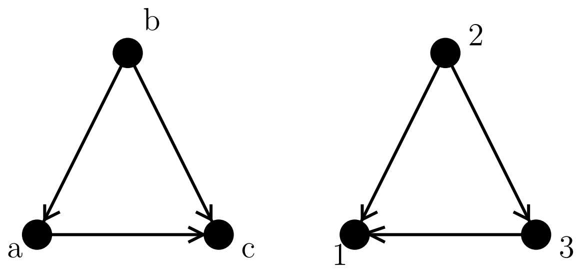
Isomorfismit

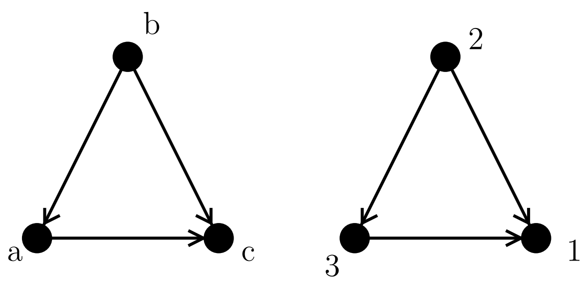
Aleksandr Pasharin

Tarkastellaan seuraavia suhteikkoja:



Suhteikko G Suhteikko H

On selvää, että suhteikkoa 2 esittävä kaavio on suhteikkoa 1 esittävän kaavion "peilikuva". Verkkoteorian kannalta nämä suhteikot ovat täysin samanlaisia ja kun ne piirretään "samannäköisinä", ainoa mikä erottaa niitä on solmujen nimitykset:



Suhteikko G Suhteikko H

Solmujen nimitykset ovat vain leimoja ja suhteikon verkkoteoreettinen struktuuri, eli informaatio siitä, mitä yhteyksiä solmujen välillä on, on täysin samanlainen kummassakin suhteikossa. Tämä havainto voidaan pukea täsmälliseksi matemaattiseksi väitteeksi erään *kuvauksen* avulla.

Nimittäin määritellään kuvaus $f\colon P_G \to P_H$ ehdoilla $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$. Voidaan ajatella, että tämä kuvaus antaa toisen tavan nimetä suhteikon solmuja. Selvästi pitäisi olla yhdentekevä, millä symboleilla solmuja merkitään - ei suhteikko "muutu" siitä miksikään.

Formaalista näkökulmasta kuvauksella f on seuraavat ominaisuudet:

(1) f on bijektio,

(2) kaikilla $x, y \in P_G$ pätee seuraava:
suhteikossa G on olemassa nuoli $\overrightarrow{xy}$ jos ja vain jos
suhteikossa G' on olemassa nuoli $\overrightarrow{f(x)f(y)}$.

Tällaisia kuvauksia sanotaan *isomorfismeiksi.*

Määritelmä. *Olkoot* $G = (X, R)$ *ja* $H = (Y, R')$ *suhteikkoja. Kuvaus* $f\colon P_G \to P_H$ *on suhteikkojen* G *ja* H *välinen* **isomorfismi** *jos seuraavat ehdot pätevät.*

(1) f *on bijektio.*

(2) Olkoot $x, y \in P_G$*. Tällöin* $\overrightarrow{xy} \in N_G$ *jos ja vain jos* $\overrightarrow{f(x)f(y)} \in N_H$.

Jos kuvaus $f\colon P_G \to P_H$ on suhteikkojen G ja H välinen isomorfismi, merkitään myös $f\colon G \to H$ (vaikka teknisesti f ei ole kuvaus joukkojen G ja H välillä).
Jos kahden suhteikon G, H välillä on olemassa ainakin yksi isomorfismi f, sanomme, että suhteikot ovat **isomorfiset**. Tällöin merkitään $G \approx H$.

Suhteikkojen relaatioiden kielellä ehto (2) voidaan yhtäpitävästi muotoilla seuraavasti:

(2') Olkoot $x, y \in P_G$*. Tällöin* $(x, y) \in R$ *jos ja vain jos* $(f(x), f(y)) \in R'$.

