Yhtenäisyys ja kulut

Aleksandr Pasharin

Yhtenäisyys

Olkoon G suhteikko ja $\varnothing \neq P \subsetneq P_G$ jokin sen solmujen joukon P_G aito ja epätyhjä osajoukko. Sanomme, että suhteikon nuoli $\overrightarrow{xy} \in N_G$ on **nuoli joukosta** P jos $x \in P$ ja $y \notin P$. Suhteikon nuoli $\overrightarrow{xy} \in N_G$ on **nuoli joukkoon** P jos $x \notin P$ ja $y \in P$.

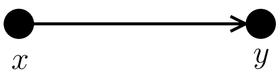
Määritelmä: Suhteikko G on **yhtenäinen** jos jokaisella $\varnothing \neq P \subsetneq P_G$ on olemassa nuoli joukosta P tai nuoli joukkoon P (tai molemmat). Huomaa, että eri osajoukoille $P, P' \subset P_G$ eri vaihtoehdot voivat toteuttaa - voi olla, että on olemassa nuoli joukosta P, mutta ei nuolta joukkoon P, ja päinvastoin - nuoli joukkoon P', mutta ei nuolta joukosta P'. Määritelmässä oleellista on vain se, että jokaiselle aidolle epätyhjälle solmujen joukon osajoukolle ainakin toinen vaihtoehdoista toteutuu.

Suhteikko G on **vahvasti yhtenäinen** jos jokaisella $\varnothing \neq P \subsetneq P_G$ on olemassa **sekä** nuoli joukosta P, **että** nuoli joukkoon P.

On selvä, että vahvasti yhtenäinen suhteikko on yhtenäinen, mutta käänteinen väite ei päde - on olemassa yhtenäisiä suhteikkoja, jotka eivät ole vahvasti yhtenäisiä.

Havainnollisesti ajatellen suhteikko on yhtenäinen jos mikään sen aito epätyhjä osa ei ole suhteikossa "täysin eristyksessä". Suhteikko on vahvasti yhtenäinen, jos jokaiseen sen aitoon epätyhjään osaan "pääsee sisään" sekä jokaisesta en aidosta epätyhjästä osasta "pääsee ulos".

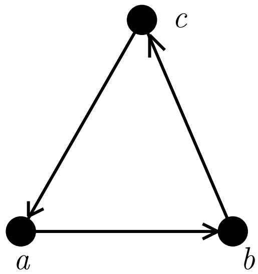
Esimerkki 1. *Olkoon G suhteikko, jolle $P_G = \{x, y\}$ ja $N_G = \{\overrightarrow{xy}\}$, $x \neq y$.*



Suhteikko G ei ole vahvasti yhtenäinen, sillä siinä ei ole olemassa nuolta joukkoon $P_1 = \{x\}$ (eikä nuolta joukosta $P_2 = \{y\}$).

Osoitetaan, että suhteikko G on kuitenkin yhtenäinen. Joukolla $P_G = \{x, y\}$ on tasan kaksi epätyhjää aitoa osajoukkoa, $P_1 = \{x\}$ ja $P_2 = \{y\}$. Joukosta P_1 on nuoli $\overrightarrow{xy}$. Se on samalla nuoli joukkoon P_2. Jokaisella epätyhjällä aidolla osajoukolla $P \subset P_G$ on siis ainakin nuoli joukosta P tai nuoli joukkoon P. Suhteikko on yhtenäinen.

Esimerkki 2. *Osoitetaan suoraan määritelmästä, että seuraavassa kuvassa esiintyvä suhteikko G on vahvasti yhtenäinen.*



Solmujen joukko on $P_G = \{a, b, c\}$.
Sen aidot epätyhjät osajoukot ovat $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.
Käydään läpi kaikki vaihtoehdot:
Joukko $\{a\}$: joukosta lähtee nuoli $\overrightarrow{ab}$ ja joukkoon saapuu nuoli $\overrightarrow{ca}$.
Joukko $\{b\}$: joukosta lähtee nuoli $\overrightarrow{bc}$ ja joukkoon saapuu nuoli $\overrightarrow{ab}$.
Joukko $\{c\}$: joukosta lähtee nuoli $\overrightarrow{ca}$ ja joukkoon saapuu nuoli $\overrightarrow{bc}$.
Joukko $\{a, b\}$: joukosta lähtee nuoli $\overrightarrow{bc}$ ja joukkoon saapuu nuoli $\overrightarrow{ca}$.
Joukko $\{a, c\}$: joukosta lähtee nuoli $\overrightarrow{ab}$ ja joukkoon saapuu nuoli $\overrightarrow{bc}$.
Joukko $\{b, c\}$: joukosta lähtee nuoli $\overrightarrow{ca}$ ja joukkoon saapuu nuoli $\overrightarrow{ab}$.

Näin ollen G on vahvasti yhtenäinen, erityisesti myös yhtenäinen.

Kuten edellisestä esimerkistä huomaa, yhtenäisyyden ja vahvan yhtenäisyyden osoittaminen suoraan määritelmästä lähtien on yleensä vaikeata, sillä se tarkoittaisi, että on käytävä läpi kaikki solmujoukon aidot ja epätyhjät osajoukot. Kun suhteikko on suhteellisen "iso", tällaisia osajoukkoja on hyvin paljon, esimerkiksi jo viiden solmun tapauksessa niitä on 30. Kaikenlaisia symmetrioita voi käyttää hyväksi tapausten vähentämiseksi, esimerkiksi nuoli joukosta P on samalla automaattisesti nuoli joukkoon $P_G \backslash P$, mutta tapauksia on silti yleensä liian paljon. Tästä syystä on kehitettävää muita lähestysmistapoja ja aputuloksia.

Sen sijaan sen osoittaminen, että verkko **ei ole** yhtenäinen on periaatteessa helpompaa ja voidaan suorittaa suoraan määritelmästä - riittää löytää yksi vastaesimerkki eli sellainen osajoukko $\emptyset \neq P \subsetneq P_G$, jolle ei löydy nuolta sisään eikä nuolta ulos. Samantyyppinen huomautus pätee vahvan yhtenäisyyden kohdalla.

Jos suhteikko on verkko, tai, yleisemmin, *symmetrinen suhteikko*, jokaista nuolta $\overrightarrow{xy} \in N_G$ vastaa nuoli $\overrightarrow{yx} \in N_G$. Tästä seuraa, että jos on olemassa nuoli joukosta P, niin automaattisesti on olemassa myös nuoli joukkoon P. Näin ollen symmetrinen suhteikko on yhtenäinen jos ja vain jos se on vahvasti yhtenäinen. Itse asiassa yhtenäisyyden kannalta riittää tarkastella vain symmetrisiä suhteikkoja. Tämä johtuu seuraavasta tuloksesta (todistus Junnilan monisteessa).

