Alisuhteikot ja suhteikkojen yhdiste

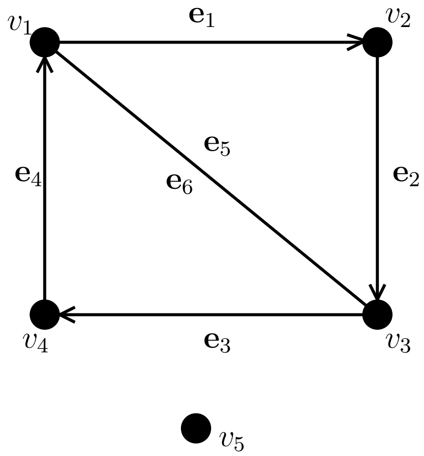
Alisuhteikot ja aliverkot

Olkoon $G = (X, R)$ suhteikko. Suhteikko $H = (Y, R')$ on suhteikon G **alisuhteikko** jos $Y \subset X$ ja $R' \subset R$. Nämä ehdot ovat yhtäpitäviä ehtojen $P_H \subset P_G$ ja $N_H \subset N_G$ kanssa. Havainnollisesti ajatellen alisuhteikko H saadaan suhteikosta G ”poistamalla siitä joitakin pisteitä ja joitakin nuolia”.

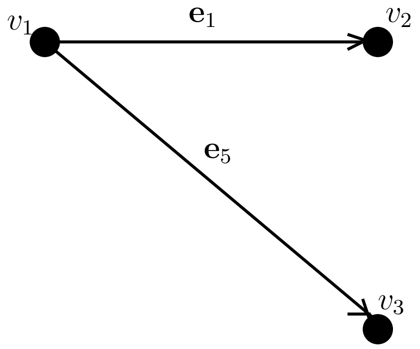
Kun H on suhteikon G alisuhteikko, merkitään $H \prec G$.

Alisuhteikko on **aliverkko** jos se on suhteikkona verkko. Huomaa, että verkon alisuhteikko ei välttämättä ole aliverkko! Esimerkiksi silmukaton suhteikko G on aina symmetrisen sulkeumansa G^s alisuhteikko, missä G^s on itse verkko.

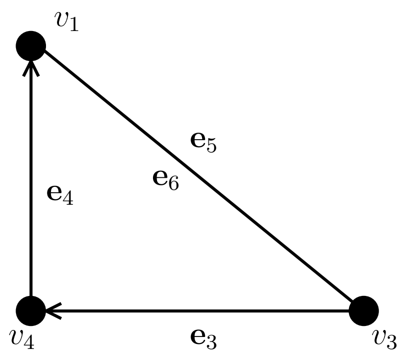
Esimerkki 1. *Tarkastellaan suhteikkoa G, jolle $P_G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ja nuolet ovat* $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{v_1v_2}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{v_2v_3}$, $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{v_3v_4}$, $\mathbf{e}_4 = \overrightarrow{v_4v_1}$, $\mathbf{e}_5 = \overrightarrow{v_1v_3}$, $\mathbf{e}_6 = \overrightarrow{v_3v_1}$. *Suhteikko on esitetty seuraavassa kuvassa. Huomaa, että suhteikossa on viiva $\overline{v_1v_3}$, joka koostuu nuolista* $\mathbf{e}_5$ *ja* $\mathbf{e}_6$.



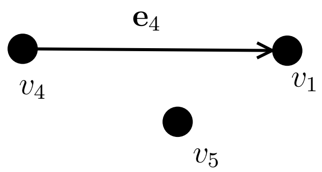
Alla on esitetty esimerkkejä suhteikon G alisuhteikkoista:



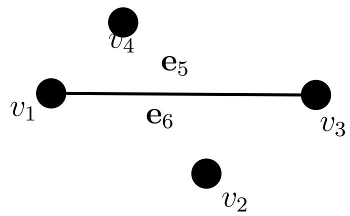
Alisuhteikko H_1



Alisuhteikko H_2

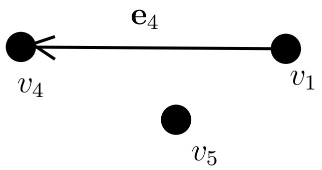


Alisuhteikko H_3



Alisuhteikko H_4

Seuraavassa kuvassa esiintyvä suhteikko **ei ole** *suhteikon G alisuhteikko, koska G:ssä ei ole nuolta $\mathbf{e}_4 = \overrightarrow{v_1 v_4}$.*