Intuitiivisesti ehto (2) tarkoittaa, että kuvaus f ”säilyttää nuolet” (molempiin suuntiin). Huomaa erityisesti, että ei riitä vaatia, että jokaisella $\overrightarrow{xy} \in N_G$ pätee $\overrightarrow{f(x)f(y)} \in N_H$, vaan myös käänteisen väitteen on oltava tosi - jos $\overrightarrow{f(x)f(y)} \in N_H$, niin $\overrightarrow{xy} \in N_G$.

Koska isomorfismi $f\colon G \to H$ on bijektio, on olemassa käänteiskuvaus $f^{-1}\colon P_H \to P_G$. Helposti nähdään (HT), että f^{-1} on myös isomorfismi verkkojen H ja G välillä.
Isomorfismi suhteikosta G itselleen $f\colon G \to G$ on suhteikon G *automorfismi.* Automorfismi voidaan tulkita olevan suhteikon *symmetria* eli tapa vaihtaa suhteikon pisteitä keskenään ilman, että sen struktuuri muuttuu.

Jos G ja H ovat molemmat *verkkoja* (yleisemmin symmetrisiä suhteikkoja), riittää vaatia, että kuvaus f ”säilyttää viivat”. Täsmällisesti tämä tarkoittaa seuraavaa. Olkoot G ja H verkkoja. Tällöin kuvaus $f\colon P_G \to P_H$ on isomorfismi jos ja vain jos

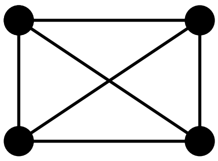
(1) f *on bijektio.*

(2) Olkoot $x, y \in P_G$*. Tällöin* $\overline{xy} \in V_G$ *jos ja vain jos* $\overline{f(x)f(y)} \in V_H$.

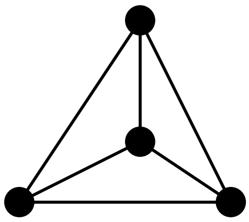
Havainnollisesti ajatellen isomorfismiset suhteikot ovat ”sama suhteikko” solmujen nimitystä vaille. Kun G ja H ovat isomorfisia, suhteikkoa G esittävä geometrinen kaavio voidaan muuntaa suhteikkoa H esittäväksi kaavioksi siirtämällä pisteitä (jolloin nuolet seuraavat pisteiden liikkumista). Tällainen muunto ei kuitenkaan aina ole itsestään selvä ja kahden isomorfisen suhteikon kaaviot saattavat olla hyvinkin ”erinäköisiä”, erityisesti ensi näkemältä.

Esimerkki:

Tarkastellaan seuraavia verkkoja G ja H:



G



H

Kaaviot saattavat näyttää erilaisilta, mutta verkot ovat isomorfisia. Helpoiten tämän näkee huomaamalla, että molemmat verkot ovat neljän solmun täydellisiä verkkoja. Kummassakin verkossa on 4 pistettä. Kummassakin verkossa pätee seuraava väite:
Kaikilla solmuilla x, y viiva $\overline{xy}$ on verkossa jos ja vain jos $x \neq y$.

Näin ollen *mikä tahansa bijektio* $f\colon P_G \to P_H$ on isomorfismi. Ainakin yksi bijektio löytyy, koska joukot P_G ja P_H ovat samankokoisia. Voidaan esimerkiksi merkitä verkon G pisteitä a, b, c, d ja verkon H pisteitä $1, 2, 3, 4$. Tällöin kuvaus f, joka on määritelty ehdolla $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ ja $f(d) = 4$ on bijektio ja isomorfismi.

Samalla tavalla voidaan yleisesti osoittaa seuraava väite:
Olkoot G ja G' täydellisiä verkkoja. Tällöin $G \approx H$ jos ja vain jos $p_G = p_H$ eli jos ja vain jos molemmassa verkossa on sama määrä solmuja.
Erityisesti täydellinen verkko, jossa on n solmua, on isomorfinen täydellisen verkon K_n kanssa.