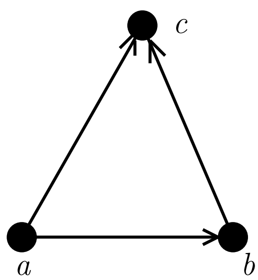
Lause II 3.3. *Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä suhteikolle G.*

- *G on yhtenäinen.*
- *G^s on yhtenäinen.*
- *G^s on vahvasti yhtenäinen.*

Muistutus: G^s on suihteikon G symmetrinen sulkeuma, joka saadaan muuttamalla kaikki nuolet viivoiksi.
Huomatus: Suhteikon **vahvalle yhtenäisyydelle** ei ole niin yksinkertaista karakterisaatiota. Yleensä on paljon helpompaa selvittää, onko suhteikko yhtenäinen (esim.

Lauseen II 3.3. avulla), kuin selvittää onko se vahvasti yhtenäinen.

Esimerkki 3. *Tarkastellaan seuraavassa kuvassa esiintyvää suhteikkoa G.*



G ei ole vahvasti yhtenäinen, sillä joukosta $\{c\}$ ei lähde yhtäkään nuolta poispäin. G on yhtenäinen, sillä sen symm. sulkeuma G^s on täydellinen verkko ja helposti nähdään, että mikä tahansa täydellinen suhteikko on yhtenäinen (HT).

Kulku suhteikossa

Olkoon G suhteikko. **Kulku** suhteikossa on sellainen jono $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ suhteikon G solmuja (ei välttämättä erilaisia!), jolle $\overrightarrow{x_{i-1}x_i} \in N_G$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Luku n on tällöin kulun $\bar{x}$ **pituus**, piste x_0 on kulun **alkupiste** ja piste x_n on kulun **loppupiste**. Nuoli

$$e_i = \overrightarrow{x_{i-1}x_i}$$

on kulun i'nnes **askel**. Askelten jono $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ määrää täysin kulun $\bar{x}$. Huomaa, erityisesti, että kulun pituus n on sama kuin sen askelten lukumäärä jonossa $(e_1, \ldots, e_n)$. Solmuja n-pituisessa kulussa on taas $(n + 1)$ kappaletta.

Havainnollisesti ajatellen kulku määrittelee tavan liikkua suhteikossa pisteestä x_0 pisteeseen x_n nuolia pitkin, mahdollisesti muiden pisteiden kautta.

Jokaiseen kulkuun $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ liittyy siis sen askelten jono $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Kääntäen olkoon $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ sellainen suhteikon G nuolten jono, jossa nuolen e_i loppupiste on sama kuin seuraavan nuolen e_{i+1} alkupiste. Merkitään jokaisella $i = 1, \ldots, n$ nuolen e_i loppupistettä x_i ja olkoon x_0 nuolen e_1 alkupiste. Tällöin $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ on kulku ja $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ on sen askelten jono. Näin ollen, kulku voidaan määritellä ja antaa yhtä hyvin myös nuolten jonona.

Huomatus: ”Multisuhteikoissa”, joissa kahden pisteen välillä voi olla enemmän kuin yksi nuoli, kulkua ei voi enää määritellä pisteiden jonona, vaan se on pakko antaa nuolten jonona. Koska emme käsittele multisuhteikkoja tällä kurssilla, määrittelemme kulku pistejonona. Täytyy kuitenkin huomata, että kirjallisuudessa esiintyy yleisesti myös tapa määritellä kulku nuolten jonona.

Tapaus $n = 0$ vastaa jonoa (x), jossa ei ole lainkaan nuolia (pysytään pisteessä x). Myös tyhjä kulku () (tyhjä jono) formaalisti voidaan hyväksyä kulkuna (vaikka emme yleisesti ottaen tee sillä mitään). Kulkuja muotoa (x) ja () sanomme **triviaaleiksi**. Kaikki muut kulut ovat **epätriviaaleja**.

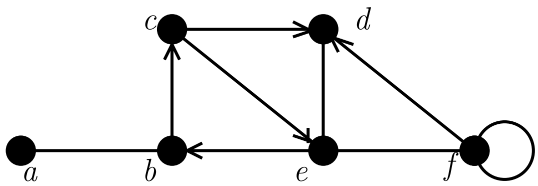
Kulkua $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, jonka alkupiste on sama kuin sen loppupiste, $x_0 = x_n$, sanotaan **kierrokseksi** tai **suljetuksi kuluksi** pisteessä x_0.

$\bar{x} = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n = x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i)$ on kierros pisteessä x_i.

Koska jonossa alkioiden toisto on sallittua, kulussa $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ sama solmu voi esiintyä useammin kuin kerran. Kulku on **yksinkertainen** mikäli $x_i = x_j$ pätee jos ja vain jos $i = j$ tai $i = 0$ ja $j = n$. Yksinkertaisessa kulussa siis sallitaan, että alku-ja loppupiste olisivat samoja, koska haluamme myös puhua yksinkertaisista kierroksista. Sen sijaan muiden pisteiden toistoa ei sallita.

Myös kulkuun $\bar{x}$ liittyvässä askeljonossa $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ voi esiintyä toistoja. Jos $e_i = e_j$ joillakin $1 \leqslant i < j \leqslant n$, niin $x_i = x_j$ ja $x_{i-1} = x_{j-1}$, mistä seuraa, että kulku $\bar{x}$ ei tällöin voi olla yksinkertainen. Jos askelten jonossa $\bar{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ ei ole toistoja, sanomme kulkua **poluksi** tai **ketjuksi**. Edellisen nojalla yksinkertainen kulku on polku. Käänteinen ei päde - polku ei ole välttämättä yksinkertainen, koska samaan pisteeseen voidaan päästä erilaisia nuolia pitkin.

Esimerkki 4. *Tarkastellaan seuraavassa kuvassa esiintyvää suhteikkoa G.*



Esimerkkejä kuluista suhteikossa G:

- (a, b, c, e) *on yksinkertainen kulku suhteikossa G. Sen pituus on 3, sen alkupiste on a ja loppupiste on e. Kulun askeljono on*

  $$(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ce}).$$

  Kulku ei ole kierros.

- (a, b, c, e, b) *on kulku suhteikossa G. Tämä kulku ei ole yksinkertainen, sillä piste b toistuu kulussa kaksi kertaa ja kyseessä ei ole kierros pisteessä b. Kulku on kuitenkin polku, sillä sen askeljonossa*

  $$(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ce}, \overrightarrow{eb})$$

  ei ole toistoja. Tämä on siis esimerkki polusta, joka ei ole yksinkertainen kulku.

- *Jono (d, e, c, d)* **ei ole** *kulku suhteikossa G, sillä sen askelten joukosta löytyy nuoli $\overrightarrow{ec}$, joka ei ole tämän suhteikon nuoli.*

- (e, b, c, e) *on yksinkertainen kierros pisteessä e.*

- $(d, e, b, c, d, e, f, f, d)$ *on kierros pisteessä d. Tämä kierros ei ole yksinkertainen. Se ei ole edes polku, sillä nuoli $\overrightarrow{de}$ esiintyy kulussa kaksi kertaa. Kulku sisältää silmukan pisteessä f yhtenä askeltenaan.*

- (f) *ja* (f, f) *ovat kulkuja, jopa kierroksia, suhteikossa G. Molemmat ovat yksinkertaisia. Myös tyhjä kulku $()$ on kulku suhteikossa G (ja jokaisessa suhteikossa).*

- *Kulku (a, b, a) on yksinkertainen kierros pisteessä a. Sen pituus on 2. Itse asiassa se on jopa polku, sillä sen askelten jono on*

$$(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ba})$$

koostuu kahdesta erilaisesta nuolesta (niitä vasta yksi ja sama viiva, mutta nuolet ovat erilaisia).

