Pisteiden asteet

Olkoon $G = (X, R)$ suhteikko. Pisteen $x \in X$ **tuloaste** $d_+(x)$ suhteikossa G on

$$d_+(x) = |R(x)|$$

eli *pisteseen x saapuvien nuolten lukumäärä.*
Toisin sanoen $d_+(x)$ kertoo kuinka monen nuolen *loppupiste* on x.

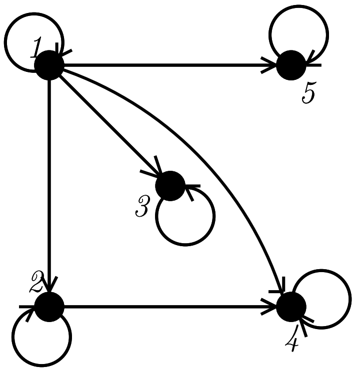
Pisteen $x \in X$ **lähtöaste** $d_-(x)$ suhteikossa G on

$$d_-(x) = |R^{-1}(x)|$$

eli *pisteestä x lähtevien nuolten lukumäärä.*
Toisin sanoen $d_-(x)$ kertoo kuinka monen nuolen *alkupiste* on x.

Esimerkki 1. *Tarkastellaan suhteikkoa $([5], R)$, missä*

$$R = \{(x, y) \in [5] \mid x \text{ on jaollinen } y\text{:llä}\}.$$



Tällöin

$$d_+(1) = 1, d_+(2) = d_+(3) = d_+(5) = 2, d_+(4) = 3,$$
$$d_-(1) = 5, d_-(2) = 2, d_-(3) = d_-(4) = d_-(5) = 1.$$

Tämän suhteikon tapauksessa $d_+(x)$ ilmaisee kuinka monta tekijä luvulla x on joukossa $[5]$ ja $d_-(x)$ ilmaisee kuinka monen luvun $y \in [5]$ eräs tekijä on x.

Huomaa, että silmukka otetaan huomioon sekä tulo-, että lähtöastettä laskiessa, sillä silmukka pisteessä x sekä saapuu pisteeseen x, että lähtee pisteestä x. Myös jokainen viiva $\overline{xy}$ suhteikossa G vastaa sekä yhtä saapuvaa nuolta $\overrightarrow{yx}$, että yhtä lähtevää nuolta $\overrightarrow{xy}$. Tästä heti seuraa, että symmetrisen suhteikon G (erityisesti verkon!) tapauksessa jokaisella $x \in P_G$ pätee

$$d_+(x) = d_-(x).$$

Symmetrisen suhteikon tapauksessa lukua $d_+(x) = d_-(x)$ merkitään $d(x)$:llä ja sitä sanotaan pisteen x **asteeksi**. Tällöin *jokaisen pisteen aste on sama kuin niiden viivojen lukumäärä, jonka toinen päätepiste on* x (Lemma II 2.2.). Symmetrisen suhteikon piste x on *paritonasteinen* jos sen aste on pariton luku ja *parillisasteinen* jos sen aste on parillinen luku.

Olkoon $G = (X, R)$ suhteikko. Merkitään

$$p_G = |P_G| = |X| \text{ (solmujen lukumäärä)},$$

$$n_G = |N_G| = |R| \text{ (nuolten lukumäärä)},$$
$$v_G = |V_G| \text{ (viivojen lukumäärä)}.$$

Lemma II 2.1.:
Jokaisessa suhteikossa kaikkien pisteiden tuloasteiden (lähtöasteiden) summa on yhtä suuri kuin n_G,

$$n_G = \sum_{x \in P_G} d_+(x) = \sum_{x \in P_G} d_-(x).$$

Esimerkiksi edellä tarkastellulle suhteikolle $([5], R)$ (missä R jaollisuusrelaatio) pätee

$$d_+(1) + d_+(2) + d_+(3) + d_+(5) + d_+(4) = 10 = d_-(1) + d_-(2) + d_-(3) + d_-(4) + d_-(5).$$

Suoraan kuvasta nähdään, että suhteikossa todellakin on tasan 10 eri nuolta.