Edellisessä esimerkissä mikä tahansa bijektio solmujoukkojen välillä kelpasi isomorfismiksi. Yleisesti ottaen näin ei tietysti ole, ja kysymys siitä ovatko kaksi annettua suhteikkoa isomorfisia (sekä konkreettisen isomorfismin konstruktio) saattaa osoittautua vaikeaksi ja epätriviaaliksi ongelmaksi. Ei ole olemassa yleispätevää menetelmää, jolla tämäntyyppinen tehtävä voidaan ratkaista, ja suhteikoista riippuen erityyppiset argumentit saattavat toimia. Kuitenkin ne kaikki nojautuvat samaan periaatteeseen - **isomorfismi säilyttää kaikki suhteikon verkkoteoreettiset käsitteet ja ominaisuudet** eli sellaiset, jotka voidaan formuloida suhteikon relaation avulla. Esimerkkejä sellaisista käsitteistä ja ominaisuuksista ovat **pisteiden lähtö-ja tuloasteet, naapurit, naapurien asteet, nuolten lukumäärä** ja niin edelleen. Opimme kurssin varrella paljon muitakin käsitteitä ja ominaisuuksia, jotka saattavat helpottaa isomorfisuuden tai ei-isomorfisuuden tunnistamista.

Sen osoittamiseksi, että kaksi suhteikkoa **eivät ole isomorfisia** riittää löytää yksi tällainen verkkoteoreettinen ominaisuus, joka toisella suhteikolla on, mutta toisella ei ole. Toisaalta, jos suhteikot ovatkin isomorfisia, isomorfismin konstruktio yleensä perustuu juuri tällaisten ominaisuuksien hyväksikäyttöön. Näemme tästä esimerkkejä alla.

Seuraavassa lemmassa esitetään muutama yksinkertainen esimerkki tärkeistä isomorfismin ominaisuuksista.

Lemma. *Olkoon f isomorfismi suhteikkojen $G = (X, R)$ ja $H = (Y, R')$ välillä. Tällöin seuraavat väitteet pätevät.*

(1) $p_G = p_H$ (molemmassa suhteikossa on sama määrä pisteitä).

(2) $n_G = n_H$ (molemmassa suhteikossa on sama määrä nuolia).

(3) $v_G = v_H$ (molemmassa suhteikossa on sama määrä viivoja).

(4) Jokaisella $x \in P_G$ pätee

$$d_+(f(x)) = d_+(x), \ d_-(f(x)) = d_-(x).$$

Toisin sanoen isomorfismi säilyttää pisteiden tulo- ja lähtoasteet.

(5) Olkoon k luonnollinen luku. Tällöin

$$|\{x \in P_G \mid d_+(x) = k\}| = |\{y \in P_H \mid d_+(y) = k\}|,$$
$$|\{x \in P_G \mid d_-(x) = k\}| = |\{y \in P_H \mid d_-(y) = k\}|.$$

Toisin sanoen kummassakin suhteikossa on saman verran solmuja, joiden tulo(lähtö)aste on sama vakio $k \in \mathbb{N}$.

Jos G ja H ovat verkkoja lisäksi pätevät seuraavat väitteet.

(6) Jokaisella $x \in P_G$ pätee

$$d(f(x)) = d(x).$$

(7) Olkoon k luonnollinen luku. Tällöin

$$|\{x \in P_G \mid d(x) = k\}| = |\{y \in P_H \mid d(y) = k\}|.$$

(8) Kummallakin verkolla G ja H on sama astejono.

Todistus. Väite (1) seuraa suoraan siitä, että isomorfismi $f\colon |P_G| \to |P_H|$ on bijektio.

Väite (2): isomofismin määritelmästä seuraa, että kuvaus $g\colon R \to R'$, $g(x, y) = (f(x), f(y))$ on bijektio (tämän väitteen tarkka todistus jätetään harjoitustehtäväksi). Näin ollen

$$n_G = |R| = |R'| = n_H.$$

Väite (3) todistetaan samalla tavalla (yksityiskohdat harjoitustehtävänä).

