Renkaat ja Eulerin kulut

Aleksandr Pasharin

Renkaat

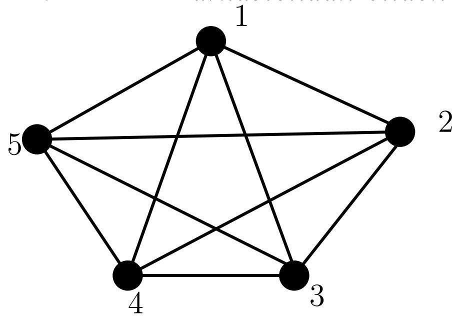
Muistutus: *n-sykli* verkossa G on *yksinkertainen kierros* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ verkossa G, jonka pituus on n. n-syklin pituus n on sama kuin siinä esiintyvien viivojen $\mathbf{v}_i = \overline{x_{i-1}x_i}$ lukumäärä, $1 \leqslant i \leqslant n$. Huomaa, että koska sykli oletetaan olevan yksinkertainen, kaikki nämä viivat ovat erilaisia, paitsi tapauksessa $n = 2$, jonka suljemme jatkossa tarkastelusta pois. Koska sykli on kierros, sen alku- ja loppupisteet ovat sama piste, $x_0 = x_n$. Näin ollen n-syklissä esiintyy tasan n erilaista verkon solmua, eli solmut $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Määritelmä 1. *Olkoon G verkko. Kokoelma sen viivoja $R \subset V_G$ on verkon G (n-)*rengas *jos on olemassa n-sykli $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 3$, jolle*

$$R = \{\overline{x_{i-1}x_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Toisin sanoen n-rengas on johonkin n-sykliin, $n \geqslant 3$, liittyvien viivojen kokoelma. Kun $n = 3$ rengasta sanotaan "kolmioksi", kun $n = 4$ sitä sanotaan "neliöksi" jne.

Esimerkki 2. *Tarkastellaan viiden solmun täydellistä verkkoa K_5.*



Kokoelma

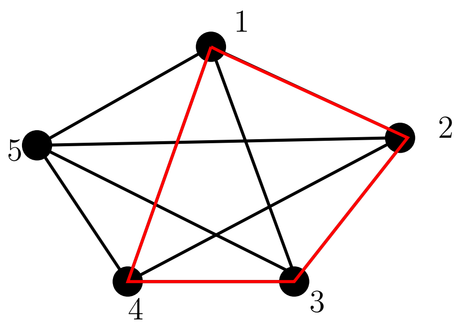
$$R_1 = \{\overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{41}\}$$

on 4-rengas, sillä se on 4-syklin $(1, 2, 3, 4, 1)$ viivajoukko. Myös sykliin $(2, 1, 4, 3, 2)$ liittyvä viivajoukko on rengas R_1. Eri syklit voivat siis määrittää saman renkaan. Tämä on selvä, koska sykli voidaan "aloittaa" mistä tahansa pisteestään ja kulkea mihin tahansa kahdesta mahdollisesta suunnasta. Tästä syystä kirjallisuudessa joskus samastetaan syklejä, jotkä määrittävät saman renkaan eli pidetään syklejä renkkaiden synonyymina (me emme tee näin).

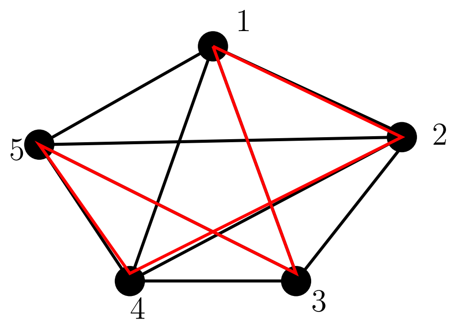
Kokoelma

$$R_2 = \{\overline{13}, \overline{35}, \overline{54}, \overline{42}, \overline{21}\}$$

on 5-rengas, sillä se on 5-syklin $(1, 3, 5, 4, 2, 1)$ viivajoukko.

