Verkot, syksy 2015
Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Kertaustehtäviä.

Näitä tehtäviä ei palauteta eikä tarkisteta. Ne ovat tarkoitettu lisämateriaaliksi eli kokeseen lukemisen tueksi. Ratkaisut ilmestyvät myös (suurinpiirtein koeviikon alussa).

Tehtävät ei ole vaikeus- tai kronologisessa järjestyksessä!

1. Luokkitele isomorfiaa vaille kaikki viiden pisteen verkot, joissa on 7 viivaa. Piirrä kuva jokaisesta mallista.

2. Olkoon suhteikon G pistejoukko $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ ja seuraajaluettelot

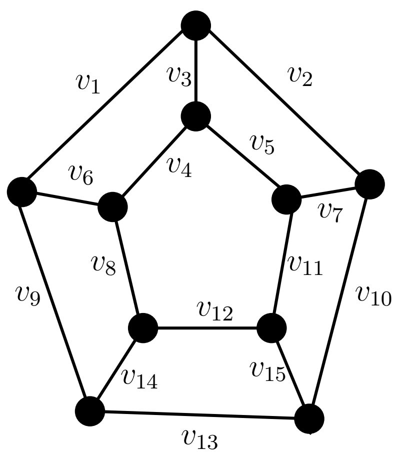
$$a: \ e; \ c: \ b; \ e: \ d; \ g: b;$$

$$b: \ a, f; \ d: \ a, e; \ f: \ g.$$

   Määrää suhteikon G vahvasti yhtenäiset komponentit. Osoita, että suhteikossa ei ole Hamiltonin kulkua, vaikka se on yhtenäinen.

3. Tarkastellaan seuraavassa kuvassa esitettyä verkkoa G ja sen viivajoukkoa

$$V_G = \{v_i \mid i = 1, \ldots, 15\}.$$



   Olkoot

$$R_1 = \{v_1, v_3, v_4, v_6, v_7, v_{10}, v_{11}, v_{15}\},$$

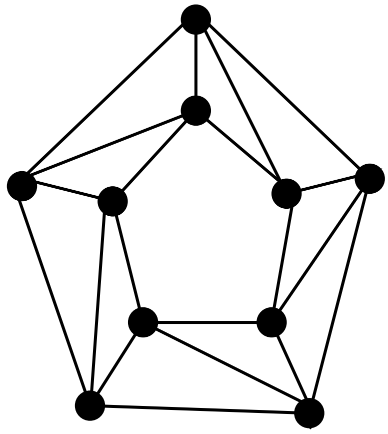
$$R_2 = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}\},$$

$$R_3 = \{v_i \mid i = 1, \ldots, 7\}.$$

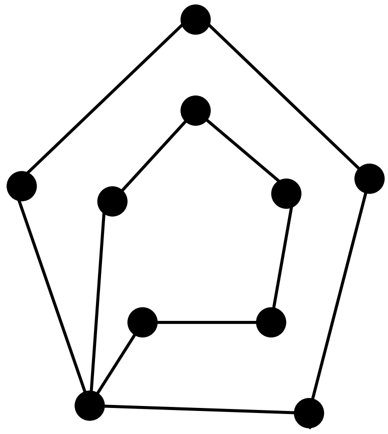
   a) Osoita, että R_1 ja R_2 ovat renkaistoja, mutta R_3 ei ole.
   b) Esitä $R_1 \triangle R_2$ erillisten renkaiden yhdisteenä.

4. Olkoon verkko G kuten edellisessä tehtävässä. Määritä verkolle jokin virittävä puu T, joka sisältää viivat v_1, v_3, v_4 ja v_{11}. Kuinka monta lehteä konstruoimallasi puulla T on?

5. Tutki kummankin kuvassa alla esitetyn verkon G, G' kohdalla löytyykö verkosta a) Hamiltonin kierros, b) Eulerin kierros.
Myönteisessä tapauksessa esitä kierros.

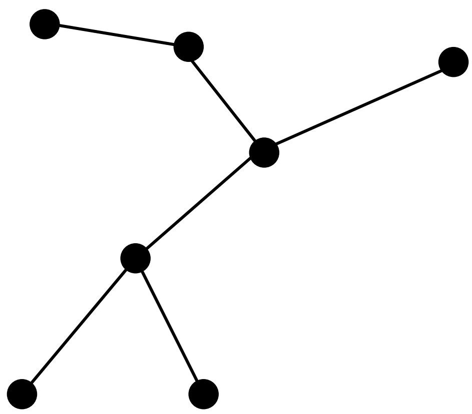


Verkko G



Verkko G'

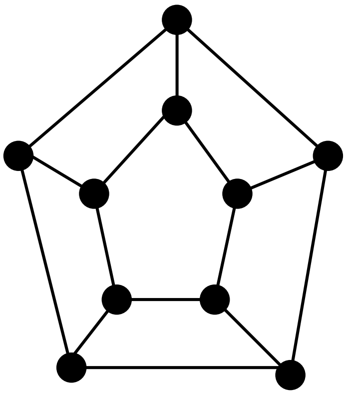
6. Olkoon T kuvassa alla esitetty puu. Keksi puulle sellainen yksisuuntaistus $\overrightarrow{T}$ jonka jokaisen kulun pituus on korkeintaan kaksi ja jossa on ainakin kolme erilaista kulkua, joiden pituus on kaksi. Riittää antaa piirros suhteikosta $\overrightarrow{T}$ ja esittää sen kolme erilaista kulkua, joiden pituus on kaksi.