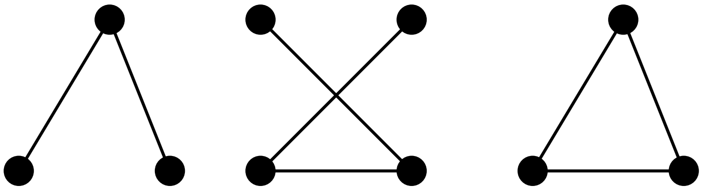
Väitteen (4) ensimmäinen yhtälö todistetaan osoittamalla, että kuvaus $z \mapsto f(z)$ on bijektio joukosta $|R(x)|$ joukolle $|R(f(x))|$. Yksityiskohdat harjoitustehtävänä. Toisen yhtälön todistus on samanlainen.

Väitteen (5) todistus. Merkitään

$$A = \{x \in P_G \mid d_+(x) = k\},$$
$$B = \{y \in P_H \mid d_+(y) = k\}.$$

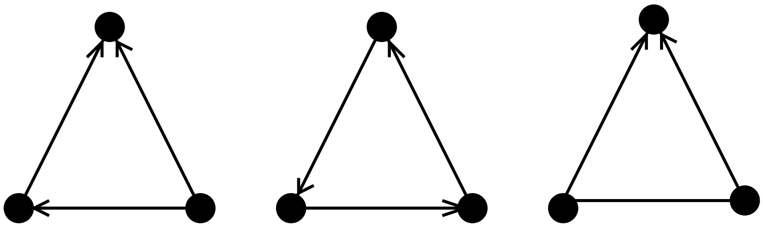
väitteen (4) nojalla kuvauksen f rajoittuma osajoukkoon A voidaan tulkita kuvaukseksi $f\colon A \to B$. Helposti nähdään (HT), että tämä rajoittuma on bijektio. Näin ollen $|A| = |B|$.

Väitteet (6) ja (7) ovat väitteiden (4) ja (5) erikoistapaukset verkoissa. Väite (8) seuraa väitteestä (7). $\square$



Esimerkki 1. *Verkko 1* *Verkko 2* *Verkko 3*

Näistä kolmesta verkosta mitkään kaksi eivät ole isomorfisia keskenään. Verkko 2 ei voi olla isomorfinen verkon 1 tai verkon 3 kanssa, sillä kummassakin niistä on kolme solmua, kun taas verkossa 2 solmuja on neljä. Verkot 1 ja 3 eivät ole isomorfisia, sillä verkossa 1 on kaksi viivaa, kun taas verkossa 3 on kolme viivaa.



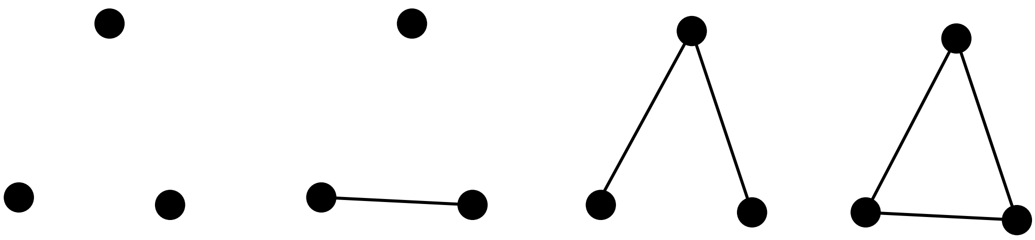
Esimerkki 2. A B C

Suhteikoista A, B, C mitkään kaksi eivät ole isomorfisia keskenään.
Suhteikko C ei ole isomorfinen muiden kanssa, koska se on ainoa, joka sisältää kokonaisen viivan. Toinen tapa - suhteikossa C on neljä nuolta (viiva vastaa kaksi nuolta!) kun taas suhteikoissa A ja B on kummassakin kolme nuolta.