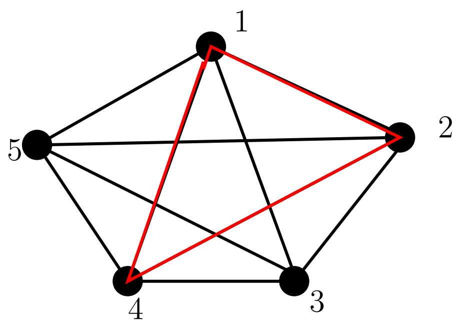


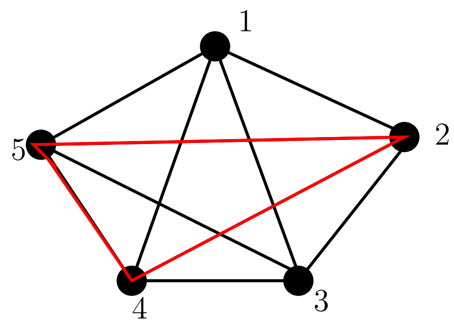
Rengas R_1



Rengas R_2

Esimerkkejä verkon K_5 3-renkaista ("kolmioista"):





Olkoon G verkko ja $v = \overline{ab}$ jokin sen viiva. Aliverkko $H = G - v$ määritellän asettamalla $P_H = P_G$, $V_H = V_G \setminus \{v\}$. Toisin sanoen poistetaan verkosta G viiva v (eli poistetaan molemmat nuolet $\overrightarrow{ab}$ ja $\overrightarrow{ba}$) ja jätetään kaikki muut viivat ja kaikki pisteet paikallaan. Huomaa erityisesti, että viivan v päätepisteitä a, b **ei poisteta** tässä operaatiossa verkosta.

Lause III 1.1/Korollaari III 1.2 : Verkon G viiva v kuuluu johonkin verkon renkaaseen jos ja vain jos verkoilla G ja $G - v$ on sama määrä yhtenäisiä komponentteja. Erityisesti jos G on yhtenäinen, sen viiva v kuuluu johonkin renkaaseen jos ja vain jos $G - v$ on yhtenäinen.

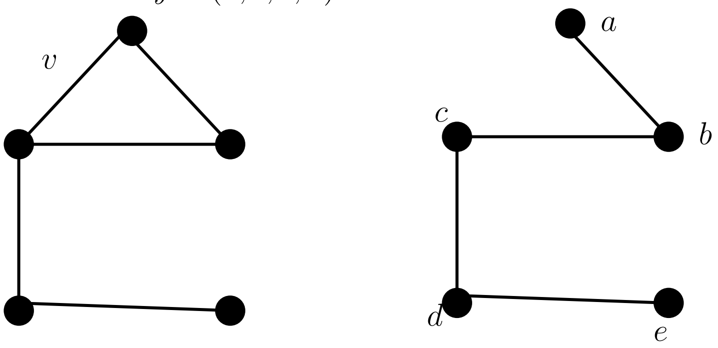
Verkon viivaa v, joka ei kuulu mihinkään verkon renkaaseen sanotaan verkon *sillaksi* (engl. bridge). Edellisen nojalla viiva on silta jos ja vain jos sen poistaminen verkosta muuttaa yhtenäisten komponenttien lukumäärää. Erityisesti yhtenäisen verkon G viiva on silta jos ja vain jos verkko $G - v$ on epäyhtenäinen.
Seuraava tulos kertoo kuinka paljon sillan poistaminen voi muuttaa verkon viivojen lukumäärää.

Lemma 1. *Olkoon v verkon G silta. Oletetaan, että verkolla G on k yhtenäistä komponenttia. Tällöin verkolla $G - v$ on tasan $k + 1$ yhtenäistä komponenttia. Erityisesti, jos G on yhtenäinen verkko ja $v = \overline{ab}$ on silta, niin verkolla $G - v$ on tasan kaksi yhtenäistä komponenttia, pisteen a komponentti ja pisteen b komponentti.*

Todistus. Tarkastelemalla sitä G:n komponenttia, joka sisältää viivan v päätepisteitä a, b (viivan v olemassaolosta seuraa, että ne ovat väistämättä samassa komponentissa), nähdään, että riittää tarkastella yhtenäisen verkon tapausta.

