Hamiltonin kulut ja kaksijakoiset verkot

Aleksandr Pasharin

Hamiltonin kulut ja kierrokset

Olkoon G suhteikko. **Hamiltonin kulku** suhteikossa G on **yksinkertainen** kulku $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ suhteikossa G joka käy suhteikon **jokaisessa pisteessa**. Toisin sanoen kulku $\bar{x}$ on Hamiltonin, jos se on yksinkertainen ja sen **määrittämä** alisuhteikko $H = G(\bar{x})$ **virittää** suhteikon G (eli $P_H = P_G$).

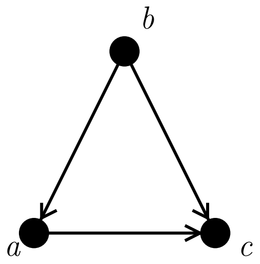
Hamiltonin kierros on Hamiltonin kulku, joka on kierros ja joka ei ole muotoa (x, y, x).

Lemmasta II 4.5. seuraa, että

- *jos suhteikossa on Hamiltonin kulku, suhteikko on yhtenäinen,*
- *jos suhteikossa on Hamiltonin kierros, suhteikko on vahvasti yhtenäinen.*

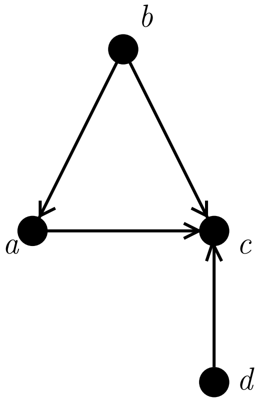
Käänteiset väitteet eivät päde, kuten kohta nähdään esimerkkien kautta. Itse asiassa kysymys siitä onko annetussa suhteikossa Hamiltonin kulku tai kierros on osoittautunut hyvin vaikeaksi. Mitään yleispätevä karakterisaatiota suhteikoille (tai edes verkoille), joista löytyy Hamiltonin kulku tai kierros, ei ole keksitty. Asian tarkastelu vaatii yleensä kekseliäisyyttä ja suhteikosta riippuen erilaiset menetelmät saattavat toimia.

Esimerkki 1. *Suhteikossa*



on olemassa Hamiltonin kulku, mutta ei ole Hamiltonin kierrosta.
Hamiltonin kulku on helppo keksiä - sellaiseksi kelpaa kulku (b, a, c)*. Hamiltonin kierrosta ei löydy, koska suhteikko ei ole vahvasti yhtenäinen.*

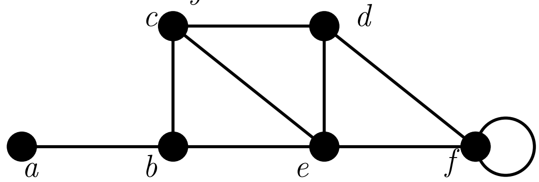
Suhteikko



on yhtenäinen, mutta siinä ei ole Hamiltonin kulkua. Tämä nähdään seuraavasti. Olkoon $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ Hamiltonin kulku suhteikossa. Tällöin jokaisella $0 \leqslant i < n$ pisteestä x_i lähtee suhteikossa ainakin yksi nuoli, nimittäin nuoli $\overrightarrow{x_i x_{i+1}}$. Samoin jokaisella $0 < i \leqslant n$ pisteseen x_i saapuu ainakin yksi nuoli, nimittäin nuoli $\overrightarrow{x_{i-1} x_i}$. Erityisesti jokaisella $i = 1, \ldots, n-1$ pätee $d_+(x_i) \geqslant 1$, $d_-(x_i) \geqslant 1$. Tästä seuraava seuraava johtopäätos - jos suhteikossa G on piste x jolle $d_+(x) = 0$, tämä piste voi esiintyä Hamiltonin kulussa ainoastaan kulun loppupisteenä x_n. Erityisesti tällaisia pisteitä voi silloin suhteikossa olla korkeintaan yksi. Samoin, jos suhteikossa G on piste x jolle $d_-(x) = 0$, tämä piste voi esiintyä Hamiltonin kulussa ainoastaan kulun alkupisteenä x_0. Erityisesti tällaisia pisteitä voi silloin suhteikossa olla korkeintaan yksi.

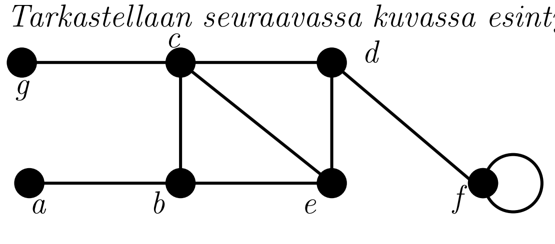
Koska tarkasteltavassa suhteikossa on kaksi pistettä b, d joille $d_+(b) = 0 = d_+(d)$, Hamiltonin kulku ei ole mahdollinen.

Esimerkki 2. *Symmetrisessä suhteikossa*



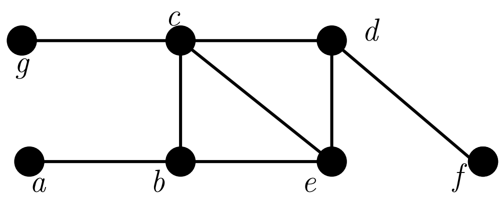
on helppoa keksiä Hamiltonin kulku (a, b, c, d, e, f). Hamiltonin kierrosta sen sijaan ei löydy, vaikka suhteikko on vahvasti yhtenäinen. Tämä nähdään seuraavasti. Olkoon $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ Hamiltonin kierros. Tällöin jokaisella $1 \leqslant i \leqslant n-1$ solmulla x_i on suhteikossa ainakin kaksi naapuria - x_{i-1} ja x_{i+1}, jotka ovat eri solmuja, koska Hamiltonin kierros on yksinkertainen. Myös pistellä $x_0 = x_n$ on ainakin kaksi naapuria - x_1 ja x_{n-1}. Huomaa, että $x_1 \neq x_{n-1}$ koska kulku on yksinkertainen ja lisäksi oletamme, että se ei ole muotoa (x, y, x). Näin ollen, jos symmetrisessä suhteikossa on olemassa Hamiltonin kierros, jokaisen pisteen asteen on oltava vähintään 2. Koska tarkasteltavassa verkossa on olemassa piste, jonka aste on 1 (piste a), Hamiltonin kierros on mahdoton.