Seuraavaksi osoitetaan, että suhteikot A ja B eivät ole isomorfisia. Kaikissa kolmessa on sama määrä pisteitä ja nuolia, joten tarkastellaan pisteiden asteita. Suhteikossa A on (tasan yksi) solmu, jonka tuloaste on 2. Suhteikoissa B taas sellaisia solmuja ei edes ole - suhteikon B jokaisen solmun tuloaste on 1. Näin olleen A ei voi olla isomorfinen B:n kanssa.

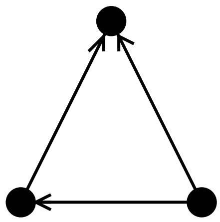
Kun tietynlaisia suhteikkoja (tai verkkoja) klassifioidaan pitämällä isomorfisia suhteikkoja (verkkoja) *samoina*, puhutaan klassifikaatiosta *isomorfiaa vaille*. Esimerkiksi voidaan osoittaa, että isomorfia vaille on olemassa tasan neljä erilaista kolmen pisteen verkkoa ja 11 erilaista neljän pisteen verkkoa. Erilaisia verkkoja, joissa on kolme pistettä on, tietysti, paljon enemmän kuin neljä- niitä on ääretön määrä. Kuitenkin on olemassa tasan neljä erilaista "mallia" tällaiselle verkolle, jokainen kolmen pisteen verkko on isomorfinen yhden ja tasan yhden tällaisen "mallin" kanssa.

Isomorfiaa vaille kaikki kolmen pisteen verkot:

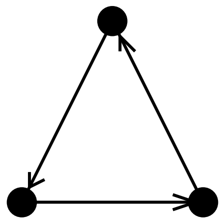


Verkko 1 Verkko 2 Verkko 3 Verkko 4

Esimerkki 3. *Osoitetaan, että edellisessä esimerkissä mainitut suhteikot A ja B ovat isomorfiaa vaille ainoat kolmen pisteen turnaukset.*



A



B

Muistutus: turnaus on täydellinen yksisuuntainen suhteikko eli sellainen silmukaton suhteikko jossa kahden eri pisteen välillä on tasan yksi nuoli.

Olkoon G kolmen pisteen turnaus. Merkitään sen pisteitä a, b, c. Koska täydellisessä kolmen pisteen verkossa *K_3 on $3 \cdot 2/2 = 3$ viivaa, G:ssä on tasan kolme nuolta (koska sen nuolet vastaavat yksikäsitteisesti täydellisen verkon viivoja).*
Lemman II 2.1. nojalla saadaan

$$d_+(a) + d_+(b) + d_+(c) = 3. \tag{4}$$

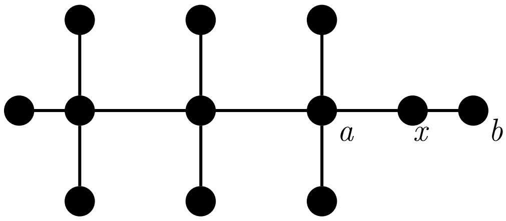
Lisäksi jokaisen pisteen tuloaste on korkeintaan kaksi (koska G:ssä ei ole silmukoita).

<u>Vaihtoehto 1</u>: jollakin suhteikolla pisteellä, esimerkiksi pisteellä a, tuloaste on kaksi, $d_+(a) = 2$. Tällöin turnauksessa on nuolet $\overrightarrow{ba}$ ja $\overrightarrow{ca}$. Koska kyseessä on turnaus, pisteiden b ja c välillä on oltava nuoli. Voidaan olettaa, että suhteikossa on nuoli $\overrightarrow{bc}$ (nimitetään jäljellä olevat pisteet niin, että olisi juuri näin).
Helposti nähdään, että tässä tapauksessa G on isomorfinen suhteikon A kanssa.