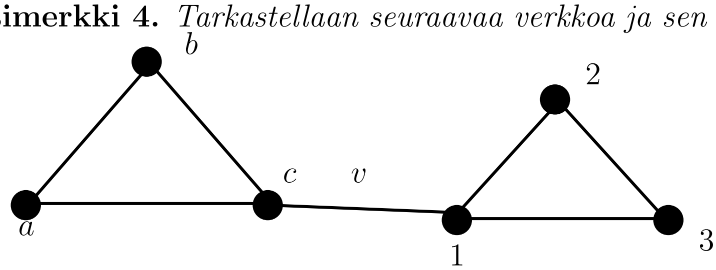
Harjoituksessa 4.8 osoitettiin, että kun G on yhtenäinen verkko, verkolla $G - v$ on korkeintaan kaksi komponenttia. Koska v on silta, edellisen nojalla $G - v$ on epäyhtenäinen. Näin ollen sillä on tasan kaksi komponenttia. □

Esimerkki 3. *Kuvassa alla on piirrety yhtenäinen verkko G ja verkko $G - v$, joka on myös yhtenäinen (esimerkiksi koska sen kulku (a, b, c, d, e) käy jokaisen pisteen läpi). Tulos on sopusoinnissa teorettisten tulosten kanssa, sillä viiva v kuuluu verkon G 3-renkkaaseen, jonka määrä sykli (a, b, c, a).*

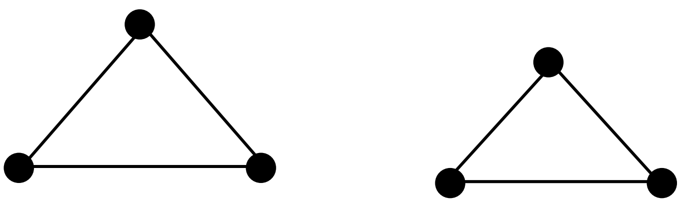


Verkko G *Verkko $G - v$*

Esimerkki 4. *Tarkastellaan seuraavaa verkkoa ja sen viivaa v:*



Verkko G



Verkko $G - v$

Verkko G on yhtenäinen, mutta verkko $G - v$ on epäyhtenäinen. Näin ollen viiva v on silta. Lauseen III 1.1 nojalla v ei voi kuulua mihinkin verkon sykliin. Tämä fakta on "intuitiivisesti selvä" kuvasta.

Verkolla G on tasan kaksi rengasta - syklin (a, b, c, a) määrämä 3-rengas ja syklin $(1, 2, 3, 1)$ määrämä 3-rengas.(HT: Mieti osaisitko todistaa täysin formaalisti, että muita renkaita ei ole).

Lause III 1.2: Olkoon G epätyhjä verkko jolle pätee $v_G \geqslant p_G$. Tällöin G:ssä on (ainakin yksi) rengas.

Huomautus: Lauseen II 3.13 nojalla *yhtenäisessä verkossa* pätee $v_G \geqslant p_G - 1$. Näin ollen, yhdistämällä Lauseen II 3.13 ja Lauseen III 1.2. tuloksia saadaan seuraava tulos:

Yhtenäisessa verkossa ei ole syklejä jos ja vain jos $v_G = p_G - 1$.
Tällaisia yhtenäisiä verkkoja sanotaan **puiksi**. Tutkimme puiden teoria tarkemmin myöhemmin.

Korollaarit III 1.4 -1.5: Olkoon G verkko, jolla on ainakin kaksi pistettä. Oletetaan, että G:llä on korkeintaan yksi piste, jonka aste on pienempi kuin kaksi. Tällöin G:llä on (ainakin yksi) rengas.

Renkaistot

Verkon G viivojen joukon V_G osajoukko W on verkon G **renkaisto** jos W on **erillinen** yhdiste joistakin verkon G renkaista.

Toisin sanoen W on renkaisto jos on olemassa verkon G renkaat $R_1, \ldots, R_m$ siten, että

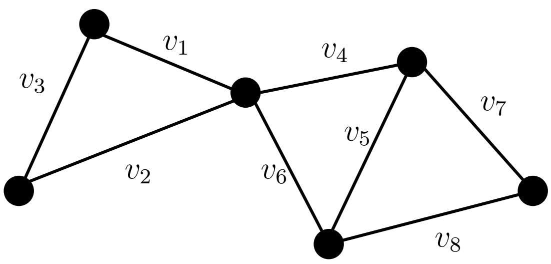
$$W = \bigcup_{i=1}^{m} R_i$$

ja $R_i \cap R_j = \emptyset$ kaikilla $i \neq j$.

Huomaa erityisesti - koska rengas on määritelmän mukaan eräs *viivojen* muodostama joukko, erillisyys tässä tarkoittaa, että mikään *viiva* ei esiinny kahdessa eri renkaassa R_i, R_j, $i \neq j$.

Erikoistapaus - tyhjä joukko $\emptyset \subset V_G$ on jokaisen verkon G renkaisto, sillä se voidaan tulkita tyhjänä renkkaiden yhdisteenä (tapaus $n = 0$ määritelmässä).