Lemman II 2.1. suorana seurauksena saadaan verkon tapauksessa
Lemma II 2.3.:
Jokaisessa verkossa G kaikkien pisteiden asteiden summa on yhtä suuri kuin $2v_G$,

$$\sum_{x \in P_G} d(x) = 2v_G. \tag{1}$$

Erityisesti verkon pisteiden asteiden summa on **aina parillinen luku** (Huom: tämä ei päde yleisen symmetrisen suhteikon tapauksessa, syynä on mahdollinen silmukkojen läsnäolo).

Seuraus: Verkossa paritonasteisten pisteiden lukumäärä on parillinen.

Tätä tulosta sanotaan usein **Kättelylemmaksi** (engl. Handshaking Lemma). Kuvitellaan, että juhliin saapuneet vieraat ovat verkon solmuja ja kahden solmun eli ihmisen välillä on viiva jos he ovat kätelleet toisiaan. Kättelylemmasta tällöin juhlissa on parillinen määrä ihmisiä, jotka ovat kätelleet parittoman monen ihmisen kanssa.

Verkon viivojen lukumäärä

Olkoon G verkko, jonka solmujen lukumäärä on $|P_G| = n$. Jokaiselle $x \in P_G$ pätee

$$d(x) \leqslant n - 1,$$

sillä verkossa ei ole silmukkoja. Yhtälöstä (1) seuraa tällöin, että

$$v_G = \frac{1}{2}(\sum_{x \in P_G} d(x)) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$

Yhtäsuuruus $v_G = \frac{n(n-1)}{2}$ pätee täsmälleen silloin kun $d(x) = n-1$ jokaisella $x \in P_G$. Tämä puolestaan on yhtäpitävä sen kanssa, että verkon jokainen piste on jokaisen toisen pisteen naapuri, eli yhtäpitävä sen kanssa, että verkko on **täydellinen**. Näin ollen täydellisessä verkossa, jossa on n pistettä (esimerkiksi verkossa K_n) on tasan $\frac{1}{2}n(n-1)$ viivaa.

Tämä tulos ei ole mikään yllätys kombinatoriikkaan perehtyneelle, nimittäin jokainen verkon viiva $\overline{xy}$ vastaa joukon P_G 2-alkioista osajoukkoa $\{x, y\}$ ja tämä vastaavuus on injektiivinen. Näin ollen viivoja on korkeintaan niin paljon kun joukossa P_G on 2-alkoisia osajoukkoja. Kombinatoriikasta tiedetään, että niitä on

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Lemma II 2.9. Jokaisessa verkossa, jossa on vähintään kaksi solmua, on olemassa kaksi eri solmua, joilla on sama aste.

Todistus: Tämä on verkkoteoreettinen versio väitteestä, jonka olemme todistaneet aikaisemmin äärellisten joukkojen teorian yhteydessä: " Jokaisessa ihmisjoukossa, jossa on ainakin kaksi ihmistä, on olemassa kaksi eri ihmistä, joilla on tässä ihmisjoukossa sama määrä tuttavia".

Verkkojen kohdalla todistus on samanlainen. Olkoon $n = |P_G|$, tällöin aste on kuvaus

$$d\colon P_G \to \{0, \ldots, n-1\}.$$

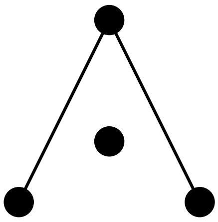
Tehtävänä on osoittaa, että d ei ole injektio. Koska joukot P_G ja $\{0, \ldots, n-1\}$ ovat äärellisiä ja samankokoisia (kummassakin n alkiota), äärellisten joukkojen teoriasta seuraa, että kuvaus d on injektio jos ja vain jos se on surjektio. Näin ollen riittää osoittaa, että d ei ole surjektio. Tehdään vasta-oletus: d on surjektio. Tällöin erityisesti on olemassa $x \in P_G$ jolle pätee $d(x) = 0$ sekä $y \in P_G$ jolle pätee $d(y) = n - 1$. Tästä seuraa, että piste y on yhteydessä jokaiseen toiseen pisteeseen, erityisesti pisteeseen x. Mutta tämä on mahdotonta, sillä $d(x) = 0$. $\square$

Astejono

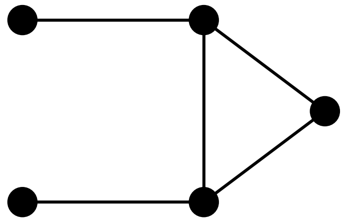
Huomautus: Tätä käsitettä ei löydy Junnilan monisteesta.