Tarkastellaan seuraavassa kuvassa esintyvää symmetristä suhteikkoa G.



Suhteikossa G ei ole edellisen nojalla Hamiltonin kierrosta, sillä suhteikossa on ainakin yksi piste, jonka aste on 1.
Osoitetaan, että suhteikossa G ei ole myöskään Hamiltonin kulkua. Oletetaan, että $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ on Hamiltonin kulku suhteikossa, joka ei ole kierros. Tällöin kaikilla $i = 1, \ldots, n-1$ pisteellä x_i on ainakin kaksi eri naapuria - x_{i-1} ja x_{i+1}. Näin ollen, jos symmetrisessä suhteikossa on piste x jolle $d(x) = 1$, tämä piste voi esiintyä Hamiltonin kulussa vain alku-tai loppupisteenä. Erityisesti tällaisia pisteitä voi olla suhteikossa korkeintaan kaksi. Tarkasteltavassa suhteikossa on kaksi pistettä, joiden aste on 1, pisteet a ja g. Näin ollen Hamiltonin kulun on alkavaa toisessa näistä pisteistä ja loppuvaa toisessa. Erityisesti piste f on tällöin Hamiltonin kulun $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ "sisäpiste" eli $f = x_i$, $0 < i < n$. Tällöin pisteellä f on suhteikossa kaksi eri naapuria - x_{i-1} ja x_{i+1}, joista lisäksi kumpikin ei voi olla itse f, sillä Hamiltonin kulku on yksinkertainen. Mutta, vaikka $d(f) = 2$, toinen pisteen f naapureista suhteikossa on piste f itse. Näin olleen, pistellä f on todellisuudessa vain yksi naapuri, joka ei ole piste f itse. Tämä on ristiriita, näin ollen Hamiltonin kierrosta suhteikossa ei ole.

Itse asiassa on selvä, että Hamiltonin kulku tai kierros ei voi sisältää silmukoita, joten niitä ei tarvitse edes ottaa huomioon. Suhteikossa G on Hamiltonin kulku/kierros jos ja vain jos Hamiltonin kulku/kierros löytyy suhteikosta G', joka saadaan poistamalla G:stä kaikki silmukat.
Poistamalla edellä tarkastelusta suhteikosta G ainoa silmukka saadaan verkko G', jossa on kolme pistettä, joiden aste on 1. *Tästä seuraa, että verkossa G' ei voi olla Hamiltonin kulkua. Näin ollen myös G:ssä ei ole Hamiltonin kulkua.*



Suhteikko G'

(Yksinkertaisia) havaintoja edellisen esimerkin perusteella:

- Jos suhteikossa on piste x jolle $d_+(x) = 0$, niin suhteikossa ei voi olla Hamiltonin kierrosta ja Hamiltonin kulun on pakko alkaa pisteestä x. Näin ollen, jos tällaisia pisteitä on ainakin kaksi, Hamiltonin kulku ei ole mahdolinen.

- Samoin, jos suhteikossa on piste x jolle $d_-(x) = 0$, niin suhteikossa ei voi olla Hamiltonin kierrosta ja Hamiltonin kulun on pakko loppua pisteeseen x. Näin ollen, jos tällaisia pisteitä on ainakin kaksi, Hamiltonin kulku ei ole mahdollinen.

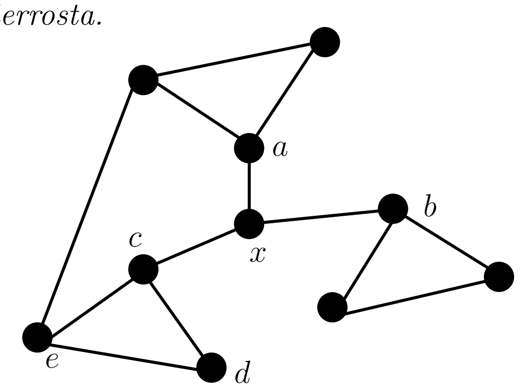
- Silmukat eivät vaikuta Hamiltonin kulun/kierroksen olemassaoloon. Näin ollen, tarkasteltaessa onko annetussa suhteikossa Hamiltonin kulkua/kierrosta voidaan ensin poistaa kaikki silmukat.

- Jos *verkossa G* on ainakin yksi piste x, jonka asteelle pätee $d(x) \leqslant 1$, verkossa ei voi olla Hamiltonin kierrosta. Jos tällaisia pisteitä on ainakin kolme, Hamiltonin kulkua ei voi olla. Jos tällaisia pisteitä on tasan kaksi, niiden on pakko olla Hamiltonin kulun alku- ja loppupiste.

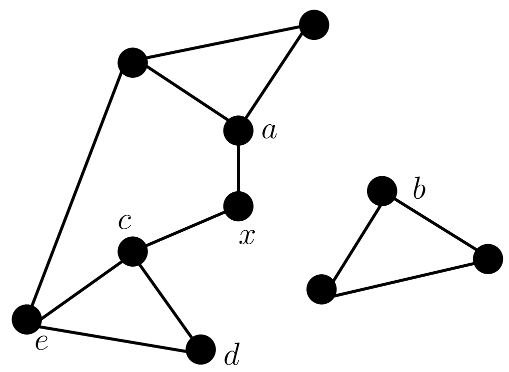
Oletetaan, että *verkossa* G on Hamiltonin *kierros* $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Olkoon $x = x_i \in P_G$ verkon mielivaltainen solmu. Tällöin kierros sisältää kaksi verkon viivaa $\overline{x_{i-1}x}$ ja $\overline{x_{i+1}x}$, joiden toisena päätepisteenä on x. Tässä $x_{i-1} = x_{n-1}$ ja $x_{i+1} = x_1$ jos $x = x_0 = x_n$. Lisäksi se ei voi sisällä mitään muita viivoja, joiden toinen päätepiste on x, sillä muuten kierros palaa pisteseen x, eikä ole enää yksinkertainen.
Toisin sanoen, kun Hamiltonin kierros kulkee jonkun pisteen kautta, se kulkee kahta viivaa pitkin ja kaikki muut x:stä lähtevät viivat on pakko sulkea tarkastelusta pois.