Esimerkki 5. *Olkoon verkko G kuten seuraavassa kuvassa:*



Sen viivojen muodostama joukko

$$W = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

on verkon G renkaisto. Tämä seuraa siitä, että $W = R_1 \cup R_2$, missä

$$R_1 = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ ja } R_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$$

ovat molemmat 3-renkaita ja $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Huomaa, että joillakin renkaan R_1 viivoilla on yhteinen päätepiste joidenkin renkaan R_2 viivojen kanssa, mutta tämä ei haita erillisyysvaatimista, sillä se koskee vain viivoja, ei solmuja.

Myös $U = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_7, v_8\}$ on verkon G renkaisto (tarkista!).
Sen sijaan viivojen joukko

$$Y = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$$

ei ole *renkaisto, vaikka se on kahden renkaan* $R_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$ *ja* $R_3 = \{v_5, v_7, v_8\}$ *yhdiste. Nämä renkaat eivät ole erillisiä, sillä* $v_5 \in R_2 \cap R_3$*. Tämä ei kuitenkaan periaatteessa tarkoita, että* Y *ei voisi olla renkaisto - voihan olla, että se voidaan lausua erillisten renkaiden yhdisteenä jollakin toisella tavalla. Palataan tähän kysymykseen teorettisten tulosten jälkeen (kts. esimerkki 6).*

Olkoon G verkko ja $W \subset V_G$ *mikä tahansa* sen viivojen kokoelma. Viivajoukon W *virittämä* verkon G aliverkko $G(W)$ määritellään samalla tavalla kuin nuolijoukon virittämää alisuhteikkoa. Nimittäin aliverkon $H = G(W)$ pistejoukoksi P_H asetetaan

$$P_H = \{x \in P_G \mid \text{ on olemassa } v \in W \text{ siten, että } x \text{ on viivan } v \text{ päätepiste}\}$$

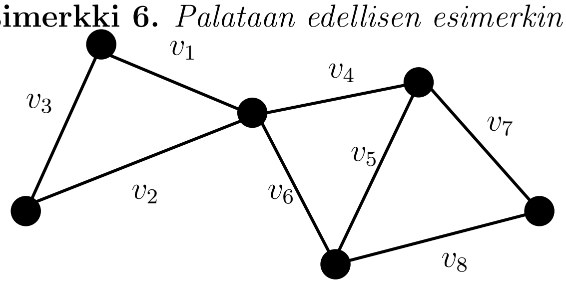
Aliverkon viivojoukoksi V_H astetaan $V_H = W$.

Lemma III 2.2: Jos W on verkon G rengas, sen virittämän aliverkon $G(W)$ jokaisen pisteen aste on kaksi.

Lause III 2.3: Olkoon $W \subset V_G$. Tällöin viivajoukko W on renkaisto jos ja vain jos sen virittämän aliverkon $G(W)$ jokaisen pisteen aste on parillinen luku.

Erityisesti V_G on renkaisto jos ja vain jos verkon G jokaisen pisteen aste on parillinen.

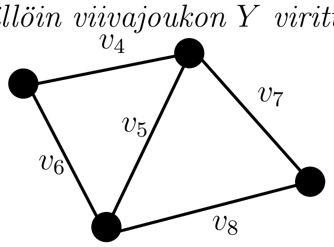
Esimerkki 6. *Palataan edellisen esimerkin verkkoon G:*



Olkoon

$$Y = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$$

Tällöin viivajoukon Y *virittämä aliverkko* $G(W)$ *on seuraava verkko:*



Tässä verkossa on olemassa pisteitä, joiden aste on pariton. Lauseen III 2.3 nojalla Y *ei ole renkaisto.*

Symmetrinen erotus

Palautetaan mieleen joukko-opista symmetrisen erotuksen käsite.
Olkoot A ja B joukkoja. Tällöin niiden **symmetrinen erotus** on joukko

$$A \triangle B = A \backslash B \cup B \backslash A = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Havainnollisesti joukkoon $A \triangle B$ kuuluvat täsmälleen ne alkiot x, jotka kuuluvat toiseen joukoista A, B **mutta ei molempiin**.