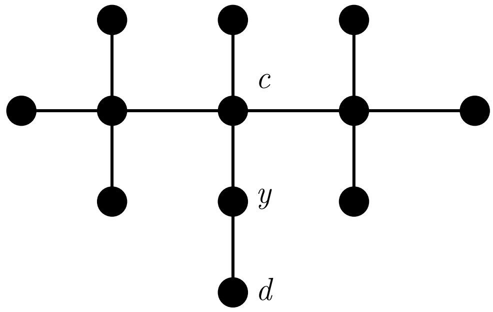
<u>Vaihtoehto 2</u>: jos vaihtoehto 1 ei toteudu, kaikille suhteikon pisteille pätee $d_+(x) \leqslant 1$. Tällöin, koska pisteitä on kolme, yhtälö (4) voi toteuttua jos ja vain jos $d_+(x) = 1$ kaikilla $x = a, b, c$.
Koska $d_+(a) = 1$, on olemassa nuoli, jonka loppupiste on a, nimitetään sen alkupiste b:ksi. Suhteikossa on siis nuoli $\overrightarrow{ba}$. Koska $d_+(b) = 1$ ja nuolta $\overrightarrow{ab}$ (eikä silmukka $\overrightarrow{bb}$) suhteikossa ei ole (suhteikko on turnaus), ainoa jäljellä oleva vaihtoehto on, että suhteikossa on nuoli $\overrightarrow{cb}$. Suorittamalla samanlainen päättely pisteen c kohdalla, nähdään, että suhteikossa on nuoli $\overrightarrow{ac}$.
Helposti nähdään, että tässä tapauksessa G on isomorfinen suhteikon B kanssa.

Verkkojen isomorfismit

Kun yritetään selvitä ovatko kaksi *verkkoa* isomorfisia keskenään, kannattaa aloittaa tarkistamalla, ovatko verkkojen astejonot samoja. Jos ne eivät ole, verkot eivät voi olla isomorfisia. **Jos astejonot ovat samoja, tämä ei vielä kuitenkaan tarkoita, että verkot olisivat välttämättä isomorfisia!**



Verkko G



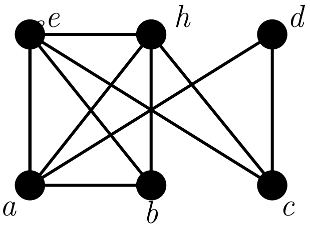
Verkko H

Esimerkki 5.

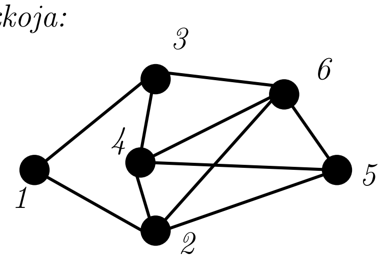
Verkoilla G ja H on sama astejono - $(4, 4, 4, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Verkot eivät kuitenkaan ole isomorfisia. Osoitetaan tämä. Oletetaan, että $f\colon G \to H$ on isomorfismi. Molemmassa verkossa on tasan yksi solmu, jonka aste on 2, solmu x verkossa G ja solmu y verkossa H. Lemmasta 1 seuraa, että välttämättä $f(x) = y$. Koska f on isomofismi, se kuvaa solmun x naapurit a, b solmun y naapureiksi c, d. Lisäksi $d(a) = d(c) = 4$, $d(b) = d(d) = 1$, joten, koska f säilyttää asteet, on pakko olla $f(a) = f(c)$, $f(b) = f(d)$. Edelleen, pisteen a naapurit kuvautuvat pisteen c naapureiksi. Kuitenkin, a:llä on kaksi naapuria, joiden aste on 1, kun taas c:llä tällaisia naapureita on vain yksi. Koska f kuvaa naapurit naapureiksi ja säilyttää asteet, saadaan ristiriita. Näin ollen, isomorfismia f ei voi olla olemassa.