Oletetaan, että *verkossa* G on Hamiltonin *kulku* $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, joka **ei ole** Hamiltonin kierros. Olkoon $x = x_i \in P_G$ verkon mielivaltainen solmu. Jos $i = 1, \ldots, n-1$, eli solmu x_i on kulun "sisäpiste", voidaan päätellä kuin edellä, että kulku sisältää tällöin kaksi verkon viivaa $\overline{x_{i-1}x}$ ja $\overline{x_{i+1}x}$, joiden toisena päätepisteenä on x. Lisäksi se ei voi sisältää mitään muita viivoja, joiden toinen päätepiste on x, sillä muuten kulku palaa pisteseen x, eikä ole enää yksinkertainen.
Näin ollen, kun Hamiltonin kierros kulkee jonkun "sisäpisteensä" kautta, se kulkee kahta viivaa pitkin ja kaikki muut x:stä lähtevät viivat on pakko sulkea tarkastelusta pois.
Oletetaan, että $x = x_0$ on kulun *alkupiste*. Tällöin kulku sisältää **tasan yhden** viivan $\overline{xx_1}$ eikä voi sisältää mitään muita viivoja, jotka lähtevät pisteestä x. Samanlaiseen johtopäätökseen päädytään, kun tarkastellaan loppupistettä.

Esimerkki 3. *Seuraavassa kuvassa alla esitetystä verkosta G helposti löytyy Hamiltonin kulku (etsi!). Näytetään edellisten havainnon avulla, että verkossa G ei ole Hamiltonin kierrosta.*



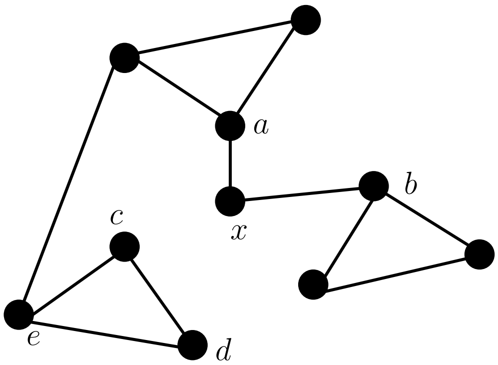
Oletetaan, että verkossa on Hamiltonin kierros. Tarkastellaan pisteestä x lähteviä viivoja $\overline{xa}, \overline{xb}, \overline{xc}$. Näistä **tasan kaksi** *ovat Hamiltonin kierroksessa, joten* **tasan yksi** *ei ole. Oletetaan ensin, että viiva $v = \overline{xb}$ ei ole Hamiltonin kierroksessä. Tällöin Hamiltonin kierros on samalla Hamiltonin kierros verkossa, joka saadaan verkosta G poistamalla siitä viivaa v, toisin sanoen Hamiltonin kierros seuraavassa verkossa:*



Mutta tämä verkko on epäyhtenäinen, joten siinä ei voi olla Hamiltonin kierrosta.

Saadaan ristiriita.

Seuraavaksi tarkastellaan tapausta, jossa Hamiltonin kierroksessa ei ole viivaa $\overline{xa}$ tai viivaa $\overline{xc}$. Oletetaan vaikkapa, että Hamiltonin kierroksessa ei esiinny viiva $\overline{xc}$. Toinen tapaus on samanlainen. Nyt ollaan etsimässä Hamiltonin kierrosta seuraavasta verkosta, joka saadaan verkosta G poistamalla siitä viivaa $\overline{xc}$:

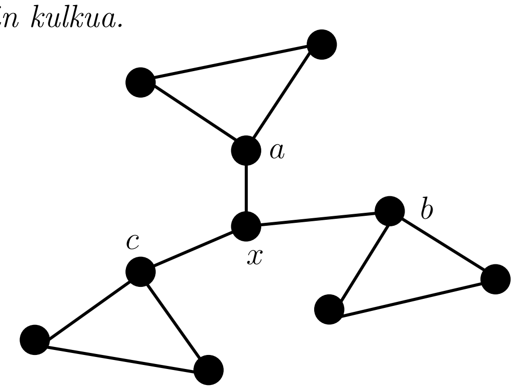


Osoitetaan, että tässä verkossa ei ole Hamiltonin kierrosta. Uudessa verkossa pisteen c aste on 2, joten Hamiltonin kierroksen on pakko sisältää molemmat viivat $\overline{cd}$ ja $\overline{ce}$. Samanlaisesta syystä (pisteen d aste on 2) kierroksen on pakko sisältää viivat $\overline{cd}$ ja $\overline{de}$. Kierros siis sisältää osuuden $e-c-d-e$, jossa piste e esiintyy kaksi kertaa. Koska verkossa on muitakin pisteitä, tämä on ristiriidassa kierroksen yksinkertaisuuden kanssa.

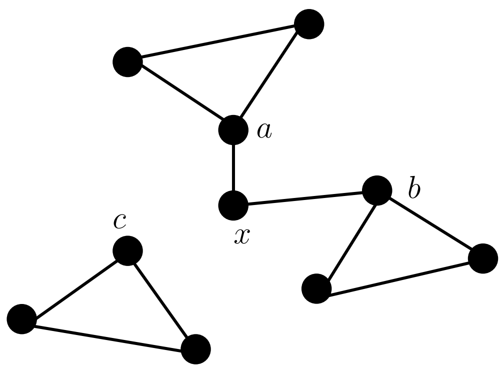
Samantyyppiseen ristiriitaan päädytään, jos oletetaan, että Hamiltonin kierros ei sisällä viivaa $\overline{xa}$ (symmetrinen edellisen tapauksen kanssa).