Kun joukot A ja B ovat äärellisiä, symmetrisen erotuksen alkioiden lukumäärälle voidaan helposti johtaa yhtälö

$$|A \triangle B| = |A| + |B| - 2 \cdot |A \cap B|$$

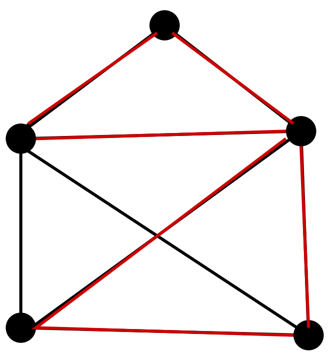
(todistus - kts. Junnila, Luku I, Lemma I. 1.15).

Tästä seuraa suoraan: (Junnila, Luku I, Korollaari I. 1.16)
Olkoot A, B äärelliset joukot, joissa kummassakin on parillinen määrä alkioita. Tällöin symmetrisen erotuksen $A \triangle B$ alkioiden lukumäärä on myös parillinen.

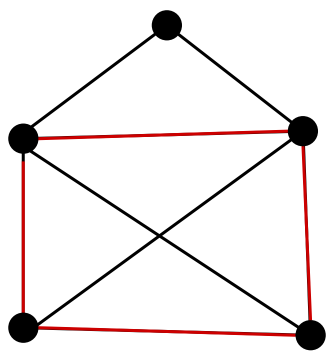
Lause III 2.5: Olkoot W_1, W_2 renkaistot verkossa G. Tällöin $W_1 \triangle W_2$ on myös renkaisto verkossa G.

Todistuksen idea: (tarkka todistus Junnilan monisteessa). Lauseen III 2.3 nojalla aliverkkojen $G(W_1)$ ja $G(W_2)$ jokaisen pisteen aste on parillinen. Käyttämällä tätä ja Korollaaria I 1.16 nähdään, että aliverkon $G(W_1 \triangle W_2)$ jokaisen pisteen aste on myös parillinen. Lauseesta III 2.3 tällöin seuraa, että $W_1 \triangle W_2$ on renkaisto verkossa G. $\square$

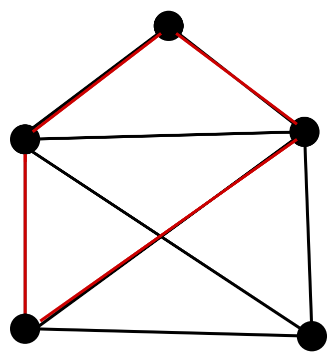
Esimerkki 7. *Kuvassa alla on esitetty erään verkon G renkaistot W_1 ja W_2, sekä niiden symmetrinen erotus $W_1 \triangle W_2$.*



Renkaisto W_1



Renkaisto W_2



Renkaisto $W_1 \triangle W_2$

Tässä renkaisto W_1 koostuu kahdesta kolmiosta ja renkaisto W_2 koostuu yhdestä neliöstä. Suora lasku osoitaa sen, että $W_1 \triangle W_2$ on renkaisto, joka kostuu yhdestä neliöstä (katso kuva, renkaistojen viivat piirretty punaisena).

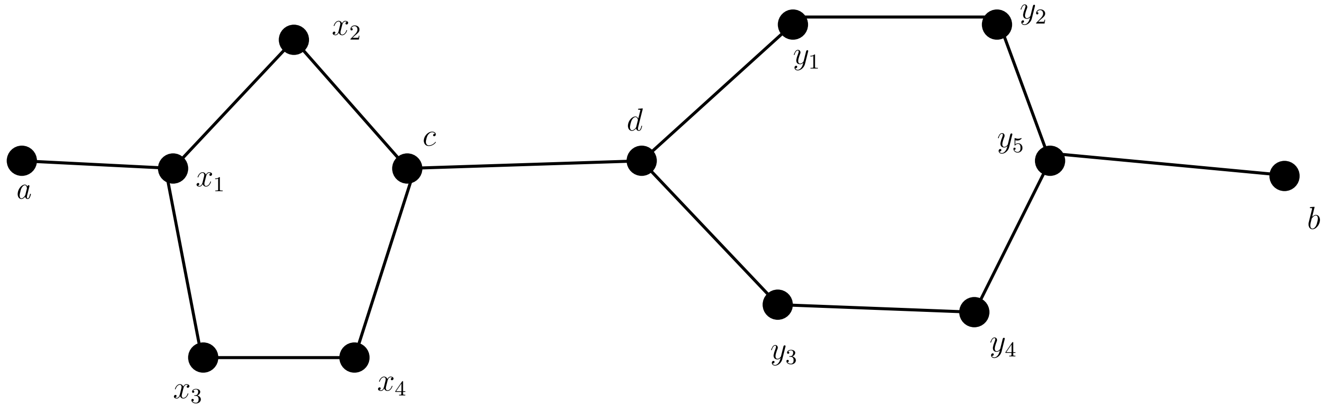
Muistutus: olkoon $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ kulku *verkossa* G. Tällöin merkitään

$$V(\bar{x}) = \{\overline{x_0x_1}, \overline{x_1x_2}, \ldots, \overline{x_{n-1}x_n}\}.$$