Huomatus: *Olemme nähneet tämän esimerkin aikaisemmin, kurssin "johdanto"-osiossa. Esimerkissä tarkastellut verkot esittävät kaksi propanolin C_3H_7OH molekyylin isomeeri-muotoa.*

Esimerkki 6. *Silloin, kun verkot ovatkin isomorfisia, asteiden huolellinen analyysi auttaa isomorfian konstruktiossa.*
Tarkastellaan seuraavia verkkoja:



Verkko G



Verkko G′

Kummankin verkon astejono on $(4, 4, 4, 3, 3, 2)$.

Osoitetaan, että $G \approx G'$. Yritetään konstruoida isomorfismi $f\colon G \to G'$. Aloitetaan huomaamalla, että molemmassa verkossa on tasan yksi alkio, jonka aste on 2 - alkio d verkossa G ja alkio 1 verkossa G'. Näin ollen on pakko olla $f(d) = 1$. Solmulla d on naapuri a, jonka aste on 4 ja naapuri c, jonka aste on 3. Vastaavasti solmulla 1 on naapuri 2, jonka aste on 4 ja naapuri 3, jonka aste on 3. Näin ollen on asetettava $f(a) = 2$, $f(c) = 3$. Koska b on pisteen a ainoa naapuri, jonka aste on 3, ja vastaavasti verkossa G' solmu 5 on pisteen 2 ainoa naapuri, jonka aste on 3, on oltava $f(b) = 5$. Jäljellä pisteet e, h verkossa G ja pisteet $4, 6$ verkossa G'. Näiden kaikkien asteet ovat 4. On oltava joko $f(e) = 4, f(h) = 6$ tai $f(e) = 6, f(h) = 4$. Tarkistamalla viivat, nähdään, että itse asiassa kumpikin näistä vaihtoehdoista kelpaa.

Saadaan siis erääksi isomorfismiksi $f\colon G \to G'$ esim. kuvaus, joka on määritelty eh-

doilla

$$f(a) = 2, f(b) = 5, f(c) = 3, f(d) = 1, f(e) = 4, f(h) = 6.$$

Toinen valinta olisi kuvaus $g\colon G \to G'$, joka on määritelty ehdoilla

$$g(a) = 2, g(b) = 5, g(c) = 3, g(d) = 1, g(e) = 6, g(h) = 4.$$

Kun (mahdollinen) isomorfismi on saatu konstruoitua, lopuksi kannattaa vielä tarkistaa, onko se todellakin isomorfismi. Tämä tehdään suoraan määritelmän kautta - käydään läpi kaikki verkon G parit (x, y) ja varmistetaan, että verkossa G on viiva $\overline{xy}$ jos ja vain jos verkossa G' on viiva $\overline{f(x)f(y)}$. Suorita tämä tarkistus edellä konstruoidun kuvauksen f (ja/tai kuvauksen g kohdalla) ja varmista, että olemme todellakaan konstruoineet isomorfismin.

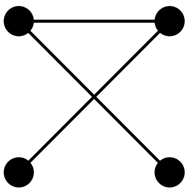
Huomautus: Olemme samalla näyttäneet, että verkkojen G ja G' välillä on olemassa tasan kaksi isomorfismia. Tästä seuraa (miksi?), että verkolla G on tasan kaksi automorfismia - toinen on identtinen kuvaus ja toinen on kuvaus joka permutoi pisteitä e, h keskenään ja pitää muut pisteet paikallaan.

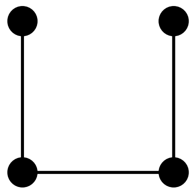
Outline:
"miten selvitetään ovatko annetut verkot G, G' isomorfisia keskenään":

- Aloitetaan tarkistamalla onko verkoissa edes sama määrä solmuja ja onko verkoilla sama astejono. Koska astejono määrää viivojen lukumäärän (miksi?), ei kannata tarkistaa erikseen onko viivoja saman verran.
- Jos astejonot ovat samoja, yritetään konstruoida isomorfismi "step-by-step" käyttämällä hyväksi sitä, että sen on säilytettävä asteet, naapurit, naapureiden naapurit ja muut verkkoteoreettiset ominaisuudet (joista monia opimme kurssilla myöhemmin).
- Jos törmätään ristiriitaan, ollaan valmiit - verkot eivät ole isomorfisia.
- Jos isomorfia on konstruoitu, lopuksi kannattaa tarkistaa, että se todellakin on isomorfismi.
- Koska tiedämme, että molemmassa verkossa on sama määrä viivoja, riittää tarkistaa vain, että f todellakin on bijektio solmujen välillä ja jokaista verkon G viivaa $\overline{xy}$ verkossa G' on viiva $\overline{f(x)f(y)}$. Tarkka perustelu sille, miksi tämä riittää, jätetään harjoitustehtäväksi.