Näin ollen, alkuperäisessä verkossa G ei voi olla Hamiltonin kierrosta.

Esimerkki 4. *Näytetään, että seuraavassa kuvassa esitetyssä verkossa G ei ole Hamiltonin kulkua.*



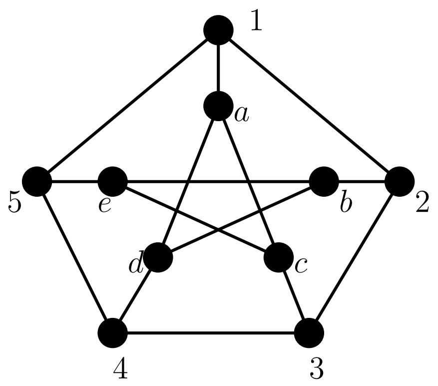
Oletetaan, että verkossa on Hamiltonin kulku. Tarkastellaan pisteestä x lähteviä viivoja $\overline{xa}, \overline{xb}, \overline{xc}$. Tällöin viivoista $\overline{xa}, \overline{xb}, \overline{xc}$ **korkeintaan kaksi** *esiintyvät Hamiltonin kulussa, joten* **ainakin yksi** *ei ole. Oletetaan esimerkiksi, että viiva $v = \overline{xc}$ ei ole Hamiltonin kulussa. Tällöin Hamiltonin kulku on samalla Hamiltonin kulku verkossa, joka saadaan verkosta G poistamalla siitä viivan v, toisin sanoen Hamiltonin kulku seuraavassa verkossa:*



Mutta tämä verkko on epäyhtenäinen, joten siinä ei voi olla Hamiltonin kulkua. Saadaan ristiriita.
Samalaiseen ristiriitaan päädytään, jos oletetaan, että Hamiltonin kulussa ei ole viivaa $\overline{xa}$ tai viivaa $\overline{xb}$.

Oletetaan, että verkossa G on Hamiltonin kierros $\bar{x}$ ja oletetaan, että verkon pistejoukko P_G jaetaan kahteen erilliseen osajoukkoon A, B, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = P_G$. Oletetaan vaikkapa, että Hamiltonin kierros alkaa joukon A pisteestä. Tarkastellaan kaikkia verkon viivoja jotka ovat muotoa $\overline{xy}$, missä $x \in A$ ja $y \in B$. Tällöin joka kertaa kun kierroksessä esiintyy tällainen viiva, eli kun kierroksessä joudutaan joukkoon B, täytyy myöhemmin tulla joukosta B ulos toista tällaista viivaa pitkin. Tästä seuraa, että tällaiset viivat esiintyvät kierroksessä ”pareissa ”, joten niitä on pakko olla kierroksessä **parillinen määrä**.

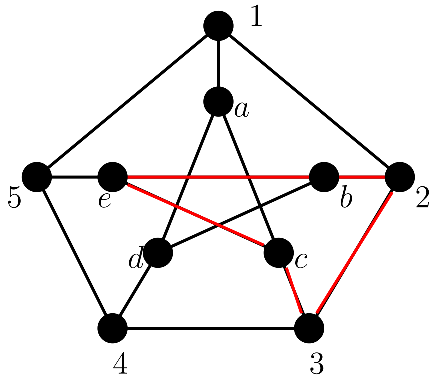
Esimerkki 5. *Osoitetaan, että seuraavassa kuvassa esiintyvässä niin sanotussa* **Petersenin verkossa** *ei ole Hamiltonin kierrosta (huom. Hamiltonin kulku sen sijaan löytyy helposti).*



Merkitään verkon ”ulkopisteitä” symboleilla $1, 2, 3, 4, 5$ *ja ”sisäpisteitä” symboleilla* a, b, c, d, e, *kuten kuvassa. Näiden kahden pistejoukon välillä verkossa on* 5 *viivaa -* $\overline{1a}$, $\overline{2b}$, $\overline{3c}$, $\overline{4d}$, $\overline{5e}$, *joita kutsumme jatkossa myös ”silloiksi”. Edellisen huomioon nojalla Hamiltonin kierroksessä esiintyy täsmälleen parillinen määrä siltoja, eli kaksi tai neljä.*

1) Tarkastellaan tapausta, jossa yhdistäviä viivoja on 4, *eli tasan yksi viivoista ei ole kierroksessä. Symmetrian vuoksi voidaan olettaa, että* $\overline{5e}$ *on ainoa sellainen viiva. Näin ollen* $\overline{5e}$ **ei** *esiinny kierroksessä, kun taas viivat* $\overline{1a}$, $\overline{2b}$, $\overline{3c}$, $\overline{4d}$ *esiintyvät.*
Tällöin Hamiltonin kierroksessä välttämättä esiintyvät ainoat kaksi muuta pisteseen 5 *liityvää viivaa, eli viivat* $\overline{15}$ *ja* $\overline{45}$. *Samasta syystä kierroksessä välttämättä esiintyvät viivat* $\overline{eb}$ *ja* $\overline{ec}$. *Oletuksen mukaan viiva* $\overline{4d}$ *esiintyy kierroksessä. Koska kierroksessä esiintyvät viivat* $\overline{54}$ *ja* $\overline{4d}$, *jotka kulkevat pisteseen* 4 *kautta, viiva* $\overline{34}$ *ei esiinny kierroksessä. Siirtymällä takastelu pisteseen* 3 *nähdään sen jälkeen, että tällöin viivat* $\overline{3c}$ *ja* $\overline{23}$ *välttämättä*

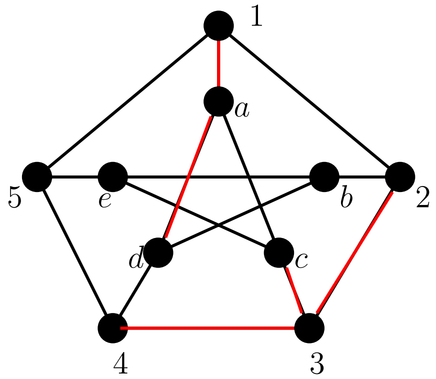
ovat kierroksessä. Lisäksi oletuksen nojalla viiva $\overline{2b}$ on kierroksessä. Näin ollen kierros sisältää viivat $\overline{eb}$, $\overline{b2}$, $\overline{23}$, $\overline{3c}$, $\overline{ce}$. Mutta nämä viivat muodostavat osakierroksen $(e, b, 2, 3, c, e)$ Hamiltonin kierroksen aitona osana. Tämä on ristiriidassa Hamiltonin kierroksen yksinkertaisuuden kanssa.