Olkoon R suhteikon G relaatio. Kulun määritelmästä seuraa suoraan, että

- Suhteikossa G on olemassa n-pituinen kulku pisteestä x pisteseen y jos ja vain jos $(y, x) \in R^n$ (Lemma II 4.9).
- Suhteikossa G on olemassa kulku pisteestä x pisteseen y jos ja vain jos $(y, x) \in R^\infty$ (muistutus - R^∞ on relaation R transitiivinen sulkeuma) (Korollaari II 4.10).

Kulkujen yhdistäminen.
Olkoot $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ja $\bar{y} = (y_0, y_1, \dots, y_m)$ kulkuja suhteikossa G ja oletetaan, että $x_n = y_0$. Tällöin $\bar{z} = (x_0, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ on myös kulku suhteikossa G. Sitä sanotaan kulkujen $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ **yhdisteeksi** ja merkitään $\bar{z} = \bar{x} \star \bar{y}$. Jos kulun $\bar{x}$ askeljono on $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ ja kulun $\bar{y}$ askeljono on $\bar{e} = (f_1, \dots, f_m)$, niin kulun $\bar{x} \star \bar{y}$ askeljono on $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m)$. Tästä seuraa, että kulun $\bar{x} \star \bar{y}$ pituus on summa kulkujen $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ pituuksista.

Lemmat II 4.2.-4.3.. *Jokainen ei-yksinkertainen kulku $\bar{x}$ voidaan esittää muodossa*

$$\bar{x} = \bar{z} \star \bar{y} \star \bar{u},$$

missä $\bar{y}$ on epätriviaali yksinkertainen kierros.
Tästä seuraa, että jos kahden solmun x, y välillä on olemassa kulku, niin niiden välillä on myös **yksinkertainen** *kulku.*
Todistuksen idea: Koska $\bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ei ole yksinkertainen, on olemassa $i < j$ siten, että $x_i = x_j$ ja lisäksi ei päde $i = 0$, $j = n$. Tällöin kulun osakulku $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$ on kierros. Se ei ole välttämättä yksinkertainen, mutta jos i ja j valitaan lisäksi niin, että x_i ja x_j ovat "mahdollisimman lähellä toisiaan", kierros $\bar{y} = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_j)$ on yksinkertainen. Tästä saadaan ensimmäinen väite.
Yhtälöstä $\bar{x} = \bar{z} \star \bar{y} \star \bar{u}$ seuraa, että kulku $\bar{x}$ voidaan korvata *lyhyemmällä* kululla $\bar{z} \star \bar{u}$ (joka on määritelty koska $\bar{y}$ on kierros). Näin ollen, jos kahden pisteen välillä valitaan mahdollisimman lyhyt kulku, se ei voi olla yksinkertainen.
Tarkat formaalit todistukset löytyvät Junnillan monisteesta. $\square$

Esimerkin 4 kulku $\bar{x} = (a, b, c, e, b)$ voidaan esittää muodossa

$$\bar{x} = \bar{z} \star \bar{y} \star \bar{u},$$

missä $\bar{y}$ on epätriviaali yksinkertainen kierros, tasan yhdellä tavalla:

$$(a, b, c, e, b) = (a, b) \star (b, c, e, b) \star (b).$$

Toiselle esimerkin 4 kululle $(d, e, b, c, d, e, f, f, d)$ löytyy seuraavia Lemman II 4.2. mukaisia jakoja:

$$(d, e, b, c, d, e, f, f, d) = (d) \star (d, e, b, c, d) \star (d, e, f, f, d),$$

$$(d, e, b, c, d, e, f, f, d) = (d, e) \star (e, b, c, d, e) \star (e, f, f, d),$$

$$(d, e, b, c, d, e, f, f, d) = (d, e, b, c, d, e, f) \star (f, f) \star (f, d).$$

Yhtenäisyys kulkujen avulla

Olkoon $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ kulku suhteikossa G. Määritellään

$$P(\bar{x}) = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

$$N(\bar{x}) = \{\overrightarrow{x_0x_1}, \overrightarrow{x_1x_2}, \ldots, \overrightarrow{x_{n-1}x_n}\},$$
$$V(\bar{x}) = \{\overline{x_0x_1}, \overline{x_1x_2}, \ldots, \overline{x_{n-1}x_n}\} \cap V_G.$$

Helposti nähdään, että ehdot $P_H = P(\bar{x})$, $N_H = N(\bar{x})$ määrittelevät erään suhteikon G alisuhteikon H, jonka merkitsemme myös $G(\bar{x})$:llä ja sanomme kulun $\bar{x}$ **määrittämäksi** suhteikoksi.

Seuraavan tärkeän tuloksen avulla saadaan heti paljon esimerkkejä yhtenäisistä ja vahvasti yhtenäisistä suhteikoista (todistukset, kuten yleensä, löytyvät Junnilan monisteesta).

Lemma II 4.5:

- *Kulun määrittämä suhteikko on yhtenäinen suhteikko.*
- *Kierroksen määrittämä suhteikko on vahvasti yhtenäinen suhteikko.*

Seuraava lemma on myös erittäin hyödyllinen yhtenäisyyden ja vahvan yhtenäisyyden tarkastelun kannalta. Huomaa, että sitä ei ole formuloitu Junnilan monisteessa eksplisiittisesti, vaikka sitä käytetäänkin esimerkeissä ja todistuksissa.

Lemma: *Olkoon G suhteikko ja olkoon H sellainen suhteikon G alisuhteikko, jolle pätee $P_H = P_G$. Tällöin*

- *jos H on yhtenäinen, myös G on yhtenäinen.*
- *jos H on vahvasti yhtenäinen, myös G on vahvasti yhtenäinen.*

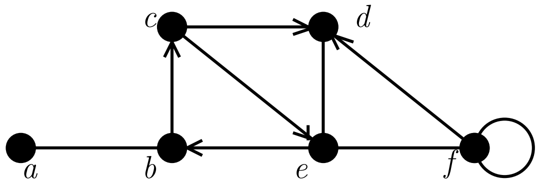
Todistus: Oletetaan, että H on yhtenäinen. Olkoon $\varnothing \neq P \subsetneq P_G$. Tällöin, koska $P_H = P_G$, yhtä hyvin pätee $\varnothing \neq P \subsetneq P_H$. Koska H on yhtenäinen, H:ssä on olemassa nuoli joukosta P tai nuoli joukkoon P. Koska H on G:n alisuhteikko, kaikki sen nuolet ovat myös G:n nuolia. Näin ollen G:ssä on nuoli joukosta P tai nuoli joukkoon P. Koska tämä pätee kaikilla P, G on yhtenäinen. Todistus vahvan yhtenäisyyden tapauksessa on samanlainen. $\square$

Huomautus: Suhteikon G alisuhteikkoa H, jolle pätee $P_H = P_G$, sanotaan suhteikon G **virittäväksi** alisuhteikoksi (älä sekoita tätä käsitettä käsitteeseen "*pisteiden/nuolten joukon virittämä* alisuhteikko"). Edellisen lemman mukaan suhteikko G, jolla on (vahvasti) yhtenäinen virittävä suhteikko, on itse (vahvasti) yhtenäinen.

