Seuraajaluettelot ja matriisiesitykset

Suhteikon struktuuria havainnollistava kaksiulotteinen kuva on näppärä suhteellisen pienikokoisten suhteikkojen kohdalla, mutta sekin vain ihmisen näkökulmasta. Kun suhteikko on iso, kuvasta tulee sekava ja epäkäytännöllinen. Lisäksi esim. tietokoneelle kuvan hahmottaminen on huomattavasti vaikeampaa kuin suhteikon relaation formaali symbolinen käsittely. Tästä syystä tutustaan lyhyesti myös muihin suhteikon ja verkon esitystapoihin.

Seuraajaluettelot

Olkoon $G = (X, R)$ suhteikko ja olkoon $x \in P_G$ sen solmu. Pisteen x **seuraajaluettelossa** luetellaan joukon $R^{-1}(x)$ alkiota, eli solmun x *seuraajia.* Muistutus: solmu y on solmun x seuraaja jos ja vain jos suhteikossa G on nuoli $\overrightarrow{xy}$, mikä on yhtäpitävä ehdon $(y, x) \in R$.

Lista suhteikon kaikkien pisteiden seuraajaluetteloista määrää suhteikko täydellisesti.

Example 1. *Olkoon* $X = [6]$ *ja* R *jaollisuusrelaatio,*

$$R = \{(x, y) \in [6] \times [6] \mid x \text{ on jaollinen } y\text{:llä}\}.$$

Tällöin suhteikon (X, R) *seuraajaluettelot näytävät seuraavilta:*

$$1 : \; 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$2 : \; 2, 4, 6$$

$$3 : \; 3, 6$$

$$4 : \; 4,$$

$$5 : \; 5,$$

$$6 : \; 6.$$

Pisteen x *seuraajat ovat tasan niitä lukuja joukosta* $[6]$*, jotka ovat jaollisia luvulla* x*.*

Jos suhteikon pisteellä x ei ole seuraajia suhteikossa, sen seuraajaluettelo on tyhjä. Tällöin se kirjoitetaan muodossa

$$x :$$

Seuraajaluettelojen avulla voidaan laskea pisteiden lähtöasteita, sillä $d_{-}(x)$ on määritelmän mukaan joukon $R^{-1}(x)$ koko.

Yhteysmatriisi

Huomautus: Näistä ei puhuta Junnilan monisteessä (jos joitakin satunnaisia harjoitustehtäviä ei lasketa).

Olkoon $G = (X, R)$ suhteikko ja esitetään sen pisteiden joukko muodossa $\{x_1 \dots, x_n\}$, eli luetellaan sen alkiot **jossakin kiinnitetyssä järjestyksessä**. Suhteikon G **yhteysmatriisi** $A = (a_{ij})_{i,j \in [n]}$ on taulukko, jossa on n riviä ja n saraketta (eli $(n \times n)$-matriisi). Taulukon alkio a_{ij}, joka sijaitsee rivillä i ja sarakkeessa j, on ykkönen, jos $(x_i, x_j) \in R$ ja nolla muuten.

Example 2. *Numeroidaan joukon* $[6]$ *alkiot luonnollisessa järjestyksessä* $1, 2, 3, 4, 5, 6$. *Tällöin suhteikon* $([6], R)$, *missä* R *on jaollisuusrelaatio kuten esimerkissä 1 yllä, yhteysmatriisi on*

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1.
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Jos suhteikon pisteiden joukon P_G alkioita järjestetään uudelleen toisella tavalla, yhteysmatriisin sarakkeita ja riviä pitää permutoida. Yhteysmatriisi siis ei riipu ainoastaan suhteikosta vaan myös siitä, missä järjestyksessä sen solmut numeroidaan.