Olkoon G verkko. Sen **astejono** on jono, jossa luetellaan kaikkien verkon pisteiden asteet **laskevassa järjestyksessä**. Toistuvat asteet mainitaan niin monta kertaa, kun ne esiintyvät verkossa.

Esimerkki



Verkko 1



Verkko 2

Verkon 1 astejono on $(2, 1, 1, 0)$. Verkon 2 astejono on $(3, 3, 2, 1, 1)$.

Kun verkossa on n solmua, sen astejono on n-jono. Koska jokaisen verkon pisteen aste on tällöin $\leqslant (n-1)$, tässä jonossa ei silloin voi esiintyä lukuja $\geqslant n$.
Lemmasta II.2.1 seuraa, että astejonon komponenttien summa on aina parillinen luku. Lemmasta II 2.9. seuraa, että astejonossa aina esiintyy toistoja (paitsi kun verkko on tyhjä tai siinä on yksi alkio).

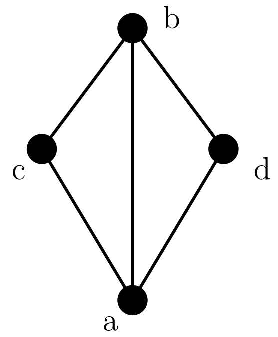
Esimerkki: Onko olemassa verkkoa, jonka astejono on
a) $(3, 3, 3, 2, 2)$, b) $(4, 3, 3, 2)$, c) $(3, 3, 1, 1)$, d) $(3, 3, 2, 2)$?

Ratkaisu:
a) Verkko on mahdoton, koska $3+3+3+2+2 = 13$ on pariton luku. Yhtälön (1) mukaan verkon pisteiden asteiden summa on aina parillinen.

b) Olkoon G verkko, jonka astejono on $(4, 3, 3, 2)$. Tällöin verkossa on 4 solmua, joten jokaisen pisteen aste on korkeintaan 3. Saatu ristiriita osoittaa sen, että kyseinen verkko on mahdoton.

c) Nyt verkossa on 4 pistettä, jokaisen pisteen aste on $\leqslant 3$ ja asteiden summa on parillinen. Verkko on kuitenkin mahdoton. Nimittäin oletetaan, että kyseinen verkko G on olemassa. Tällöin verkossa on kaksi eri alkiota $x, y \in P_G$, joiden molempien aste on kolme. Koska verkossa on neljä pistettä, tämä tarkoittaa sitä, että sekä x, että y ovat yhteydessä jokaiseen verkon pisteeseen. Toisin sanoen kaikilla muilla pisteillä on ainakin kaksi naapuria - x ja y, mistä seuraa, että muiden pisteiden aste on vähintään 2, eikä siis voi olla 1.

d) Yritetään konstruoida vaadittu verkko. Merkitään verkon pisteitä symboleilla a, b, c, d, missä a:n ja b:n asteet ovat kolme ja c:n ja d:n asteet ovat kaksi. Heti nähdään, että a:n naapureiden on oltava b, c ja d ja b:n naapureiden on oltava a, c, d. Tästä saadaan heti ainakin verkon osaksi seuraava kuva:



Mutta tämä konstruktio toteuttaa jo vaaditut ehdot, kuvassa on verkko, jonka astejono on $(3, 3, 2, 2)$. Verkko on siis olemassa.
Ratkaisun välivaiheita tarkastelemalla nähdään, että vaaditun verkon konstruktiossa ei ollut mitään ”valinnanvaraa” eli ”olennaisesti” on olemassa vain yksi verkko, jonka astejono on $(3, 3, 2, 2)$, siinä mielessä, että kaikki verkot, joilla on tämä astejono ”näyttävät samoilta”. Tehdäksemme tästä väitteestä täsmällisen tarvitsemme *isomorfian* käsitettä. Siitä puhutaan seuraavassa osassa.