Seuraus: Olkoon G suhteikko. Jos G:ssä on olemassa kulku, joka kulkee suhteikon **jokaisen** pisteen läpi, G on yhtenäinen. Jos G:ssä on olemassa kierros, joka kulkee suhteikon **jokaisen** pisteen läpi, G on vahvasti yhtenäinen.

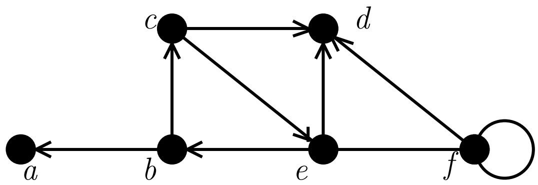
Tärkeä Huomautus: Käänteiset väitteet pätevät vain *vahvan* yhtenäisyyden kohdalla - jokaisessa vahvasti yhtenäisessä suhteikossa on olemassa kierros, joka kulkee kaikkien pisteiden läpi (Lause II 2.6 D). On olemassa yhtenäisiä suhteikkoja, joissa ei ole kulkua, joka kulkisi jokaisen pisteen kautta (kts. seuraava esimerkki). Käytännössä yhtenäisyyttä kannattaa tarkastella siirtymällä symmetriseen sulkeumaan (Lause II 3.3.).

Esimerkki 5. *Tarkastellaan taas Esimerkissä 4 yllä esiintyvää suhteikkoa.*



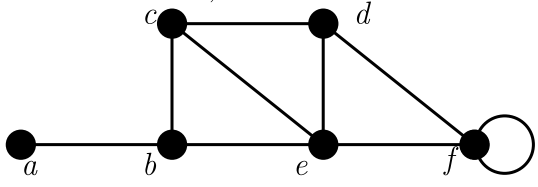
Ei ole vaikeata keksiä tässä suhteikossa kulkua, joka kulkisi jokaisen pisteen kautta, esimerkiksi kulku (a, b, c, d, e, f). *Tästä heti seuraa, että suhteikko on yhtenäinen. Itse asiassa pystytään parempaan - kierros* $(a, b, c, e, f, d, e, b, a)$ *käy jokaisessa suhteikon pisteessä ja palaa alkupisteensä. Näin ollen* G *on jopa vahvasti yhtenäinen.*

Tarkastellaan hieman erilaista suhteikkoa G'*:*



Tämä suhteikko ei ole vahvasti yhtenäinen, sillä esimerkiksi joukosta $\{a\}$ *ei lähde nuolta. Tässä suhteikossa ei myöskään ole kulkua* $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, *joka kulkisi jokaisen suhteikon pisteen kautta. Nimittäin jonossa* $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *kulun määritelmän mukaan jokaisesta pisteestä* x_i *lähtee nuoli, paitsi viimeisestä pisteestä* x_n *ei välttämättä lähde. Suhteikossa* G' *on olemassa kaksi pistettä joista ei lähde nuolia, pisteet* a *ja* d. *Kumpikin niistä voi esiintyä kulussa* $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *vain viimeisenä pisteenä* x_n. *Näin ollen* $\bar{x}$ *ei voi sisältää kaikkia suhteikon pisteitä.*

Suhteikko G' *on kuitenkin yhtenäinen. Tämä nähdään helpoiten siirtymällä symmetriseen sulkeumaan, eli muuttamalla kaikki nuolet viivoiksi:*



Suhteikko G^s

Tässä suhteikossa on olemassa kulku (a, b, c, d, e, f), *joka käy suhteikon jokaisessa pisteessä. Näin ollen* G^s *on yhtenäinen. Lauseen III.3.3. nojalla* G *on myös yhtenäinen. Tämä esimerkki osoittaa myös sen, että tosiväitteen "suhteikko, jossa on olemassa kaikissa pisteissä käyvä kulku, on yhtenäinen" käänteinen väite "yhtenäisestä suhteikosta löytyy kulku, joka käy suhteikon kaikissa pisteissä" ei pidä paikkaansa.*

Kulkujen ja kierrosten käyttö helpottaa yhtenäisyys-kysymysten tarkastelua huomattavasti - meidän ei enää tarvitse etsiä kaikista solmujen muodostamista osajoukoista nuolia sisään ja ulos, vaan riittää etsiä kulkuja, joilla on tietynlaisia ominaisuuksia.

Ensimmäinen tulos tähän suuntaan antaa seuraava lause, jossa kulkujen ja kerrosten avulla luonnehditaan *vahvaa yhtenäisyyttä*:

Lause II 4.6.: *Suhteikoille G seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

(1) G on vahvasti yhtenäinen.

(2) Jos x ja y ovat G:n solmuja, suhteikossa on olemassa kulku pisteestä x pisteeseen y.

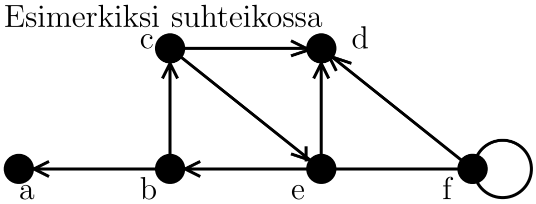
(3) Jos x ja y ovat G:n solmuja, suhteikossa on olemassa kierros joka käy pisteissä x ja y.

(4) Suhteikossa on olemassa kierros joka käy suhteikon jokaisessa pisteessä.

Tavallista (ei vahvaa) yhtenäisyyttä ei voida yleisesti ottaen karakterisoida yhtä luontevasti kulkujen avulla. Se on kuitenkin mahdollista tehdä *semikulku*-käsitteen avulla (huom, tämä ei löydy Junnilan monisteesta!).

Olkoon G suhteikko. Jono $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ suhteikon G solmuja on **semikulku** suhteikossa jos kaikilla $i = 1, \ldots, n$ joko $\overrightarrow{x_{i-1}x_i} \in N_G$ tai $\overrightarrow{x_i x_{i-1}} \in N_G$. Semikulku on semikierros jos $x_0 = x_n$.

Esimerkiksi suhteikossa



jono (a, b, c, d, e) on semikulku, joka ei ole kulku.

Selvästi mielivaltainen jono $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ suhteikon G solmuja on semikulku jos ja vain jos se on kulku symmetrisessä suhteikossa G^s. Tästä saadaan seuraava tulos (ei löydy Junnilan monisteesta).

Lause: *Suhteikoille G seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

(1) G on yhtenäinen.

(2) Jos x ja y ovat G:n solmuja, suhteikossa on olemassa semikulku pisteestä x pisteeseen y.

