Eulerin kierros on Eulerin kulku, joka on kierros.
- Yhtenäisessä verkossa on olemassa Eulerin kierros jos ja vain jos verkon jokaisen pisteen aste on parillinen.

- Yhtenäisessä verkossa on olemassa Eulerin kierros jos ja vain jos verkon viivajoukko muodostaa renkaiston.

- Yhtenäisessä verkossa on olemassa Eulerin kulku jos ja vain jos verkolla on tasan kaksi pistettä, joiden aste on pariton.

Puut

Puu on yhtenäinen ja renkaaton verkko.

Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- Verkko G on puu.

- Verkon G kahden pisteen $x, y \in P_G$ välillä on olemassa verkossa **yksikäsitteinen** yksinkertainen kulku.

- Verkko on yhtenäinen ja $v_G = p_G - 1$.

- Verkko on renkaaton ja $v_G = p_G - 1$.

- Verkko on yhtenäinen, mutta yhdenkin viivan poistaminen verkosta G tekee siitä epäyhtenäisen.

- Verkko on renkaaton, mutta yhdenkin uuden viivan lisäämisen jälkeen verkossa on rengas.

Puun piste x on *lehti* jos $d(x) = 1$. Jokaisella puulla on ainakin kaksi lehteä.
Jos puusta poistetaan mitä tahansa sen lehtiä, verkko pysyy puuna. Kääntäen, jos puuhun kiinitetään mihin tahansa sen solmuihin uusia lehtiä, näin saatu verkko on puu (II 2.4 - IV 2.5)

Verkon G *virittävä puu* on sen aliverkko H, joka on puu ja jolle pätee $p_H = p_G$. Verkolla on olemassa virittävä puu jos ja vain jos verkko on yhtenäinen. On olemassa yksinkertaisia algoritmeja, joilla voidaan konstruoida virittäviä puita.
Täydellisellä verkolla K_n on tasan n^{n-2} virittävää puuta.

Olkoon T jokin (yhtenäisen) verkon G virittävä puu ja olkoon $v \in V_G \backslash V_T$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen verkon G rengas R jolle pätee $R \backslash V_T = \{v\}$. Tätä rengasta merkitään $R(v;T)$ ja sanotaan perusrenkaaksi virittävän puun T suhteen.

Yhtenäisen verkon G jokainen renkaisto Q voidaan esittää joidenkin perusrenkaiden symmetrisenä erotuksena (Korollaari IV 2.10). Tästä seuraa, että yhtenäisen verkon renkaistojen lukumäärä on

$$2^{v_G - p_G + 1}.$$

Verkon yksisuuntaistus

- Verkon G *yksisuuntaistus* on sellainen *yksisuuntainen* suhteikko $\overrightarrow{G}$ jolle $\overrightarrow{G}^s = G$.

- Jos verkko G on yhtenäinen ja $a \in G$, niin G:llä on olemassa yksisuuntaistus jonka (eräs) juuri on a.
- Yhtenäistä verkkoa sanotaan *kahdesti yhtenäiseksi*, jos jokainen sen viiva kuuluu johonkin renkaaseen.
- Verkko on kahdesti yhtenäinen jos ja vain jos sillä on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus.

Suunnatut puut

Puun T yksisuuntaistus $\overrightarrow{T}$ on *suunnattu puu* jos sillä on ainakin yksi juuri. Tällöin tämä juuri on yksikäsitteinen.

Jokaisella puun pisteellä $a \in P_T$ on olemassa yksikäsitteinen yksisuuntaistus $\overrightarrow{T}$, jonka ainoa juuri on a.

Tällöin suunnatun puun solmun x *korkeus* on sen kulkuetäisyys $d(a, x)$ juuresta suhteikossa $\overrightarrow{T}$. Suunnatun puun korkeus k on maksimi sen solmujen korkeuksista. Suunnatun puun haaraisuus h on maksimi sen solmujen lähtöasteista $d_+(x)$. Suunnatun puun lehti on sellainen alkio, jonka lähtöaste on nolla.
Olkoon suunnatun puun lehtien lukumäärä l ja pisteiden lukumäärä p. Tällöin

$$lh \leqslant p(h-1) + 1 \leqslant h^{k+1}.$$