2) Tarkastellaan tapausta, jossa yhdistäviä viivoja on tasan kaksi. Symmetrin vuoksi voidaan olettaa, että yksi niistä on $\overline{1a}$. Tällöin joko $\overline{ad}$ tai $\overline{ac}$ ovat kierroksessä, voidaan olettaa, että esimerkiksi $\overline{ad}$ on kierroksessä (toinen tapaus symmetrinen), jolloin $\overline{ac}$ varmasti **ei ole** *kierroksessä. Jälkimmäisestä voidaan heti päätellä, että viivat $\overline{ec}$ ja $\overline{c3}$ ovat kierroksessä. Erityisesti $\overline{1a}$ ja $\overline{c3}$ ovat kierroksessä. Nämä ovat siis oletuksemme mukaan olevat ainoat kaksi " siltaa ", jotka ovat kierroksessä, joten voidaan heti päätellä, että muut "sillat", eli viivat $\overline{2b}$, $\overline{4d}$, $\overline{5e}$ eivät ole kierroksessä.*

Koska $\overline{2b}$ ei ole kierroksessä, viivat $\overline{12}$ ja $\overline{23}$ ovat kierroksessä. Koska $\overline{4d}$ ei ole kierroksessä, viivat $\overline{34}$ ja $\overline{45}$ ovat kierroksessä.

Erityisesti kaikki kolme viivaa, jotka liittyvät pisteseen 3 eli viivat $\overline{23}$, $\overline{34}$, $\overline{c3}$ ovat kierroksessä. Tiedämme, että tämä on mahdotonta Hamiltonin kieroksessä. Saadaan riistiriita.



Kaksijakoiset verkot

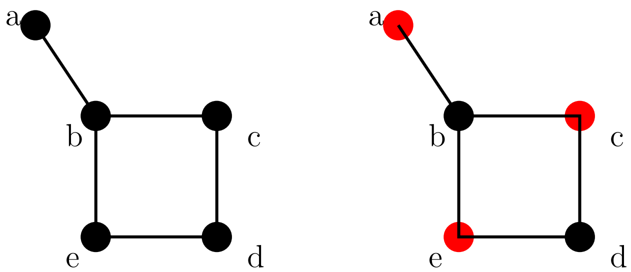
Verkko G on **kaksijakoinen** jos sen pisteiden joukko P_G voidaan jakaa kahdeksi epätyhjäksi erilliseksi joukoksi, $P_G = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, niin, että kaikki verkon viivat ovat muotoa $\overline{xy}$, missä $x \in A$ ja $y \in B$. Esitystä $P_G = A \cup B$ sanotaan tällöin solmujoukon **jaoksi**.

Toisin sanoen verkko G on kaksijakoinen jos ja vain jos

$$V_G \subset \{\overline{xy} \mid x \in A, y \in B\},$$

missä A ja B muodostavat joukon P_G **jaon**.

Kaksijakoisuutta voidaan ajatella verkon pisteiden värittämisen kautta. Kuvitellaan, että joukon A pisteet ovat "punaisia" ja joukon B pisteet ovat "mustia". Tällöin verkon jokainen viiva yhdistää erivärisiä pisteitä. Näin ollen verkko on kaksijakoinen jos ja vain jos sen pisteet voidaan värittää kahdella eri värillä, niin, että *mikään verkon viiva ei yhdistä samanvärisiä pisteitä.*



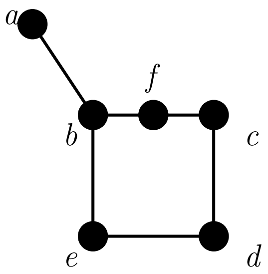
Eräs kaksijakoinen verkko ja sen väritys kahdella värillä

Yhtenäisen verkon pisteiden värittäminen kahdella värillä on suhteellisen helppoa käytännössä. Aloitetaan jostakin verkon pisteestä, esim. kuvassa yllä aloitetaan pisteestä a. Väritetään se punaiseksi. Kaikkien sen naapureiden (kuvan verkossa pisteet b, c) on tällöin oltava mustia. Tässä vaiheessa voi heti käydä niin, että kaksi aloituspisteen naapurin välillä on viiva, tällöin päädytään heti ristiriitaan (samanväriset pisteet eivät voi olla yhteydessä kaksijakoisessa verkossa). Tällainen ristiriita osoittaisi, että verkko ei ole kaksijakoinen. Muuten jatketaan samalla tavalla - jokaisessa vaiheessa väritetään jo väritettyjen pisteiden naapureita vastakkaisvärisiksi ja tarkistetaan johtaako tämä ristiriitaan. Jos johtaa, niin verkko ei ole kaksijakoinen ja voidaan lopettaa. Jos kaikki pisteet saadaan väritettyä ilman ristiriitoja, verkko on kaksijakoinen ja sille on löydetty jako.

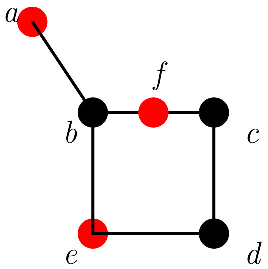
Jos verkko on epäyhtenäinen, väritetään erikseen yllä mainitulla algoritmilla jokainen sen komponentti. Jos se onnistuu, verkko on kaksijakoinen. Jos yhdessäkin komponentissa joudutaan ristiriitaan, verkko ei ole kaksijakoinen.