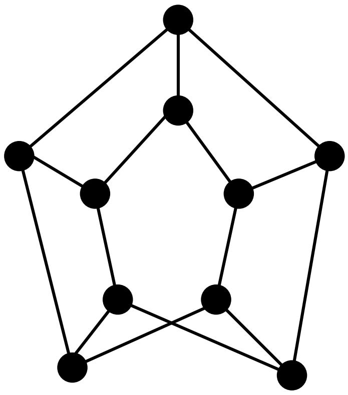
puu T

7. Jatkoa edelliselle tehtävälle. Määrää konstruoimasi yksisuuntaistuksen $\overrightarrow{T}$ vahvasti yhtenäiset komponentit. Onko suhteikolla $\overrightarrow{T}$ juuri? Jos on, onko se yksikäsitteinen?

8. Tutki ovatko kuvassa alla esitetyt verkot G, G' isomorfisia.



Verkko G



Verkko G'

9. Puussa on yksi 5-asteinen piste ja kaksi 2-asteista. Muut pisteet ovat lehtiä. Kuinka monta lehteä puulla on?

10. Shakkiturnauksen jokainen osanottaja pelaa yhden pelin jokaisen muun osanottajan kanssa. Osoita, että tulosluettelo voidaan järjestää niin, että jokainen on voittanut listassa seuraavan tai pelannut tämän kanssa tasapelin.

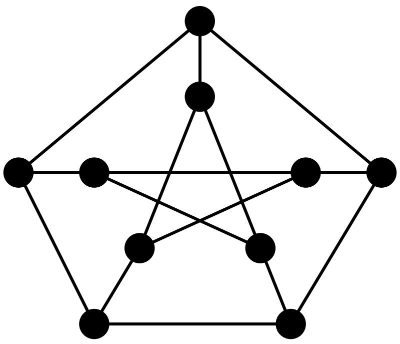
11. Olkoot $k, n \in \mathbb{N}$, $0 < k \leqslant n$. Merkinnällä $\mathbf{P}_k(n)$ tarkoitamme joukon $[n]$ k-alkioisten osajoukkojen muodostamaa joukkoa,

$$\mathbf{P}_k(n) = \{A \subset [n] \mid |A| = k\}.$$

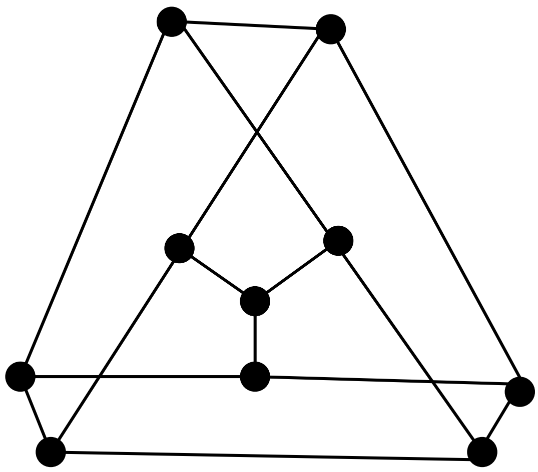
Määritellään joukossa $\mathbf{P}_k(n)$ relaatio

$$R = \{(A, B) \mid A \cap B = \varnothing\}.$$

a) Totea, että $G_k(n) = (\mathbf{P}_k(n), R)$ on verkko.
b) Piirrä kuvat verkoista $G_2(5)$ ja $G_3(5)$ sekä niiden komplementeista. Ovatko nämä verkot yhtenäisiä?
c) Osoita, että verkko $G_2(5)$ on isomorfinen seuraavien verkkojen G, G' kanssa:



Verkko G



Verkko G'

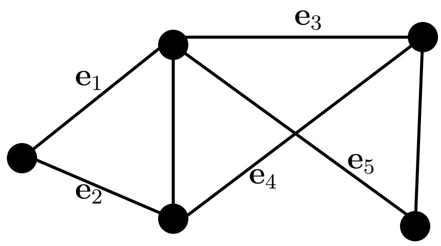
12. Luokkitele isomorfiaa vaille kaikki kuuden pisteen verkot, joissa on 12 viivaa. Piirrä kuva jokaisesta mallista.