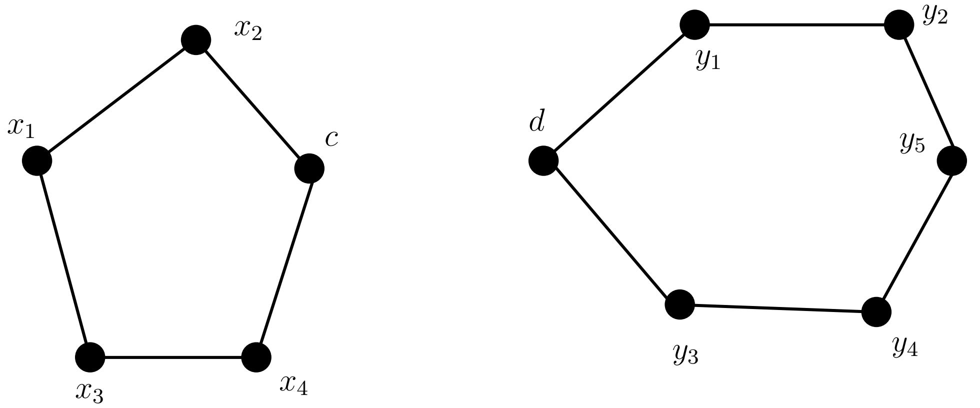
Joukko $V(\bar{x})$ ei välttämättä ole renkaisto, edes silloin kun $\bar{x}$ on kierros. Kuitenkin, seuraava tulos pätee.

Lemma III 2.6: Olkoot $a, b \in G$, $a \neq b$. Olkoot $\bar{x} = (x_0, \ldots, x_n)$ ja $\bar{y} = (y_0, \ldots, y_m)$ kaksi **yksinkertaista** kulkua pisteestä a pisteeseen b. Tällöin $V(\overline{x}) \triangle V(\overline{y})$ on verkon G renkaisto.

Esimerkki 8. *Seuraavassa kuvassa havainnollisestaan Lemman III 2.6. tulosta:*



Olkoon $\bar{x} = (a, x_1, x_2, c, d, y_3, y_4, y_5, b)$ *ja* $\bar{y} = (a, x_1, x_3, x_4, c, d, y_1, y_4, y_5, b)$*. Tällöin molemmat* $\bar{x}$ *ja* $\bar{y}$ *ovat yksinkertaisia kulkuja pisteestä* a *pisteeseen* b*. Suoralla laskulla nähdään, että* $V(\overline{x}) \bigtriangleup V(\overline{y})$ *on kahden renkaan erillinen yhdiste, eli todellakin on renkaisto:*



Edellisen tuloksen avulla saadaan renkaiden olemassaololle karakterisaatio kulkujen avulla:

Lause III 2.7 : Verkossa G on rengas jos ja vain jos on olemassa $a, b \in P_G$, $a \neq b$ siten, että verkossa on kaksi erilaista yksinkertaista kulkua pisteiden a ja b välillä.

Puu on yhteinäinen verkko, jolla ei ole renkaita (eli sellainen jossa ei ole syklejä). Koska yhtenäisessä verkossa kahden eri pisteen välillä on aina olemassa yksinkertainen kulku (Lemma II 4.4. ja Lemma II 4.3), edellisestä tuloksesta saadaan heti seuraava luonnehtinta puille:

Lause: Verkko on puu, jos ja vain jos kaikilla $a, b \in P_G$, $a \neq b$ on olemassa **yksikäsitteinen** yksinkertainen kulku pisteestä a pisteeseen b.

Tähän tulokseen palataan myöhemmin puiden teorian yhteydessä.

Eulerin kulut

Olkoon $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ kulku verkossa G ja olkoon

$$(\overline{x_0 x_1}, \overline{x_1 x_2}, \ldots, \overline{x_{n-1} x_n})$$

siihen liittyvä *viivojen jono*. Sanomme kulkua $\bar{x}$ **Eulerin kuluksi** verkossa G jos tässä jonossa **jokainen** verkon viiva esiintyy **täsmälleen kerran**.