(3) Jos x ja y ovat G:n solmuja, suhteikossa on olemassa semikierros joka käy pisteissä x ja y.

(4) Suhteikossa on olemassa semikierros joka käy suhteikon jokaisessa pisteessä.

Todistus: Lauseen II 3.3. nojalla G on yhtenäinen jos ja vain jos G^s on vahvasti yhtenäinen.

Koska semikulut/semikierrokset G:ssä ovat sama asia kuin kulut/kierrokset suhteikossa G^s, väite seuraa edellisen kappaleen havainnon ja Lauseen II 4.6. nojalla. $\square$

Myös seuraavassa lemmassa mainittu teoreettinen tulos yksinkertaistaa yhtenäisyyden tarkastelua.

Lemma II 3.6. *Olkoon* $(H_i)_{i\in I}$ *äärellinen kokoelma (vahvasti) yhtenäisiä suhteikkoja. Oletetaan, että on olemassa* $j \in I$ *siten, että*

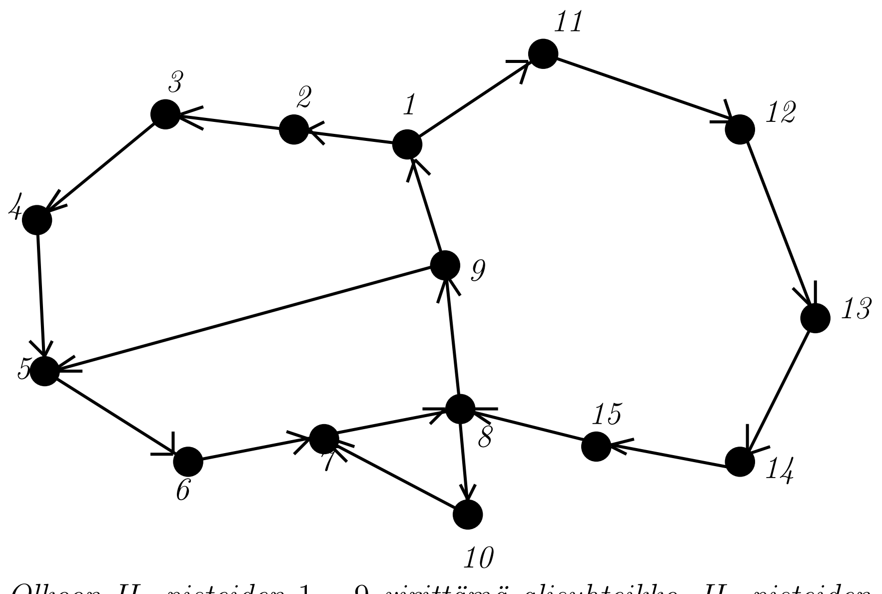
$$P_{H_i} \cap P_{H_j} \neq \varnothing$$

kaikilla $i \in I$. *Tällöin suhteikko* $\bigvee_{i\in I} H_i$ *on (vahvasti) yhtenäinen.*
Toisin sanojen (vahvasti) yhtenäisten suhteikkojen yhdiste on (vahvasti) yhtenäinen **edellyttäen, että niiden joukossa on sellainen suhteikko, jolla on yhteisiä pisteitä kaikkien muiden kokoelman suhteikkojen kanssa**.
Todistus: Junnilan monisteessa tämä on todistettu käyttämällä (vahvan) yhtenäisyyden alkuperäistä määritelmää. Näytetään, miten sama tulos voidaan päätellä vaihtoehtoisesti (semi)kulkujen avulla.

Olkoot x, y suhteikon $G = \bigvee_{i\in I} H_i$ solmuja. Edellisten tulosten nojalla riittää osoittaa, että G:ssä on olemassa (semi)kulku pisteestä x pisteeseen y. Valitaan $i_1, i_2 \in I$ siten, että x on suhteikon H_{i_1} solmu ja y on suhteikon H_{i_2} solmu. Oletuksen mukaan on olemassa $z \in P_{H_{i_1}} \cap P_{H_j}$ ja $w \in P_{H_{i_2}} \cap P_{H_j}$. Koska H_{i_1} ja H_{i_2} ovat kumpikin (vahvasti) yhtenäisiä, suhteikossa H_{i_1} on olemassa (semi)kulku $\bar{x}$ pisteestä x pisteeseen z, samoin suhteikossa H_{i_2} on olemassa (semi)kulku $\bar{y}$ pisteestä w pisteeseen y. Koska H_i on myös (vahvasti) yhtenäinen, siinä on olemassa (semi) kulku $\bar{u}$ pisteestä z pisteeseen w. Yhdistetty (semi)kulku $\bar{x} \star \bar{u} \star \bar{y}$ on hyvin määritely (semi)kulku pisteestä x pisteeseen y suhteikossa G[1]. $\square$.

Käytännössä Lemmaa II 3.6. sovelletaan jakamalla tarkasteltava suhteikko sopiviin osiin (alisuhteikkoihin).

Esimerkki 6. *Tarkastellaan seuraavassa kuvassa esitettyä suhteikkoa:*



Olkoon H_1 *pisteiden* $1-9$ *virittämä alisuhteikko,* H_2 *pisteiden* $7, 8, 10$ *virittämä alisuhteikko ja* H_3 *pisteiden* $1, 8, 9, 11-15$ *virittämä alisuhteikko. Tällöin* $G = H_1 \vee H_2 \vee H_3$.

[1] Semikulkuja voidaan yhdistää samalla tavalla kuin kulkuja

Kuvasta nähdään suoraan, että H_2 ja H_3 ovat kierrosten määrittämiä suhteikkoja. Lisäksi H_1 sisältää kierroksen $(1, 2, \ldots, 9)$, joka käy jokaisen sen pisteen läpi. Näin ollen H_1, H_2 ja H_3 ovat kaikki vahvasti yhtenäisiä. Lisäksi

$$P_{H_1} \cap P_{H_2} \neq \varnothing \neq P_{H_1} \cap P_{H_3}.$$

Lemman II.3.6. nojalla G on vahvasti yhtenäinen.

