Verkon yksisuuntaistukset

Aleksandr Pasharin

Olkoon G verkko. Sen **yksisuuntaistus** on sellainen *yksisuuntainen* suhteikko $\overrightarrow{G}$ jolle pätee $\overrightarrow{G}^s = G$. Toisin sanoen yksisuuntaistus saadaan kun verkon G jokaiselle viivalle $\overline{xy}$ valitaan yksi ja tasan yksi kulkusuunta $\overrightarrow{xy}$ tai $\overrightarrow{yx}$. Koska verkossa (jossa on ainakin yksi viiva) on olemassa eri tapoja valita viivoille tällaisia kulkusuuntia, verkolla on yleensä paljon erilaisia yksisuuntaistuksia.

Suhteikon H piste $a \in P_H$ on suhteikon H *juuri*, jos jokaisella $x \in P_H$ suhteikossa H on olemassa kulku a:sta x:ään. Aikaisemmista tuloksista helposti seuraa, että suhteikko on vahvasti yhtenäinen jos ja vain jos jokainen suhteikon piste on sen juuri. Lisäksi suhteikko, jolla on ainakin yksi juuri, on yhtenäinen (mutta ei välttämättä vahvasti yhtenäinen). Tällöin suhteikon juurten joukko J virittää suhteikon erään vahvasti yhtenäisen komponentin (Lause II 4.7).

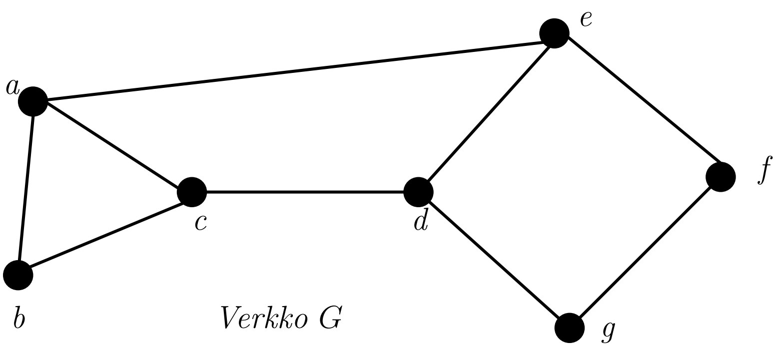
Lause III 4.1: Olkoon G yhtenäinen verkko ja olkoon $a \in P_G$. Tällöin on olemassa verkon G yksisuuntaistus jossa a on juuri.
Lauseen todistuksessa käytetään kulkuetäisyyksiä. Kun verkossa on viiva $v = \overline{xy}$ määritellään sille yksisuuntaisuudessa $\overrightarrow{G}$ suunnaksi $\overrightarrow{xy}$ jos ja vain jos $d(a, x) \leqslant d(a, y)$. Jos pätee yhtäsuuruus $d(a, x) = d(a, y)$, valitaan jompikumpi suunta mielivaltaisesti. Toisin sanoen suhteikossa $\overrightarrow{G}$ nuolet ovat "suunnistettu poispäin a:stä". Tarkka todistus sille, että tällöin a on suhteikon $\overrightarrow{G}$ juuri löytyy Junnilan materiaalista.

Lause III 4.2: Olkoon G verkko ja olkoon $a \in P_G$. Jos verkolla G on olemassa kaksi erilaista yksisuuntaistusta, joilla on yhteinen juuri on a, niin G:ssä on (ainakin yksi) rengas.

Sanomme verkkoa G *kahdesti yhtenäiseksi* jos verkko $G - v$ on yhtenäinen jokaisella $v \in V_G$. Lauseen III 1.2 nojalla verkko G on kahdesti yhtenäinen jos ja vai jos se on yhtenäinen ja jokainen sen viiva kuuluu johonkin renkaaseen. Voidaan osoittaa (Lemma III 4.6), että verkko G on kahdesti yhtenäinen jos ja vain jos kaikilla $\varnothing \neq P \subsetneq P_G$ verkossa on olemassa ainakin *kaksi erilaista* nuolta joukosta P (tästä nimitys "kahdesti yhtenäinen" tuleekin).