Olkoot G ja H suhteikot. Kiinnitetään suhteikossa G jokin solmujen järjestys $\{x_1 \dots, x_n\}$. Olkoon A suhteikon G yhteysmatriisi tämän järjestyksen suhteen. Jos on olemassa isomorfismi $f : G \to H$, niin suhteikon H yhteysmatriisi B solmujen järjestykseen $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ on sama kuin A, $A = B$. Tämä seuraa suoraan yhteysmatriisin ja isomorfismin määritelmästä. Kääntäen, jos suhteikossa H on olemassa tapa laittaa solmut järjestykseen $\{y_1 \dots, y_n\}$, niin, että yhteysmatriisi B tämän järjestyksen suhteen on sama kuin matriisi A, ehdoilla $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$ määritelty kuvaus $f : P_G \to P_H$ on isomorfismi. Näin ollen:

Suhteikot G ja H ovat isomorfisia jos ja vain kummankin suhteikon solmut voidaan järjestää niin, että vastaavista yhteysmatriiseista tulee samoja.

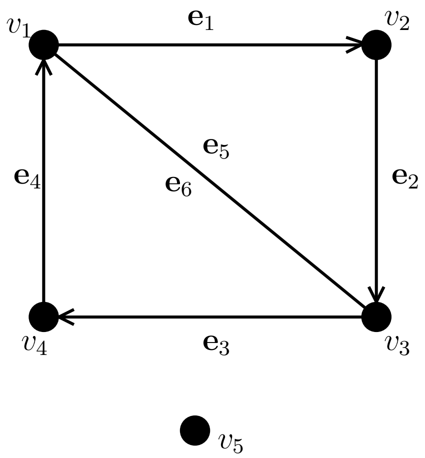
Insidenssimatriisi

Yhteysmatriisi ei ole ainoa yleisesti käytössä oleva tapa esittää suhteikko matriisin avulla. Olkoon $G = (X, R)$ suhteikko jossa on $n = |X|$ solmua ja $m = |N_G| = |R|$ nuolta. Sen **insidenssimatriisi** $B = (b_{ij})_{i \in [n], j \in [m]}$ on $(n \times m)$-matriisi, joka konstruoidaan seuraavasti. Matriisin rivit vastaavat suhteikon pisteitä $x_1, \dots, x_n$, jotka luetellaan jossakin kiinnitetyssä järjestyksessä. Matriisin sarakkeet vastaavat suhteikon *nuolia* $e_1, \dots, e_m$, jotka ovat myöskin numeroitu jossakin kiinnitetyssä järjestyksessä. Matriisin alkio b_{ij} on määritelty seuraavasti

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jos solmu } x_i \text{ on nuolen } e_j \text{ alkupiste }, \\ -1, \text{ jos } x_i \text{ on nuolen } e_j \text{ loppupiste }, \\ 0, \text{ muuten }. \end{cases}$$

Määritelmä on ristiriitainen, jos suhteikko sisältää silmukoita, joten insidenssimatriisia ei määritellä suhteikolle, jossa on silmukoita.

Example 3. *Tarkastellaan suhteikkoa* $G = (X, R)$*, jossa* $X = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ *ja nuolet ovat* $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{v_1v_2}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{v_2v_3}$, $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{v_3v_4}$, $\mathbf{e}_4 = \overrightarrow{v_4v_1}$, $\mathbf{e}_5 = \overrightarrow{v_1v_3}$, $\mathbf{e}_6 = \overrightarrow{v_3v_1}$. *Suhteikko on esitetty seuraavassa kuvassa. Huomaa, että suhteikossa on viiva* $\overline{v_1v_3}$.



Tämän suhteikon insidenssimatriisi (yllä annetun solmujen ja nuolten järjestyksen suhteen) on 5×6*-matriisi*

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{pmatrix} \end{array}$$

Suhteikon piste v_5 *ei ole minkään nuolen alku-tai loppupiste. Tällaista suhteikon pistettä sanotaan* **eristetyksi**. *Insidenssimatriisissa eristettyä pistettä vastaava rivi on nollarivi.*

Jos suhteikon solmuille ja nuolille valitaan toisia järjestyksiä, insidenssimatriisissa on vaihdettavaa keskenään riviä ja sarakkeita. Samalla tavalla kuin yhteysmatriisin kohdalla, helposti nähdään, että kaksi suhteikkoa ovat isomorfiset jos ja vain jos niillä on sama insidenssimatriisi joidenkin pisteiden ja nuolten järjestysten suhteen.