Esimerkiksi verkossa yllä aloitetaan pisteestä a ja väritetään se punaiseksi. Tällöin sen naapurin b on oltava musta. Koska b on musta, sen naapureiden e ja c on oltava punaisia. Tässä vaiheessa voidaan huomata, että e ja c eivät ole naapureita, joten mitään ristiriitaa ei synny. Lopuksi väritetään d mustaksi, esimerkiksi koska sen on punaisen pisteen c naapuri. Se on myös pisteen e naapuri, mutta e ei ole musta, joten ristiriita ei synny. Verkon pisteiden värittäminen kahdella värillä on valmis. Lopuksi kannattaa vielä tarkistaa, että värityksessä mitkään naapurit eivät varmastikaan ole samanvärisiä.

Esimerkki 6. *Yritetään värittää kahdella värillä seuraavassa kuvassa esiintyvää verkkoa.*



Aloitetaan pisteestä a ja väritetään se punaiseksi. Sen naapurin b on oltava musta, sen naapurien f ja e on oltava punaisia, joten pisteen c on oltava musta (se on f:n naapuri). Kaikissa näissä välivaiheissa ei synny ristiriitoja. Kuitenkin tämän jälkeen pisteen d väritys on mahdoton - sillä on sekä musta naapuri c, että punainen naapuri e. Mikä tahansa yritys antaa d:lle jompikumpi väri johtaa ristiriitaan. Näin ollen verkko ei ole kaksijakoinen.



Kaksijakoisia verkkoja on helppoa karakterisoida niin sanottujen *syklien* avulla.

Sykli verkossa G on *epätriviaali yksinkertainen kierros* $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, jonka pituudelle pätee $n \geqslant 3$. Sykli on n-sykli jos sen pituus on n, eli jos se sisältää tasan n viivaa. Koska sykli on yksinkertainen kierros tällöin myös siinä esiintyvien **erilaisten** pisteiden $x_0, \dots, x_{n-1}$ lukumäärä on myös n.

Huomaa, että tapauksia $n = 0, 1$ emme salli, koska sykli halitaan olevan epätriviaali. Tapaus $n = 2$ taas vastaisi kierrosta (x, y, x) jossa mennään edestakaisin samaa viivaa pitkin. Tätäkin tapausta ei lasketa aidoksi sykliksi, koska emme haluaa, että ”viivat toistuisivat” syklissä.

3-sykli on geometrisesti ”kolmio”, 4-sykli ”neliö” (sopivasti piirrettynä) ja niin edelleen.

Lause III 2.8. Verkko on kaksijakoinen jos ja vain jos se ei sisällä n-syklejä, joiden pituus n on *pariton* kokonaisluku.

Lauseen todistus: Oletetaan, että kaksijakoinen verkko G sisältää syklin $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. Osoitamme, että tällöin n on välttämättä parillinen.
Olkoon $P_G = A \cup B$ verkon pistejoukon jako punaisiin ja mustiin pisteisiin. Voidaan olettaa, että x_0 on punainen. Tällöin x_1 on musta, x_2 on punainen ja niin edelleen. Yleisesti parillisella i piste x_i on punainen ja parittomalla i piste x_i on musta. Koska $x_n = x_0$ on punainen, luvun n on oltava parillinen.

Oletetaan, että verkossa G ei ole syklejä, joiden pituus on pariton. Osoitetaan, että verkko G on kaksijakoinen. Tarkastelemalla erikseen verkon komponentteja voidaan olettaa, että G on yhtenäinen. Kiinnitetään jokin $a \in P_G$ ja määritellään

$$A = \{x \in P_G \mid \text{ pisteiden } a \text{ ja } x \text{ välinen kulkuetäisyys on parillinen luku}\},$$

$$B = \{x \in P_G \mid \text{ pisteiden } a \text{ ja } x \text{ välinen kulkuetäisyys on pariton luku}\}.$$

Muistutus: pisteiden x ja y välinen kulkuetäisyys verkossa on pienin luonnollinen luku n jolla on olemassa n-pituinen kulku pisteestä x pisteseen y. Yhtenäisessä verkossa pituus on aina hyvin määritelty.

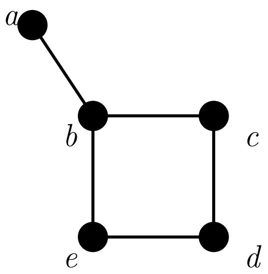
Osoitamme, että joukot A ja B muodostavat verkon jaon punaisiin ja mustiin pisteisiin. Meidän on osoitettava, että kaikki verkon viivat ovat muotoa $\overline{xy}$, missä $x \in A$ ja $y \in B$, toisin sanoen on osoitettava, että verkossa ei ole viivoja, jotka yhdistävät samanvärisiä pisteitä.

Olkoot $x, y \in A$ ja tehdään vasta-oletus: on olemassa viiva $\overline{xy}$. Johdetaan tästä ristiriita.
Olkoon $\bar{x} = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_n)$ lyhin (yksinkertainen) kulku pisteestä a pisteseen x ja olkoon $\bar{y} = (y_0 = a, x_1, \ldots, y_m)$ lyhin (yksinkertainen) kulku pisteestä a pisteseen y. Tällöin n ja m ovat oletuksemme mukaan parillisia. Tekisi mieli muodostaa kierros $(a, x_1, \ldots, x_n = x, y, y_{m-1}, \ldots, y_1, y_0 = a)$, joka on olemassa, koska verkossa on viiva $\overline{xy}$. Tämä kierros saadaan kulkemalla ensin kulku $\overline{x}$, sitten viiva $\overline{xy}$ ja sitten kulku $\overline{y}$ *käänteisessä järjestyksessä*. Tämän kierroksen pituus on $n + m + 1$ eli pariton luku. Tästä ei kuitenkaan vielä saada ristiriita oletuksen kanssa, koska tämä kierros ei välttämättä ole yksinkertainen.