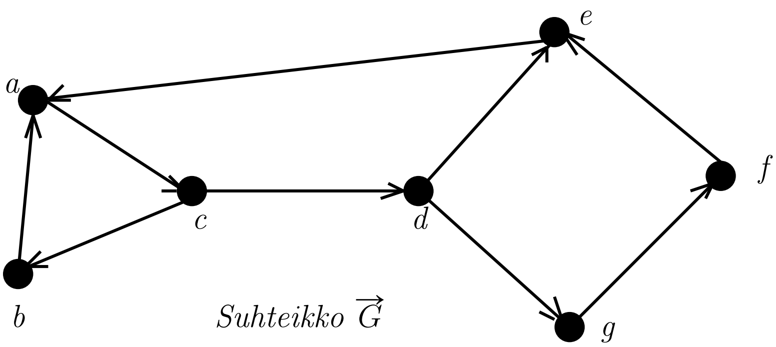
Lause III 4.7: Verkko G on kahdesti yhtenäinen jos ja vain jos sillä on vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus.

Esimerkki 1. *Tarkastellaan seuraavaa verkkoa G:*



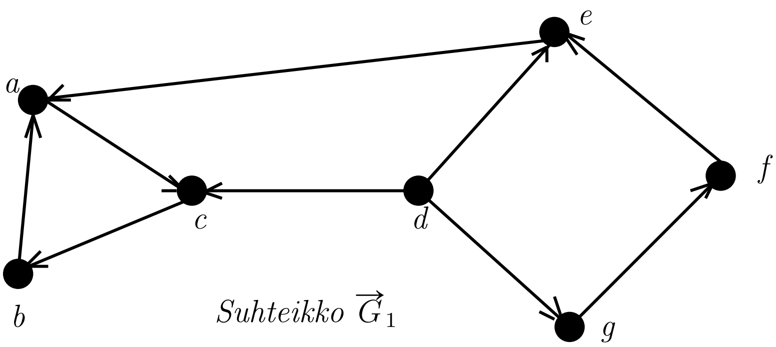
Verkko G

Verkko on kahdesti yhtenäinen, sillä se on yhtenäinen ja jokainen sen viiva kuuluu johonkin renkaaseen. Seuraavassa kuvassa on esitetty verkon G eräs vahvasti yhtenäinen yksisuuntaistus $\overrightarrow{G}$ (tarkista, että suhteikko todellakin on vahvasti yhtenäinen):



Suhteikko $\overrightarrow{G}$

Verkon G yksisuuntaistus $\overrightarrow{G}_1$, joka ei ole yhdesti yhtenäinen:



Suhteikko $\overrightarrow{G}_1$

Suhteikon $\overrightarrow{G}_1$ ainoa juuri on piste d (tarkista!).

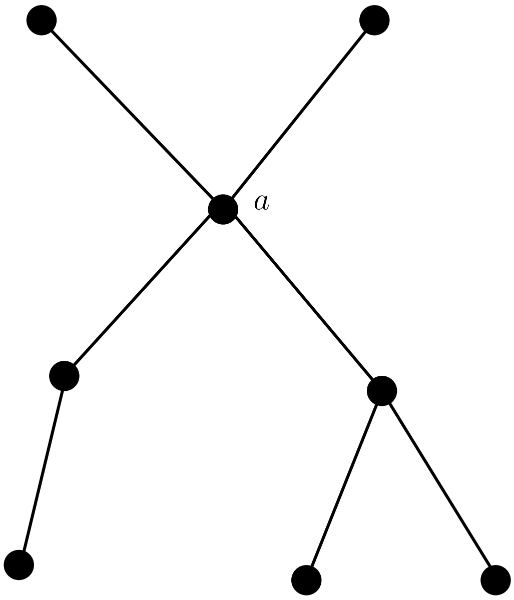
Suunnatut puut

Olkoon T puu ja olkoon $a \in P_T$. Koska T on yhtenäinen, on olemassa T:n suunnistus $\overrightarrow{T}$ siten, että a on suhteikon $\overrightarrow{T}$ juuri. Osoittautuu, että puun tapauksessa tällainen yksisuuntaistus on **yksikäsitteinen** (Lause IV 3.2). Solmu a on tällöin itse asiassa sen ainoa juuri (HT).