Komponentit

Olkoon G suhteikko. Sen alisuhteikko H on sen (vahvasti) yhtenäinen **komponentti** jos

- *H on (vahvasti) yhtenäinen,*
- *H on* **maksimaalinen** *(vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko seuraavassa mielessä - jos K on suhteikon G (vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko ja $H \prec K$, niin $H = K$.*

Seuraavat faktat ovat voimassa:

- *Olkoon K suhteikon G (vahvasti) yhtenäinen alisuhteikko. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen suhteikon G (vahvasti) yhtenäinen komponentti H siten, että $K \prec H$. (Lemma II 3.7.)*
- *Jokainen suhteikon G solmu on tasan yhden G:n (vahvasti) yhtenäisen komponentin solmu. (Lause II 3.8.)*
- *Jokainen suhteikon G nuoli on tasan yhden G:n yhtenäisen komponentin nuoli (Lause II 3.10.). Tämä ei yleisesti päde vahvasti yhtenäisille komponenteille!*
- *Jokainen suhteikon G viiva on tasan yhden G:n (vahvasti) yhtenäisen komponentin viiva (Lause II 3.10.).*
- *Olkoon $(H_i)_{i \in I}$ kaikkien suhteikon G yhtenäisten komponenttien kokoelma. Tällöin*

  $$G = \bigvee_{i \in I} H_i.$$

  Tämä on edellisten kohtien seuraus. Vahvasti yhtenäisille komponenteille vastaava väite ei yleisesti päde.
- *Jokainen (vahvasti) yhtenäinen komponentti H on pistejoukkonsa P_H virittämä alisuhteikko. (Lemma II 3.5.)*
- *Olkoot x, y suhteikon solmuja. Tällöin x ja y kuuluvat samaan vahvasti yhtenäiseen komponenttiin jos ja vain jos suhteikossa on olemassa kulku pisteestä x pisteeseen y ja on olemassa kulku pisteestä y pisteeseen x. (Lauseen II 4.6. Korollaari)*
- *Olkoot x, y suhteikon solmuja. Tällöin x ja y kuuluvat samaan vahvasti yhtenäiseen komponenttiin jos ja vain jos $(x, y) \in R^\infty$ ja $(y, x) \in R^\infty$ (missä R on suhteikon relaatio).*
- *Olkoot x, y suhteikon solmuja. Tällöin x ja y kuuluvat samaan vahvasti yhtenäiseen komponenttiin jos ja vain jos suhteikossa on olemassa kierros, joka sisältää molempia pisteitä x ja y. (Lauseen II 4.6. Korollaari)*

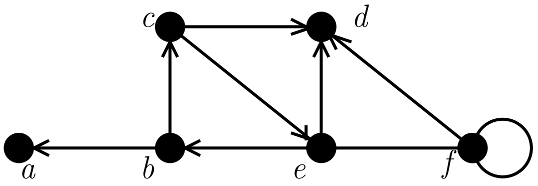
- *Olkoot x, y suhteikon solmuja. Tällöin x ja y kuuluvat samaan yhtenäiseen komponenttiin jos ja vain jos suhteikossa on olemassa semikulku pisteestä x pisteeseen y. Tämä seuraa suoraan siitä, että jokaisen yhtenäisen komponentin H symmetrinen sulkeuma H^s on vahvasti yhtenäinen komponentti suhteikossa G^s (HT).*

- *Suhteikon G pisteen x vahvasti yhtenäinen komponentti on joukon*

$$\{y \in P_G \mid \text{ On olemassa kulku } x\text{:stä } y\text{:hyn ja kulku } y\text{:stä } x\text{:ään}\}$$

  virittämä alisuhteikko (Lauseen II 4.6. Korollaari).

Esimerkki 7. *Tarkastellaan seuraavaa suhteikkoa G.*



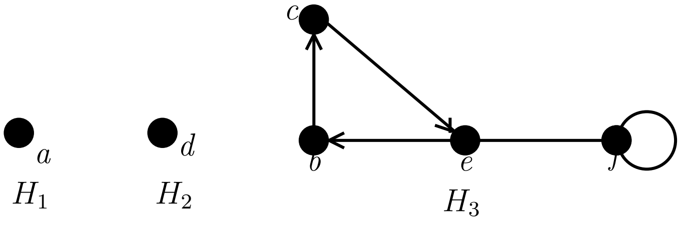
Esmerkissä 5 olemme näyttäneet, että tämä suihteikko on yhtenäinen, mutta ei vahvasti yhtenäinen. Erityisesti se on itsensä ainoa yhtenäinen komponentti. Selvitetään, mitkä ovat tämän suhteikon vahvasti yhtenäiset komponentit.

Pisteestä a ei pääse mihinkään toiseen pisteeseen, koska siitä ei lähde mitään nuolia. Tästä seuraa (Lauseen II 4.6. Korollaari), että pisteen a vahvassa yhtenäisessä komponentissa ei ole muita pisteitä, eli komponentti on yksiön $\{a\}$ virittämä alisuhteikko $H_1 = (\{a\}, \varnothing)$.

Samasta syystä pisteen d komponentti on triviaali suhteikko $H_2 = (\{d\}, \varnothing)$.

Solmut (b, c, e) muodostavat kierroksen, joten sen virittämä alisuhteikko on vahvasti yhtenäinen. Lemman II 3.7. nojalla tämä alisuhteikko sisältyy erääseen vahvasti yhtenäiseen komponenttiin. Erityisesti pisteet b, c, e ovat samassa vahvasti yhtenäisessä komponentissa H_3. Suhteikossa G on olemassa viiva $\overline{ef}$. Tiedämme, että jokainen viiva ja jokainen solmu kuuluu täsmälleen yhteen vahvasti yhtenäiseen komponenttiin (Lause II 3.10), joten on olemassa vahvasti yhtenäinen komponentti H', joka sisältää viivan $\overline{ef}$. Tällöin se sisältää myös viivan päätepisteet e, f. Toisaalta tiedämme jo, että e kuuluu komponenttiin H_3 ja sama piste ei voi kuulua kahteen eri komponenttiin (Lause II 3.8.). Näin ollen $H' = H_3$. Koska $f \in H'$, myös f kuuluu komponenttiin H_3.

Näin ollen H_3 sisältää solmut b, c, e, f. Muita solmuja se ei voi sisältää, koska jäljellä olevat solmut a, d tiedetään jo olevan eri komponenteissa. Lemmasta II 3.5. seuraa, että H_3 on pistejoukon $A = \{b, c, e, f\}$ virittämä alisuhteikko.



Huomaa, että vahvasti yhtenäisten komponenttien yhdiste $H_1 \vee H_2 \vee H_3$ ei tosiaankaan ole sama kuin alkuperäinen suhteikko G, vaan sen aito alisuhteikko. Siitä puuttuu nuolet $\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{cd}, \overrightarrow{ed}, \overrightarrow{fd}$ eli kaikki nuolet jotka yhdistävät kaksi vahvasti yhtenäistä komponenttia.

Suhteikolla $H_1 \vee H_2 \vee H_3$ on kolme yhtenäistä komponenttia eli suhteikot H_1, H_2, H_3, suhteikko G taas on yhtenäinen.

Yhtenäisyys verkossa ja viivojen lukumäärä

Koska verkko on symmetrinen suhteikko, se on yhtenäinen jos ja vain jos se on vahvasti yhtenäinen.

Lauseesta II 3.5. seuraa, että verkon G jokainen yhtenäinen komponentti H on itse verkko. Yhtenäisenä verkkona H on vahvasti yhtenäinen. Tästä seuraa, että jokainen verkon G yhtenäinen komponentti on sen vahvasti yhtenäinen komponentti ja päinvastoin. Koska verkossa ei ole mitään eroa yhtenäisten ja vahvasti yhtenäisten komponenttien välillä, voidaan puhua vain verkon komponenteista. Kaksi solmua $x, y \in P_G$ kuuluvat verkon G samaan komponenttiin jos ja vain jos verkossa G on olemassa kulku pisteestä x pisteeseen y. Lisäksi verkossa voidaan aina tarvittaessa ajatella kulun kulkevan *viivoja* (ei nuolia) pitkin.