Insidenssimatriisi antaa suhteikosta lyhyemmän esityksen kuin yhteysmatriisi, jos suhteikossa on "vähän" nuolia, tarkemmin sanottuna kun suhteikossa on vähemmän nuolia kuin pisteitä. Tällöin insidenssimatriisi on kooltaan pienempi kuin yhteysmatriisi, joten se vie vähemmän tilaa kuin yhteysmatriisi.

Suhteikkojen matriisiesityksillä on sekä käytännöllisiä, että teoreettisia sovelluksia. Esimerkiksi verkon tallentaminen ja käsittely tietokoneella on usein kätevä tehdä matriisien avulla. Lisäksi matriiseilla voidaan suorittaa algebrallisia operaatioita: laskea ne yhteen, kertoa keskenään, muodostaa käänteismatriiseja, laskea determinantteja jne. Osoittautuu, että tällaiset algebralliset pyörittelyt saattaavat paljastaa uutta informaatiota suhteikkojen struktuurista, sekä edesauttavat verkkoteorian tutkimista. Tällä kurssilla ei ole kuitenkaan mahdollista mennä tähän aiheseen sen syvällisemmin.

Verkkojen matriisiesityksistä

Koska verkko on erikoistapaus suhteikosta, sillä on yhteys- ja insidenssimatriisiesityksiä.

Verkon yhteysmatriisi $A = (a_{ij})$ on aina **symmetrinen**, eli $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla i, j. Tämä johtuu siitä, että verkko on symmetrinen suhteikko. Lisäksi, koska verkossa ei ole silmukoita, matriisin diagonaalialkiot ovat nollia, $a_{ii} = 0$ kaikilla i. Tästä seuraa, että verkon yhteysmatriisista riittää säilyttää (esim. tietokoneen muistissa) vain **yläkolmio**, joista on poistettu diagonaali, eli alkiot $(a_{ij})_{i<j}$.

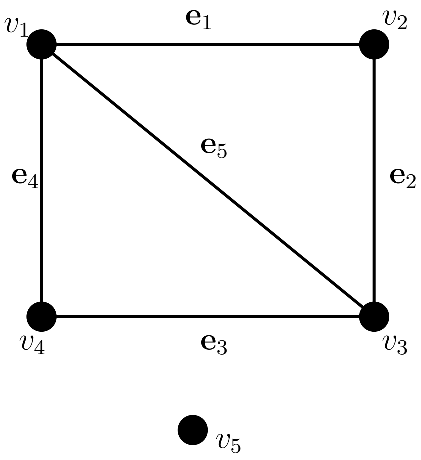
Suhteikkoille määriteltyä insidenssimatriisia ei ole kätevää käyttää sellaisenaan verkoille, koska siinä on turhia sarakkeita - jokaista nuolta $e_k = \overrightarrow{xy}$ kohti verkossa on vastakkainen nuoli $e_l = \overrightarrow{yx}$. Jos tiedämme etukäteen, että kyseessä on verkko, l'nnes sarake on tällöin turha. Tästä johtuen verkoille määritellään insidenssimatriisi käyttämällä *viivoja* nuolten sijaan. Tämä tehdään seuraavasti.

Olkoon G verkko. Luetellaan sen solmut $\{x_1, \dots, x_n\}$ ja **viivat** $\{e_1, \dots, e_m\}$ joissakin kiinitetyissä järjestyksissä. Verkon G *verkkoinsidenssimatriisi* on tällöin $(n \times m)$-matriisi $B = (b_{ij})$, jonka alkiot määritellään seuraavasti:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos solmu } x_i \text{ on viivan } e_j \text{ päätepiste,} \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Huomaa ero suhteikon insidenssimatriisiin verrattuna - jälkimmäisessä esiintyy lukuja $0, 1, -1$ kun taas verkon insidenssimatriisissa esiintyy vain lukuja $0, 1$.

Example 4. *Tarkastellaan esimerkissä 1 yllä esiintyvän suhteikon G symmetristä sulkeuma G^s (joka on verkko):*



Verkko G^s

Tämän verkon verkkoinsidenssimatriisi (kuvassa annetun solmujen ja viivojen järjestyksen suhteen) on

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Vertaa tätä matriisia suhteikon G insidenssimatriisiin (kts. Esimerkki 3).