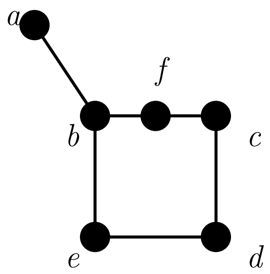
Olkoon i **suurin** luku $i = 0, \ldots, n$ jolla solmu x_i esiintyy myös kulussa $\overline{y}$. Tällainen on olemassa, koska ainakin $x_0 = a = y_0$ esiintyy molemmissa kuluissa. Nyt $x_i = y_k$ jollakin $k = 0, \ldots, n$. Osoitetaan, että $i = k$. Tehdään vasta-oletus, oletetaan esimerkiksi, että $i < k$. Tällöin kulku $(a = x_0, x_1, \ldots, x_i = y_k, y_{k+1}, \ldots, y_m = y)$ on kulku pisteestä a pisteseen y, jonka pituus on aidosti pienempi kuin m. Tämä on mahdotonta etäisyyden määritelmän mukaan. Samanlaiseen ristiriitaan päädytään, jos oletetaan, että $i > k$. Näin ollen $k = i$, $x_i = y_i$ ja joukot $\{x_{i+1}, \ldots, x_n = x\}$ ja $\{y_{i+1}, \ldots, y_m = y\}$ ovat erillisiä. Toisin sanoen, jos nyt muodostetaan kierros $(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n = x, y = y_m, y_{m-1}, \ldots, y_{i+1}, y_i = x_i)$, tästä kierroksesta tulee **yksinkertainen**. Lisäksi sen pituus $n + m - 2i + 1$ on pariton, koska n ja m ovat parillisia. Ollaan siis konstruoitu verkossa sykli, jonka pituus on pariton luku. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Jos $x, y \in B$, saadaan samanlainen ristiriita - tällöin n, m ovat molemmat parittomia, joten summa $n + m$ on taas parillinen. $\square$

Esimerkki 7. *Tarkastellaan uudestaan verkkoja G ja G':*



Verkko G



Verkko G'

Nähdään heti, että verkossa G' on sykli (b, f, c, d, e, b), jonka pituus 5 on pariton. Edellisen tuloksen nojalla verkko ei ole kaksijakoinen.

Verkossa G taas on olemassa vain yksi sykli (b, c, d, e, b), jonka pituus 4 on parillinen. Näin ollen, verkko G on kaksijakoinen.

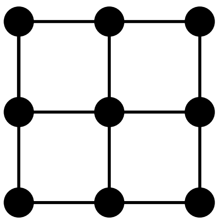
Huomautus: Kun verkot ovat suhteellisen yksinkertaisia ja pieniä, niistä on helppoa nähdä syklit. Sen sijaan jos verkko on monimutkainen, viivat leikkavat toisiaan ja niitä on paljon, saattaa olla vaikeata nähdä syklit ja varmistua, että paritonpituisia ei varmastikaan löydy. Tästä syystä käytännössä kannattaa suosia väritysalgoritmia, paitsi tietysti silloin kun syklejä näkee helposti.

Hamiltonin kulut kaksijakoisessa verkossa

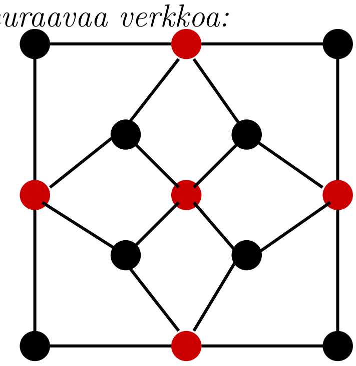
Oletetaan, että G on kaksijakoinen verkko, joka sisältää k punaista ja l mustaa pistettä. Oletetaan, että verkossa G on Hamiltonin kulku $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$.
Olkoon esimerkiksi piste x_0 punainen. Tällöin x_1 on musta, x_2 on punainen ja niin edelleen. Tästä seuraa:

- Jos kulku on **kierros**, $x_n = x_0$ on punainen, mistä seuraa, että n on parillinen. Verkossa on tällöin n pistettä, joista **tasan puolet** eli solmut $x_1, x_3, \ldots, x_{n-1}$ ovat mustia ja **tasan puolet** eli solmut $x_0, x_2, \ldots, x_{n-2}$ ovat punaisia.
- Yleisesti punaisten ja mustien pisteiden lukumäärä voi erota **korkeintaan yhdellä**.

Esimerkki 8. *Seuraavassa kuvassa esiintyvä verkko on kaksijakoinen (HT). Verkossa on 9 pisteitä. Edellisen nojalla verkossa ei ole Hamiltonin kierrosta.*
Hamiltonin kulku sen sijaan löytyy (HT).



Esimerkki 9. *Tämä on sama kuin esimerkki II 5.5.c Junnilan monisteessa. Tarkastellaan seuraavaa verkkoa:*



Kuten kuvasta nähdään, verkko on kaksijakoinen ja sisältää 5 punaista pistettä sekä 8 mustaa pistettä. Koska $|8 - 5| = 3 > 1$, verkossa ei voi olla edes Hamiltonin kulkua.

Täydelliset kaksijakoiset verkot

Olkoon G kaksijakoinen verkko, A sen punaisten pisteiden joukko ja B sen mustien pisteiden joukko. Määritelmän mukaan tällöin verkon jokainen viiva on muotoa $\overline{xy}$, missä

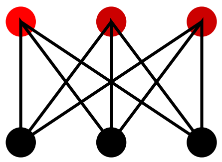
$x \in A$, $y \in B$. Yleisesti ottaen käänteisen väitteen ei tällöin tarvitse pitää paikkaansa eli mikä tahansa viiva $\overline{xy}$, missä $x \in A$, $y \in B$, ei välttämättä ole verkon viiva.