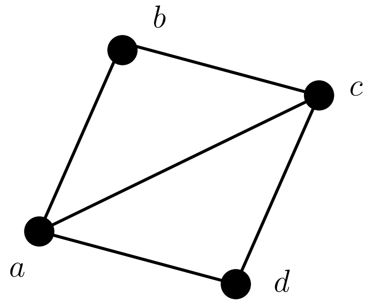
Eulerin kierros verkossa G on Eulerin kulku, joka on kierros.

Lause III 3.5: Olkoon G verkko, jossa ei ole eristettyjä pisteitä. Tällöin verkossa G on olemassa Eulerin kierros jos ja vain jos G on yhtenäinen ja jokaisen sen pisteen aste on parillinen.

Lause III 3.6: Olkoon G verkko, jossa ei ole eristettyjä pisteitä ja olkoot $a, b \in P_G$, $a \neq b$. Tällöin verkossa G on olemassa Eulerin kulku pisteestä a pisteeseen b jos ja vain jos G on yhtenäinen, pisteiden a ja b aste on pariton ja kaikkien muiden verkon pisteen aste on parillinen.

Lauseeiden III 3.5. - 3.6. avulla voidaan nopeasti tarkistaa löytyykö annetusta verkosta Eulerin kulkua tai kierrosta. Itse kulku tai kierros löytyy yleensä helpoiten kokeilemalla (ainakin suhteellisen pienten verkkojen kohdalla).

Esimerkki 9.



Kuvassa olevalla verkolla on tasan kaksi paritonasteista pistettä, joiden asteet ovat parittomia - pisteet a ja c. Lauseen III 3.5. verkossa on Eulerin kulku (mutta ei Eulerin kierrosta). Lisäksi tämän kulun on oltava kulku pisteiden a ja c välillä.

Yksi esimerkki Eulerin kulusta verkosta on kulku (a, b, c, a, d, c). *Myös kulku* (a, c, b, a, d, c) *on Eulerin kulku.*

Pseudo-Eulerin kulut suhteikoista

Yllä renkaita ja Eulerin kulkuja tutkittiin ainoastaan verkoissa.

Koska Eulerin kulun/kierroksen käsite on määritelty verkon *viivojen* avulla, tämä määritelmä ei ole käyttökelpoinen yleiselle suhteikolle, jossa verkkojen sijasta pitää tarkastella nuolia. Tällöin saadaan hieman erilainen käsite, joten otetaan sille tässä käyttöön eri nimitys.

Olkoon G suhteikko ja olkoon $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ se kulku. Olkoon $(e_1, \ldots, e_n)$ sen askelten jono, missä $e_i = \overrightarrow{x_{i-1}x_i} \in N_G$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$.

Sanomme kulkua $\bar{x}$ **pseudo-Eulerin kuluksi** jos sen askelten jonossa $(e_1, \ldots, e_n)$ jokainen suhteikon nuoli esiintyy **täsmälleen kerran**. Pseudo-Eulerin kulku, joka on kierros, on pseudo-Eulerin kierros suhteikossa G.

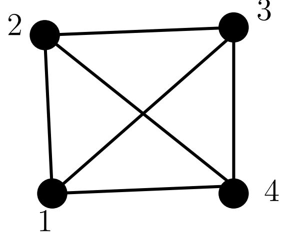
Mainitaan ilman todistuksia seuraavia Lauseiden III 3.5.-3.6. analogioita pseudo-Eulerin kuluille.

Lause: Vahvasti yhtenäisessä suhteikossa G on olemassa pseudo-Eulerin kierros jos ja vain jos $d_+(x) = d_-(x)$ kaikilla $x \in P_G$.

Lause: Yhtenäisessä suhteikossa G on olemassa pseudo-Eulerin kulku pisteestä $a \in P_G$ pisteeseen $b \in P_G$ jos ja vain jos $d_+(x) = d_-(x)$ kaikilla $x \in P_G, a \neq x \neq b, d_-(a) = d_+(a)+1$, $d_+(b) = d_-(b) + 1$.