13. Olkoon G kaksijakoinen verkko. Osoita, että

$$v_G \leqslant \frac{p_G^2}{4}.$$

14. Olkoon $G = (X, R)$ verkko ja olkoon $B \subset V_G$ jokin kokoelma sen viivoja. Symbolilla $G - B$ merkitään verkkoa H, joka saadaan G:stä poistamalla kaikki joukon B viivat. Toisin sanoen $P_H = P_G$ ja $V_H = V_G \backslash B$.
Sanomme, että joukko $B \subset V_G$ muodostaa *yhtenäisen* verkon G *leikkauksen*, jos kaikilla $A \subset B, A \neq B$ verkko $G - A$ on yhtenäinen, mutta joukko $G - B$ on epäyhtenäinen.

    Osoita, että kuvan 1 verkossa G joukko $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ muodostaa verkon G leikkauksen.



Kuva 1

15. Jatkoa edelliselle tehtävälle. Osoita, että verkon G joukko $C = \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$ muodostaa verkon G leikkauksen.

16. Olkoon suhteikon G pistejoukko $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ ja seuraajaluettelot

$$a \ : \ a, e; b \ : \ c; c \ : \ b, h; d \ : \ d; e \ : \ g;$$

$$f \ : \ i; g \ : \ b; h \ : \ e, h; i \ : \ d, f.$$

    Määrää suhteikon G yhtenäiset ja vahvasti yhtenäiset komponentit.

17. Olkoon A äärellinen joukko ja olkoon G ehtojen

$$P_G = \mathbf{P}(A) \text{ ja },$$

$$V_G = \{\overline{BC} \mid B, C \subset A, |B \backslash C| = |C \backslash B| = 1\}$$

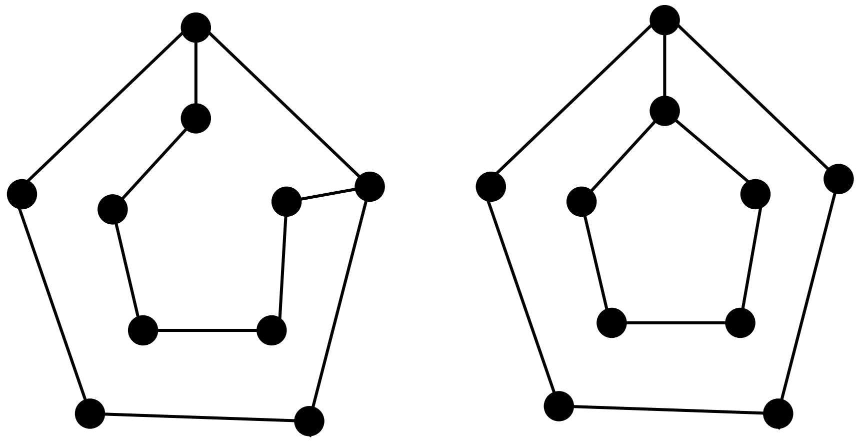
    määräämä verkko. Osoita, että solmut $B, C \in P_G$ ovat verkon G samassa yhtenäisessä komponentissa jos ja vain jos $|B| = |C|$.
    Tässä $\mathbf{P}(A)$ on joukon A potenssijoukko, eli sen kaikkien osajoukkojen joukko.

18. Luokittele isomorfiaa vaille kaikki sellaiset puut, joissa on yhdeksän solmua, joista tasan viisi ovat lehtiä. Neljän pisteen puiden luokittelua, joka käyttiin läpi luentomateriaalissa voi olettaa tunnetuksi.

19. a) Anna esimerkki täydellisen verkon K_4 yksisuuntaisuudesta, jonka ainoa juuri on solmu 1.
b) Anna esimerkki täydellisen verkon K_4 yksisuuntaisuudesta, jonka juuret ovat täsmälleen solmut $1, 2, 3$.

20. Dominopalikan kummassakin päässä on $0-6$ pistettä. Käytämme dominopalikasta, jonka toisessa päässä on x pistettä ja toisessa y pistettä, merkintää (x, y). Käytössäsi on seuraavat dominopalikat: $(1, 2)$, $(1, 6)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(6, 5)$, $(4, 5)$. Tutki voidaanko nämä palikat asettaa umpinaiseksi renkaaksi, jossa palikoiden toisiaan koskettavissa päissä on sama pisteluku.

21. Tutki kummankin kuvassa alla esitetyn verkon G, G' kohdalla löytyykö verkosta
a) Hamiltonin kierros, b) Eulerin kierros.
Myönteisessä tapauksessa esitä kierros.



22. Kuinka monta erilaista virittävää puuta täydellisellä kaksijakoisella verkolla $K_{2,n}$ on, $n \in \mathbb{N}$? (Neuvo: tarkastele ensin erikoistapauksia pienillä n).

23. Oletetaan, että verkon G jokaisen pisteen asteelle pätee on

$$d(x) \geqslant \frac{1}{2}(p_G - 1).$$

Osoita, että G on yhtenäinen.