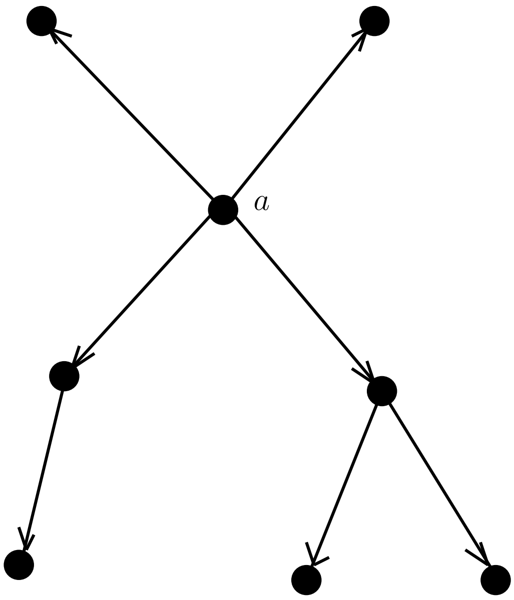
Lauseen IV 4.1 todistus antaa käytännöllisen tavan määrittää yksisuuntaisuus $\overrightarrow{T}$, jonka juuri on annettu solmu $a \in P_T$. Nimittäin jokaisella $x \in P_T$ on olemassa **yksikäsitteinen** yksinkertainen kulku $\overline{\ }(x) = (x_0, \ldots, x_k)$ pisteestä a pisteeseen x:n. Määritelmän mukaan tällöin $d(a, x) = k$. Jos puussa on viiva $\overline{xy}$, niin se "suunnataan a:sta poispäin", eli asetetaan suunnistuksessa $\overrightarrow{T}$ nuoleksi $\overrightarrow{xy}$ jos ja vain jos $d(a, x) < d(a, y)$ (eli "x lähempänä a:ta kuin y"). Voidaan osoittaa, että puun tapauksessa yhtäsuuruus $d(a, x) = d(a, y)$

ei voi esiintyä tässä tilanteessa.

Esimerkki 2. *Tarkastellaan seuraavaa puuta T ja sen solmua a:*



Puun T yksikäsitteinen yksisuuntaistus jonka juuri on a:



Yksisuuntaista suhteikkoa $\overrightarrow{T}$, jolla on ainakin yksi juuri ja joka on jonkun puun T yksisuuntaistus, sanotaan **suunnatuksi puuksi**. Suhteikko G on siis suunnattu puu jos ja vain jos se on yksisuuntainen, sillä on ainakin yksi juuri ja on olemassa puu T siten, että $T^s = G$.
Suunnatulla puulla on aina täsmälleen yksi juuri.
Suunnatusta puusta on kätevää käyttää merkintää $\overrightarrow{T}$, jolloin T tarkoittaa sen symmetrista sulkeuma (joka on puu).

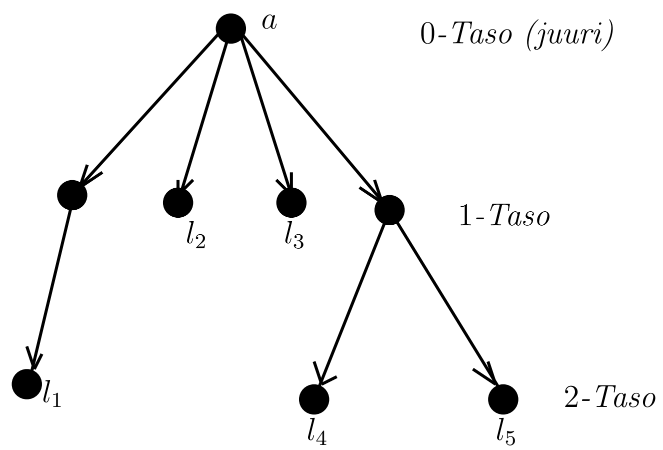
Suunnatun puun $\overrightarrow{T}$ pistettä x sanotaan suunnatun puun *lehdeksi* jos suhteikossa $\overrightarrow{T}$ pätee $d_-(x) = 0$. Olkoon a suunnatun puun $\overrightarrow{T}$ ainoa juuri. Tällöin puussa T solmu a on