Huomaa, että jokaisessa symmetrisessä suhteikossa, erityisesti jokaisessa verkossa, pätee ehto $d_+(x) = d(x) = d_-(x)$ kaikilla $x \in P_G$! Näin ollen jokaisessa yhtenäisessä verkossa on olemassa pseudo-Eulerin kierros, vaikka siinä ei välttämättä ole edes Eulerin kulkua! Ero pseudo-Eulerin kulun ja Eulerin kulun välillä on se, että Eulerin kulku kulkee jokaista viivaa $v = \overline{xy}$ pitkin **tasan kerran jossakin yhdessä suunnassa** eli joko nuolena $\overrightarrow{xy}$ tai nuolena $\overrightarrow{yx}$. Tällöin molemmat suunnat *eivät* voi esiintyä Eulerin kulussa. Pseudo-Eulerin kulussa taas esiintyy tällöin sekä nuoli $\overrightarrow{xy}$, että nuoli $\overrightarrow{yx}$.

Esimerkki 10. *Neljän pisteen täydellisessä verkossa K_4 ei ole Eulerin kulkua, koska jokaisen sen pisteen aste on kolme. Siinä on kuitenkin pseudo-Eulerin kulku, esimerkiksi kulku* $(1, 2, 3, 4, 1, 3, 2, 4, 2, 1, 4, 3, 1)$.



Renkaistoryhmä

Huomautus: Tämä osio on tarkoitettu algebraan (tarkemmin ryhmäteoriaan) perehtyneelle. Se voidaan tulkita olevan lisätietoa, jota ei kurssilla ole pakko osata.
(Toisin sanoen tämän materiaalin lukemisen saa lopettaa tähän).

Olkoon X kiinnitetty joukko ja olkoon $\mathbf{P}(X)$ sen potenssijoukko, eli sen osajoukkojen muodostama joukko,

$$\mathbf{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}.$$

Tällöin kuvus $\triangle \colon \mathbf{P}(X) \times \mathbf{P}(X) \to \mathbf{P}(\mathbf{X})$,

$$\triangle\ (A, B) = A \triangle B$$

voidaan tulkita joukossa $\mathbf{P}(X)$ määritellyksi *algebralliseksi operaatioksi.*

Tämä operaatio toteuttaa seuraavia algebrallisia ominaisuuksia:

(1) $A \triangle \varnothing = A$, kaikilla $A \in \mathbf{P}(X)$,

(2) $A \triangle A = \varnothing$, kaikilla $A \in \mathbf{P}(X)$,

(3) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$, kaikilla $A, B, C \in \mathbf{P}(X)$,

(4) $A \triangle B = B \triangle A$, kaikilla $A, B \in \mathbf{P}(X)$.

Ominaisuudet (1),(2), (4) seuraavat suoraan symmetrisen erotuksen määritelmästä, ominaisuuden (3) todistus voidaan löytää Junnilan monisteen Luvusta I (Lause I 1.12).

Algebran näkökulmasta ominaisuudet (1)-(3) tarkoittavat sitä, että potenssijoukko $\mathbf{P}(X)$ operaatiolla $\triangle$ varustettuna on **ryhmä**. Lisäksi ominaisuus (4) takaa sen, että tämä ryhmä on vaihdannainen, eli on *Abelin ryhmä*. Tämän ryhmän *neutraalialkio* on tyhjä joukko $\varnothing$ (ominaisuus (1)). Jokaisen alkion A *vasta-alkio* $-A$ on A itse (ominaisuus (2)).

Olkoon G verkko. Edellisen nojalla joukossa $\mathbf{P}(V_G)$ (verkon viivajoukon potenssijoukko) on olemassa algebrallinen operaatio $\triangle$.

Olkoon $\mathbf{R}(G)$ kaikkien verkon G renkaistojen muodostama joukko. Tämä joukko on potenssijoukon $\mathbf{P}(V_G)$ osajoukko, koska jokainen renkaisto on määritelmän mukaan viivojen muodostama joukko. Lauseen III 2.5 nojalla joukko $\mathbf{R}$ on **suljettu** operaation $\triangle$ suhteen. Ryhmäteorian kielellä tämä tarkoittaa sitä, että $\mathbf{R}(G)$ muodostaa ryhmän $\mathbf{P}(V_G)$ **aliryhmän** operaation $\triangle$ suhteen.

Erityisesti verkon renkaistojen joukko $\mathbf{R}(G)$ on ryhmä operaation $\triangle$ suhteen. Tätä ryhmää sanotaan verkon G **renkaistoryhmäksi**. Renkaistoryhmällä on erittäin tärkeä rooli verkkoteoriassa ja sen avulla verkkoteorettisia ongelmia voidaan lähestyä algebran näkökulmasta. Tällä kurssilla emme valitettavasti voi mennä tähän asiaan sen syvällisemmin.