Erityisesti huomataan seuraava: jos suhteikon G alisuhteikossa H on solmuja $v, w \in P_H \subset P_G$ ja suhteikossa G on olemassa nuoli $\overrightarrow{vw}$, niin tämän nuolen **ei tarvitse kuulua alisuhteikkoon** H. Juuri näin käy esimerkissä yllä alisuhteikon H_1 kohdalla - se sisältää solmut v_2 ja v_3, mutta ei sisällä nuolta $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{v_2 v_3}$, joka on alkuperäisessä suhteikossa G. Samalla tavalla, jos suhteikossa G on olemassa viiva $\overline{vw}$ ja $v, w \in P_H$, niin tästä viivasta voi alisuhteikoon H kuulua yksi nuoli, molemmat nuolet (koko viiva) tai ei nuolia lainkaan. Esimerkissä yllä suhteikossa G on olemassa viiva $\overline{v_1 v_3}$ solmujen v_1 ja v_3 välillä, mutta alisuhteikossa H_1 on vain nuoli $\mathbf{e}_5 = \overrightarrow{v_1 v_3}$, ei nuolta $\mathbf{e}_6 = \overrightarrow{v_3 v_1}$ toisen suuntaan. Tämä kaikki on siis täysin sallittua alisuhteikon määritelmän mukaan.

Jos suhteikon G alisuhteikko H kuitenkin sisältää kaikki solmujensa nuolet suhteikosta G, tämä alisuhteikko sanotaan pistejoukon $P_H \subset P_G$ **virittämäksi** suhteikon G alisuhteikoksi. Mikä tahansa suhteikon G solmujoukon P_G osajoukko A virittää yksikäsitteisen alisuhteikon, jota merkitään $G(A)$. Alisuhteikon $G(A)$ pistejoukko on siis $P_H = A$ ja nuoliksi otetaan kaikki suhteikon G nuolet, joiden molemmat päätepisteet ovat joukossa A,

$$N_{G(A)} = \{\overrightarrow{xy} \in N_G \mid x, y \in A\}.$$

Alisuhteikon $G(A)$ relaatio on $R \cap (A \times A)$, missä R on suhteikon G relaatio.

Esimerkissä yllä alisuhteikko H_2 on joukon $A = \{v_1, v_3, v_4\}$ virittämä ja alisuhteikko H_3 on joukon $B = \{v_1, v_4, v_5\}$ virittämä. Alisuhteikko H_1 ei ole minkään osajoukon virittämä, kuten edellä huomattiin jo. Myös alisuhteikko H_4 ei ole pistejoukkonsa virittämä (miksi?). Alisuhteikko H_4 on suhteikon G **aliverkko**, koska se on verkko suhteikkona.

Nuolijoukon virittämä alisuhteikko

Olkoon G suhteikko. Kuten edellä todetiin jokainen solmujoukon P_G osajoukko A virittää yksikäsitteisen alisuhteikon $G(A)$.

Myös jokainen nuolijoukon N_G osajoukko $B \subset N_G$ virittää erään alisuhteikon $H = G[B]$, joka määritellään seuraavasti. Merkitään A:llä kaikkien joukkoon B kuuluvien nuolten alku-ja loppupisteiden muodostama joukko. Asetetaan alisuhteikon $H = G[B]$ solmujoukoksi $P_H = A$ ja nuolien joukoksi $N_H = B$. Tätä alisuhteikkoa sanotaan siis joukon B virittämäksi alisuhteikoksi.

Esimerkissä yllä alisuhteikko H_2 on nuolijoukon

$$\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\}$$

virittämä.

Konstruktion perusteella nuolijoukon virittämässä suhteikossa ei voi olla eristettyjä pisteitä (koska jokainen sen solmu on jonkun nuolen päätepiste).