Lause II 3.13. *Olkoon G yhtenäinen verkko. Tällöin*

$$v_G \geqslant p_G - 1.$$

Lauseen todistuksessa käytetään (Junnilan monisteessa) aputuloksia Lemma II 3.11. ja Lemma II 3.12. Esitetään Lauseelle II 3.13. toinen, induktiivinen todistus.

Lauseen II 3.13. todistus induktiolla luvun $n = v_G$ suhteen:
Alkuaskel: Oletetaan, että $v_G = 0$, eli verkossa ei ole viivoja lainkaan. Koska verkko on kuitenkin yhtenäinen, tämä voi päteä vain kun verkossa on korkeintaan yksi piste, $p_G \leqslant 1$. Näin ollen epäyhtälö pätee muodossa

$$v_G = 0 \geqslant p_G - 1.$$

Induktioaskel: Oletetaan, että väite on tosi kaikilla yhtenäisillä verkoilla, joissa on k viivaa, missä $k < n$. Osoitetaan, että väite on tosi myös verkolle G jossa on n viivaa. Valitaan jokin verkon G viiva v. Muodostetaan G:n aliverkko $H = G - v$ asettamalla $P_H = P_G$ ja ottamalla verkon H viivoiksi kaikki G:n viivat, paitsi v (toisin sanoen poistetaan viiva v verkosta). Tällöin $v_H = v_G - 1$ ja $p_H = p_G$.

Verkolla H on korkeintaan kaksi komponenttia (todistus harjoitustehtävänä). Jos H on yhtenäinen, induktio-oletuksen nojalla pätee $v_H \geqslant p_H - 1$, joten

$$v_G > v_H \geqslant p_H - 1 = p_G - 1.$$

Jos H ei ole yhtenäinen, sillä on kaksi yhtenäistä komponenttia H_1, H_2. Koska kummassakin on vähemmän viivoja kuin verkossa G, induktio-oletuksen nojalla pätee

$$v_{H_1} \geqslant p_{H_1} - 1, \tag{8}$$

$$v_{H_2} \geqslant p_{H_2} - 1. \tag{9}$$

Lisäksi $p_G = p_H = p_{H_1} + p_{H_2}$, $v_G - 1 = v_H = v_{H_1} + v_{H_2}$. Laskemalla yhteen epäyhtälöt(8) ja (9) saadaan

$$v_G - 1 = v_H = v_{H_1} + v_{H_2} \geqslant p_{H_1} + p_{H_2} - 2 = p_H - 2.$$

Tästä seuraa väite. $\square$

Seuraus: Olkoon G verkko, jolla on k yhtenäistä komponenttia. Tällöin

$$v_G \geqslant p_G - k.$$

(Todistus jätetään harjoitustehtäväksi).

Lisätieto: Edellinen seuraus antaa alarajan verkon viivojen lukumäärälle. Myös yläraja on tiedossa. Voidaan osoittaa, että verkolle G, jolla on k yhtenäistä komponenttia, pätee

$$v_G \leqslant \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1).$$

Kulkuetäisyys

Olkoon G suhteikko ja $x, y \in P_G$. Solmujen x, y **välinen kulkuetäisyys** $d(x,y)$ määritellään seuraavasti. Jos suhteikossa ei ole kulkua pisteestä x pisteeseen y, asetetaan $d(x,y) = \infty$. Muuten $d(x,y) = n$ on *pienin* luonnollinen luku $n \in \mathbb{N}$ jolla on olemassa n-pituinen kulku $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ pisteestä x pisteeseen y.

- *$d(x,x) = 0$ kaikilla $x \in G$.*
- *Kulkuetäisyys d ei ole välttämättä symmetrinen eli yleisesti $d(x,y) \neq d(y,x)$.*
- *Jos G on symmetrinen suhteikko, esim. verkko, $d(x,y) = d(y,x)$ kaikilla $x, y \in G$.*
- *Kulkuetäisyys toteuttaa aina kolmioepäyhtälön*

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z).$$

Olkoon $x \in P_G$ kiinnitetty solmu. Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ määritellään

$$S(x,n) = \{y \in G \mid d(x,y) = n\}.$$

Tällöin $S(x,0) = \{x\}$, $S(x,1)$ koostuu tasan pisteen x seuraajista (paitsi x itse), $S(x,2)$ koostuu x:n seuraajien seuraajista, jotka eivät ole vielä joukoissa $S(x,0)$, $S(x,1)$ jne. Kulkuetäisyyksien laskeminen käytännössä perustuu seuraavaan yksinkertaiseen faktaan:

Väite: *Olkoon $y \in P_G$. Tällöin $d(x,y) = n+1$ jos ja vain jos $y \notin S(x,k)$ kaikilla $k \leqslant n$ ja on olemassa $z \in S(x,n)$ jolla*

$$\overrightarrow{zy} \in N_G.$$

Toisin sanoen joukon $S(x,n+1)$ alkiot ovat kaikki joukon $S(x,n)$ alkioiden seuraajat, *jotka eivät ole vielä missään joukossa $S(x,k)$, $k \leqslant n$.*

Väitteen todistus: Oletetaan, että $d(x,y) = n+1$. Tällöin on olemassa kulku $\bar{x} =$

$(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ pisteestä x pisteeseen y. Olkoon $z = x_n$. Kulku $\bar{x}' = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ on kulku pisteestä x pisteeseen z, joten $d(x, z) \leqslant n$. Jos olisi $d(x, z) = k < n$, niin olisi olemassa jokin kulku $\bar{z} = (z_0, x_1, \ldots, z_k)$ pisteestä x pisteeseen z, jonka pituus on $k < n$. Tällöin $(z_0, x_1, \ldots, z_k, y)$ on kulku pisteestä x pisteeseen y, jonka pituus on $k + 1 < n + 1$, mikä on ristiriidassa oletuksen $d(x, y) = n+1$ kanssa. Näin ollen $d(x, z) = n$ eli $z \in S(x, n)$. Lisäksi $\overrightarrow{zy} \in N_G$.

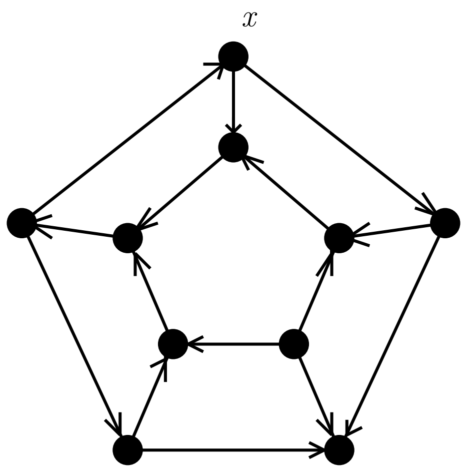
Oletetaan, että $d(x, y) > n$ ja on olemassa $z \in S(x, n)$ jolla $\overrightarrow{zy} \in N_G$. Riittää osoittaa, että $d(x, y) \leqslant n + 1$. Koska $z \in S(x, n)$, on olemassa kulku $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n = z)$ pisteestä x pisteeseen z, jonka pituus on n. Koska $\overrightarrow{zy} \in N_G$ kulku $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n, y)$ on hyvin määritelty kulku pisteestä x pisteeseen y, jonka pituus on $n + 1$. □

Edellisestä seuraa, että käytännössä kulkuetäisyydet $d(x, y)$, missä x on ennalta kiinnitetty solmu, voidaan määrätä kaikilla $y \in G$ seuraavalla rekursiivisella algoritmilla.