joko lehti tai ei ole lehti. Jos a ei ole T:n lehti, niin suunnatun puun $\overrightarrow{T}$ lehdet ovat samoja kuin puun T lehdet. Jos taas a on lehti T:ssä, suunnatun puun $\overrightarrow{T}$ lehdet ovat kaikki T:n lehdet, paitsi a.
Koska jokaisella puulla, jossa on vähintään kaksi solmua, on vähintään kaksi lehteä, tästä seuraa, että jokaisella suunnatulla puulla, jolla on ainakin kaksi solmua, on ainakin yksi lehti.

Olkoon $\overrightarrow{T}$ suunnattu puu ja olkoon a sen juuri. Jokaisella $x \in P_{\overrightarrow{T}} = P_T$ kulkuetäisyys $d(a, x)$ on äärellinen (sen arvo on sama riippumatta siitä, lasketaanko se puussa T vai suunnatussa puussa $\overrightarrow{T}$) ja sitä kutsutaan pisteen x **korkeudeksi** suunnatussa puussa $\overrightarrow{T}$. Suunnatun puun $\overrightarrow{T}$ *n-taso* on joukko, joka koostuu niistä solmuista, joiden korkeus on n. Suunnattu puu on tapana piirtää niin, että sen juuri (ainoa 0-tason piste) sijoitetaan ylimmäiseksi pisteeksi ja saman tason pisteitä piirretään visuaalisesti samassa vakaasuorassa tasossa. Seuraavan tason pisteet piirretään edellisen tason nähden alempana (tässä mielessä sana ”korkeus” on harhaanjohtava, koska mitä suurempi on pisteen korkeus, sitä matalampi se sijoitetaan kuvassa), kts. esimerkki alla.

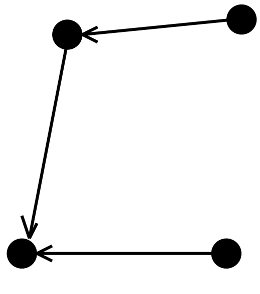
Suunnatun puun $\overrightarrow{T}$ **haaraisuus** on suurin lähtöasteista $d_-(x)$, $x \in \overrightarrow{T}$.
Suunnatun puun $\overrightarrow{T}$ **korkeus** on suurin sen pisteiden korkeuksista.

Esimerkki 3. *Edellisessä esimerkissä tarkasteltu puun T yksisuuntaistus $\overrightarrow{T}$ on suunnattu puu, joka vakiintuneiden sopimusten mukaan piirretään yleensä näin:*



Suunnatun puun lehdet on merkitty kuvaan $l_1, \dots, l_5$. Ne ovat täsmälleen samoja kuin puun T lehdet (koska a ei ole T:n lehti).
Haaraisuus on 4.

Esimerkki 4. *Seuraavassa kuvassa esitetyn yksisuuntaisen verkon G symmetrinen sulkeuma G^s on puu, mutta G ei ole suunnattu puu, sillä G:llä ei ole juurta (tarkista):*



Lause IV 3.6: Olkoon suunnatun puun $\overrightarrow{T}$ pisteiden lukumäärä p, korkeus k, haaraisuus h ja lehtien lukumäärä l. Tällöin

$$lh \leqslant p(h-1)+1 \leqslant h^{k+1}.$$

Erityisesti

$$l \leqslant h^k$$

(Korollaari IV 3.7).