Kaksijakoinen verkko G on **täydellinen kaksijakoinen verkko** jos sen pistejoukolla P_G on olemassa jako $P_G = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ siten, että

$$V_G = \{\overline{xy} \mid x \in A, y \in B\}.$$

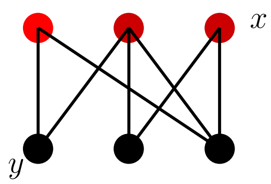
Täydellisestä kaksijakoisesta verkosta G, jossa on n punaista ja m mustaa pistettä, käytetään merkintää $K_{n,m}$. Kaksi tällaista verkkoa ovat isomorfisia, joten merkintä identifioi verkon yksikäsitteisesti isomorfiaa vaille.

Esimerkki 10. *Täydellinen verkko $K_{3,3}$:*



Verkko on kaksijakoinen, koska jokainen punainen piste on yhteydessä vain mustiin pisteisiin ja jokainen musta piste on yhteydessä vain punaisiin pisteisiin. Verkko on täydellinen kaksijakoinen, koska jokainen punainen piste on yhteydessä jokaiseen mustaan pisteseen ja päinvastoin.

Verkko



on kaksijakoinen, mutta ei ole täydellinen kaksijakoinen verkko, sillä punainen piste x ja musta piste y eivät ole yhteydessä toisiinsa.

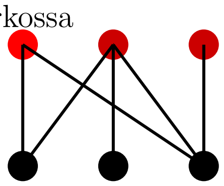
Lemma. *Olkoon $G = K_{n,m}$ täydellinen kaksijakoinen verkko, jossa on n punaista ja m mustaa pistettä. Oletetaan, että $n \geqslant m$.*

(1) Verkossa G on Hamiltonin kierros jos ja vain jos $n = m$.

(2) Verkossa G on Hamiltonin kulku, mutta ei ole Hamiltonin kierrosta jos ja vain jos $n = m + 1$.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Edellinen tulos ei ole voimassa mielivaltaisessa kaksijakoisessa verkossa. Esimerkiksi verkossa



ei ole Hamiltonin kierrosta (miksi?), vaikka verkko on kaksijakoinen ja punaisia pisteitä on yhtä paljon kuin mustia.

Hamiltonin kulut täydellisessä suhteikossa

Muistutus: suhteikko G on täydellinen, jos kaikilla $x, y \in P_G$ ainakin toinen nuolista $\overrightarrow{xy}$, $\overrightarrow{yx}$ on suhteikossa G.

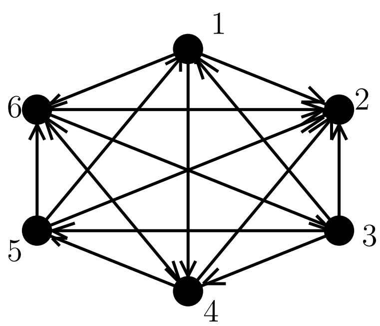
On selvä, että täydellisessä *verkossa* aina löytyy Hamiltonin kierros. Yleisemmin seuraavat tosiasiat pätevät:

- Täydellisessä suhteikossa G on aina olemassa Hamiltonin kulku. (**Lause II 5.4.**)
- Täydellisessä suhteikossa G on Hamiltonin kierros jos ja vain jos G on vahvasti yhtenäinen. (**Lause II 5.5.**)

Lause II 5.4. todistetaan näyttämällä, että mikä tahansa täydellisen suhteikon yksinkertainen kulku, joka ei vielä sisältää kaikkia suhteikon pisteitä, voidaan "täydentää" mielivaltaisesti valitulla uudella pisteellä (Lemma II 5.3.). Todistuksen antama Hamiltonin kulun konstruktiomenetelmää voidaan soveltaa myös käytännössä (kts. esimerkki 11 alla).

Lauseen II 5.5. todistus on samantapainen - näytetään, että mikä tahansa suhteikon yksinkertainen kierros, joka ei sisällä vielä kaikkia pisteitä voidaan täydentää uusilla pisteillä.

Esimerkki 11. *Etsitään turnauksesta*



Hamiltonin kulku pitämällä mielessä Lemman II 5.3. tulosta ja todistusta. Aloitetaan esimerkiksi kulusta $(1, 2)$*. Lemman II 5.3. nojalla tähän kulkuun voidaan aina lisätä piste* 3 *johonkin kohtaan. Koska suhteikossa on nuoli* $\overrightarrow{31}$*, lisätään se alkuun, saadaan kulku* $(3, 1, 2)$*. Seuraavaksi lisätään piste* 4*. Nuolta* $\overrightarrow{43}$ *suhteikossa ei ole, joten alkuun sitä ei voi lisätä. Nuoli* $\overrightarrow{34}$ *suhteikosta löytyy, mutta nuolta* $\overrightarrow{41}$ *ei ole, joten kulku* $(3, 4, 1, 2)$ *ei ole mahdollinen. Jatkamalla samalla tavalla huomataan, että piste* 4 *"mahtuu" kulussa pisteiden* 1 *ja* 2 *väliin, sillä suhteikossa on nuoli* $\overrightarrow{14}$ *ja* $\overrightarrow{42}$*. Saadaan kulku* $(3, 1, 4, 2)$*.*

Jatketaan samalla tavalla. Seuraavassa vaiheessa lisätään piste 5 *ja saadaan kulku* $(3, 5, 1, 4, 2)$*, sitten kulku* $(6, 3, 5, 1, 4, 2)$*.*

Hamiltonin kierrosta tästä turnauksesta ei löydy, sillä se ei ole vahvasti yhtenäinen (Miksi?).

Muita tuloksia

Lause II 5.7.: Olkoon G verkko, jonka pisteiden lukumäärä on suurempi kuin kaksi. Oletetaan, että kaikilla $x, y \in P_G$, $x \neq y$, joko $\overline{xy} \in V_G$ tai $d(x) + d(y) \geqslant p_G$. Tällöin verkossa

G on Hamiltonin kierros.

Todistus löytyy Junnilan monisteesta. Suorana seurauksena saadaan:

Korollaari II 5.8.: Olkoon G verkko, jonka pisteiden lukumäärä on suurempi kuin kaksi. Oletetaan, että kaikilla $x \in P_G$ pätee

$$d(x) \geqslant \frac{1}{2} p_G.$$

Tällöin verkossa on Hamiltonin kierros.