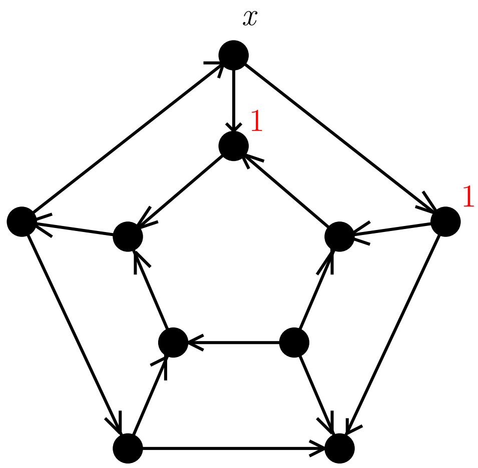
Välivaiheessa numero k merkitään joukon $S(x, k)$ alkiot leimalla k. Tämä tehdään induktiivisesti, luvun k suhteen. Aloitetaan antamalla joukon $S(x, 0) = \{x\}$ ainoalle pisteelle x leima 0. Sen jälkeen annetaan leima 1 kaikille pisteen x seuraajille (paitsi x:lle). Jatketaan samalla tavalla. Vaiheessa $k + 1$ annetaan jokaiselle joukon $S(x, k)$ alkion seuraajalle, jolla ei vielä ole leimaa, leima $(k + 1)$. Algoritmi pysähtyy, kun ei ole enää nuolia, joista pääsee eteenpäin. Jos tässä vaiheessa on jäljellä leimattomia pisteitä, niiden etäisyys pisteeseen x on ääretön.

Parhaan kuvan tämän algoritmin ideasta saa esimerkkien kautta.

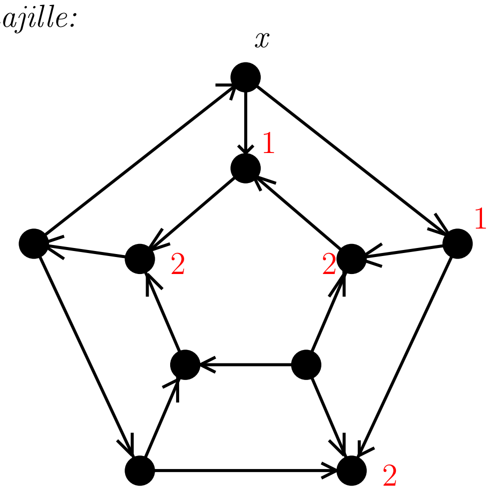
Esimerkki 10. *Lasketaan kulkuetäisyyksiä $d(x, y)$ seuraavan kuvan suhteikossa G, kaikilla $y \in P_G$.*



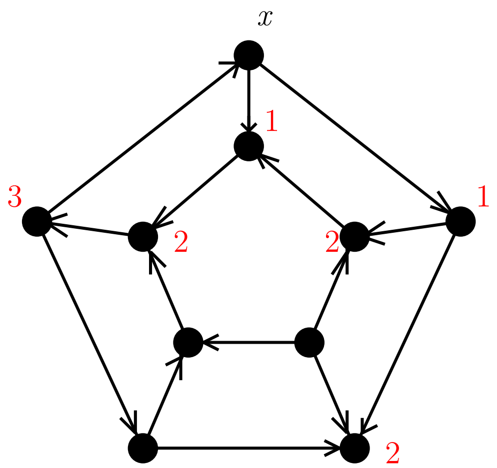
Vaihe 0 *on triviaali - x on ainoa piste jonka etäisyys itseensä on* 0.
Vaiheessa 1 *merkitään leimalla* 1 *(kuvassa punaisella värillä) kaikki x:n seuraajat:*



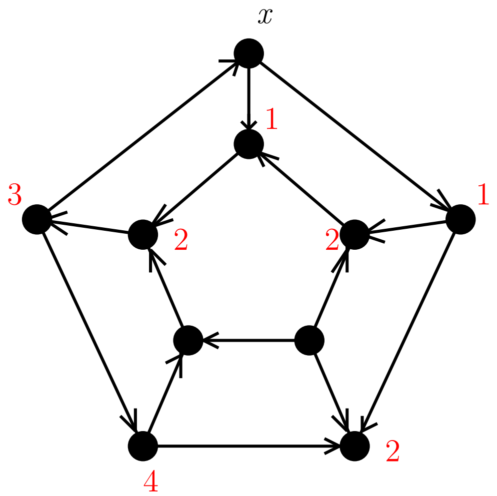
Seuraavassa vaiheessa annetaan leima 2 *kaikille leimalla* 1 *merkittyjen pisteiden seuraajille:*



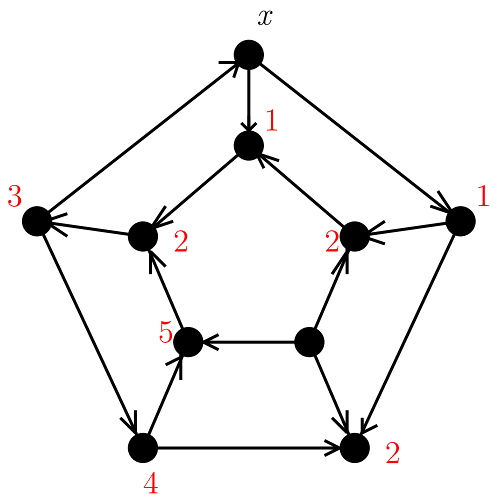
Vaihe 3:



Vaihe 4:



Vaihe 5:



Algoritmi pysähtyy - ainoasta joukon $S(x, 5)$ *pisteestä lähtee vain yksi nuoli, ja se vie pisteeseen, joka oli jo leimattu vaiheessa 2.*
Suhteikossa on jäljellä yksi piste y*, joka ei ole saanut leimaa. Tälle pisteelle pätee* $d(x, y) = \infty$*. Suhteikossa ei ole kulkua pisteestä* x *pisteeseen* y*.*
Ei ole vaikeata nähdä, että suhteikossa on kuitenkin olemassa kulku toiseen suuntaan,

pisteestä y pisteeseen x. Itse asiassa $d(y, x) = 4$ (HT).

Olkoon $f\colon G \to H$ isomorfismi suhteikkojen G ja H välillä. Olkoot $x, y \in G$. Tällöin

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Isomorfismi siis säilyttää pisteiden väliset kulkuetäisyydet. Näin ollen kulkuetäisyyksiä voidaan käyttää selvittääkseen ovatko kaksi suhteikkoa isomorfisia (tästä tulee esimerkkejä harjoitustehtävissä).