Suhteikkojen yhdiste

Olkoon $(H_i)_{i\in I}$ **äärellinen** kokoelma suhteikkoja. **Yhdiste** $\bigvee_{i\in I} H_i$ on sellainen suhteikko G, jolle

$$P_G = \bigcup_{i\in I} P_{H_i},$$

$$N_G = \bigcup_{i\in I} N_{H_i}.$$

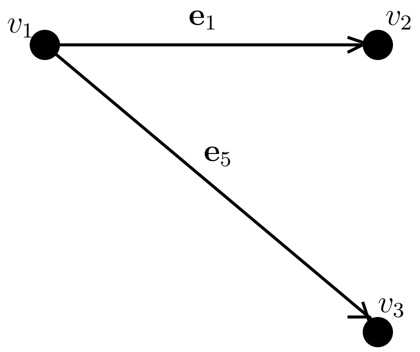
Toisin sanoen yhdisteen G solmuiksi otetaan kaikki solmut, jotka esiintyvät ainakin yhdessä suhteikossa H_i. Kahden solmun v, w välillä on suhteikossa G nuoli jos ja vain jos jollakin $i \in I$ solmut v, w ovat suhteikossa H_i ja niiden välillä on tässä suhteikossa nuoli.

Kun $I = \{1, 2, \ldots, k\} = [k]$, yhdiste $\bigvee_{i\in I} H_i$ voidaan merkitä myös $H_1 \bigvee H_2 \bigvee \ldots \bigvee H_k$.

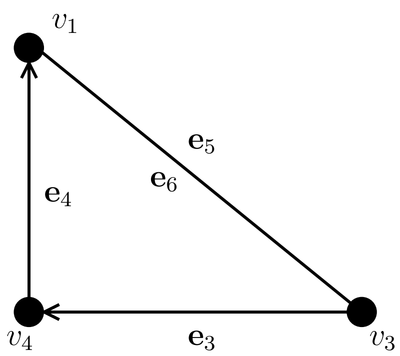
Jokainen suhteikko H_i on yhdisteen $\bigvee_{i\in I} H_i$ alisuhteikko.
Jos kaikki suhteikot H_i ovat verkkoja, myös yhdiste $G = \bigvee_{i\in I} H_i$ on verkko. Tällöin

$$V_G = \bigcup_{i\in I} V_{H_i}.$$

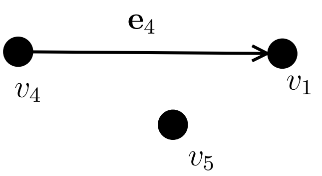
Esimerkki 2. *Tarkastellaan esimerkissä 1 esiintyviä suhteikon G alisuhteikkoja $H_1 - H_4$.*



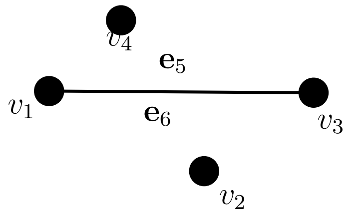
Alisuhteikko H_1



Alisuhteikko H_2

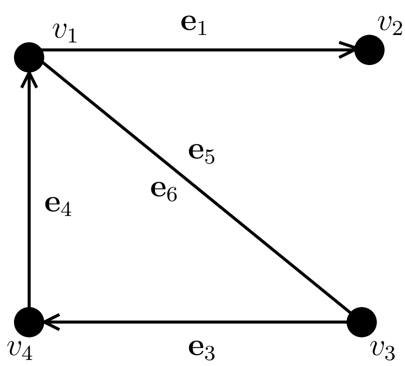


Alisuhteikko H_3

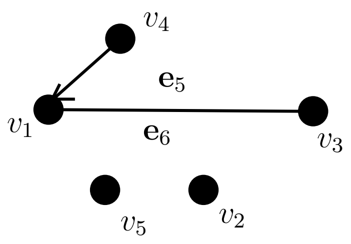


Alisuhteikko H_4

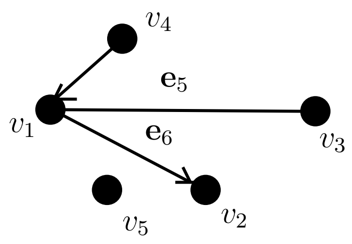
Tällöin



$H_1 \vee H_2$



$H_3 \vee H_4$



$H_1 \vee H_3 \vee H_4$