Komplementti

Olkoon $G = (X, R)$ *verkko*. Sen **komplementti** on verkko $\tilde{G}$, jolla on samat pisteet kuin verkolla G ja jossa kahden eri pisteen $x, y \in P_G$ välillä on viiva jos ja vain pisteiden x ja y välillä **ei ole viivaa** verkossa G.





Verkko G Verkon G komplementti $\tilde{G}$

Olkoon $f\colon G \to H$ isomorfismi kahden verkon välillä. Isomorfismin määritelmästä seuraa tällöin, että f on myös isomorfismi komplementtien $\tilde{G}$ ja $\tilde{H}$ välillä. Toisin sanoen **Verkot G ja H ovat isomorfisia jos ja vain jos niiden komplementit $\tilde{G}$ ja $\tilde{H}$ ovat isomorfisia**.

Näin ollen yksi tapa osoittaa, että kaksi verkkoa ovat/eivät ole isomorfisia, on tarkastella vastaavaa ongelmaa verkkojen komplementeille. Tämä lähestymistapa on hyödyllinen silloin kun komplementit ovat ”yksinkertaisempia” kuin alkuperäiset verkot.

Oletetaan, että verkossa G on $p_G = n$ solmua ja $k = v_G$ viivaa. Tällöin sen komplementissa $\tilde{G}$ on

$$\tilde{k} = \frac{n(n-1)}{2} - k$$

viivaa. Tämä seuraa siitä, että $\tilde{G}$ saadaan n:n solmun täydellisestä verkosta poistamalla siitä verkon G viivat. Mitä suurempi on k, sitä pienempi on $\tilde{k}$. Näin ollen, jos verkossa G on ”paljon” viivoja, komplementissa niitä on vähän, joten komplementin tarkastelu on helpompi kuin G:n tarkastelu.

Esimerkki: Osoitetaan, että kaikki verkot, joissa on 5 solmua ja 9 viivaa ovat isomorfisia keskenään.

Ratkaisu: Olkoot G ja H sellaiset verkot. Koska täydellisessä viiden solmun verkossa on $5 \cdot 4/2 = 10$ viivaa, komplementeissa $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ on kummassakin 5 pistettä ja tasan $10 - 9 = 1$ viiva. Selvästi (miksi?) $\tilde{G}$ ja $\tilde{H}$ ovat isomorfisia. Näin ollen G ja H ovat isomorfisia.

Esimerkki: Osoitetaan, että isomorfiaa vaille on olemassa vain kaksi verkkoa, joissa on 5 solmua ja 8 viivaa.

Ratkaisu: Olkoon G verkko, jossa on 5 solmua. Tällöin G:ssä on 8 viivaa jos ja vain jos sen komplementissa $\tilde{G}$ on $10 - 8 = 2$ viivaa. Näin ollen riittää osoittaa, että isomorfiaa vaille on olemassa tasan kaksi verkkoa, jossa on 5 solmua ja 2 viivaa. Tällaisia verkkoja on helppo karakterisoida. Nimittäin tällaisen verkon ainoat kaksi viivaa joko ”leikkaavat”, eli niillä on yksi yhteinen päätepiste, tai sitten ovat ”erillisiä”. Näin saadaan kaksi verkkoa, jotka helposti nähdään olevan ei-isomorfisia: toisessa verkossa kaikkien pisteiden asteet ovat $\leqslant 1$, toisesta löytyy piste, jonka aste on 2.