Suhteikot ja verkot

Aleksandr Pasharin

Suhteikko

Suhteikko on äärellinen joukko X, joka on varustettu jollakin relaatiollaan $R \subset X \times X$. Formaalisti suhteikko määritellään parina $G = (X, R)$, jossa X on äärellinen joukko ja R on joukon X relaatio. Joukon X alkioita sanotaan tällöin suhteikon **pisteiksi** tai **solmuiksi**. Relaatiota R sanotaan suhteikon relaatioksi.

Suhteikko on siis kokonaisuus, jonka muodostavat sen pisteiden joukko X ja joukon X eräs relaatio R.

Esimerkki 1. *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ luonnollinen luku. Olkoon*

$$R = \{(x, y) \in [n] \times [n] \mid x \textit{ on jaollinen } y\textit{:llä}\}.$$

Tällöin $([n], R)$ on suhteikko.

Myös $([n], \varnothing)$ on suhteikko. Tämän suhteikon relaatio on tyhjä.

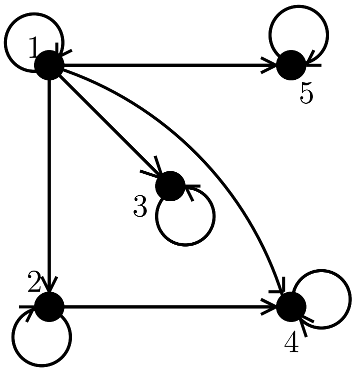
Geometrinen kaavio

Suhteikko (X, R) usein havainnollistetaan geometrisena kaaviona tasossa, jossa suhteikon pisteitä esitetään tason pisteinä. Kun $(y, x) \in R$ eli xRy, pisteiden $x, y \in X$ välillä on kaaviossa piirretty *suunnattu nuoli*, jonka *alkupiste* on x ja *loppupiste* on y. Tämän nuolen ei tarvitse olla suora, vaan se voi olla mikä tahansa yhtenäinen geometrinen käyrä kahden pisteen välillä **joka ei leikkaa itseään**. Nuoli varustetaan nuolenpäällä sen loppupisteen kohdalla. Eri nuolet saavat leikata toisiaan, mutta käytännön syistä vaaditaan, että nuoli pisteiden x ja y välillä ei saa mennä muiden joukon X pisteiden $z \in X$, $z \neq x, y$, kautta (koska silloin kaaviosta on mahdotonta päätellä suhteikon relaatio R). Yleensä nuoli piirretään suorana, jos se on mahdollista. Jos suhteikon relaatio sisältää parin (x, x) jollakin $x \in R$, kaaviossa esiintyvä nuoli pisteestä x itselleen yleensä piirretään *silmukkana*.

Huomaa erityisesti tällä kursilla sovittu sääntö - relaation paria (x, y) vastaa nuoli, joka alkaa pisteessä y ja päättyy pisteeseen x, ei toisinpäin! Nuolen suunta siis vastaa notaatiota yRx.

Sama suhteikko voidaan piirtää kaaviona hyvin monella eri tavalla. Täytyy ymmärtää, että suhteikko **ei ole** sama asia kuin sitä esittävä kaavio, vaan suhteikkoa vastaava kaavio on lähinnä hieman epäformaali, mutta erittäin kätevä tapa hahmottaa suhteikon rakennetta. Käytännössä (pienet) suhteikot usein annetaan kuitenkin piirroksen muodossa.

Tarkastellaan seuraavaa kaaviota.



Kuvan kaavio esittää suhteikkoa $([5], R)$, missä

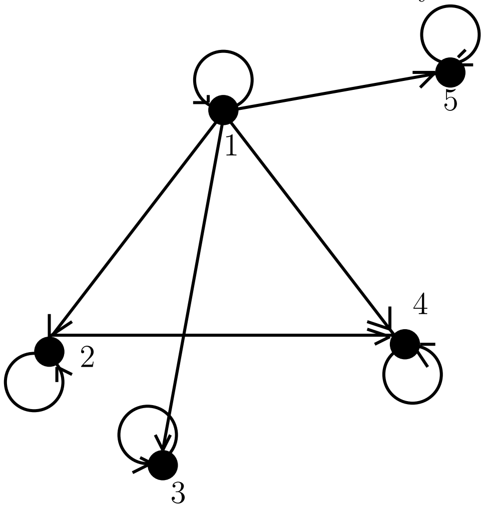
$$[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ ja}$$

$$R = \{(x, y) \in [5] \times [5] \mid x \text{ on jaollinen } y\text{:llä}\}.$$

Huomaa erityisesti nuolten suunnat kuvassa - kun relaatiossa esiintyy pari (x, y), nuoli on piirretty pisteestä y pisteeseen x.

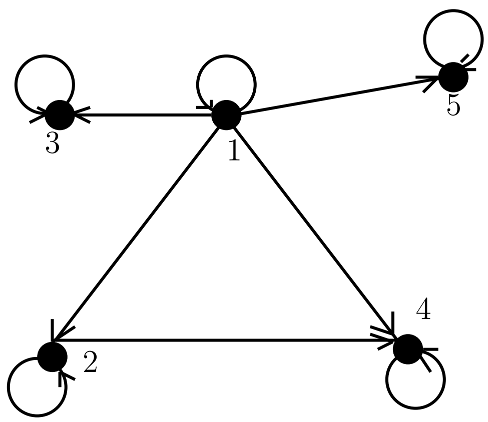
Koska jokainen luku on jaollinen itsellään, kaavion jokaiseen pisteeseen liittyy silmukka.

Seuraavassa kuvassa on esitetty toinen tasokuvio, joka vastaa samaa suhteikkoa:



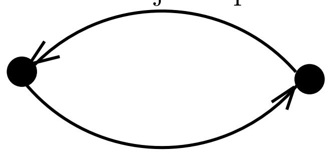
Tässä kaaviossa kaikki nuolet (paitsi silmukat) ovat suoria. Nuolet $1- > 3$ ja $2- > 4$ leikkaavat, se on täysin sallittua

Sama suhteikko on mahdollista piirtää myös niin, että eri nuolet eivät leikkaa (ja ovat suoria janoja):

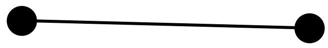


Tämä ei kuitenkaan ole aina mahdolista. **On olemassa suhteikkoja, joita ei voi esittää tasossa ilman, että jotkut nuolet leikkaavat toisiaan**.

Oletetaan, että suhteikossa (X, R) joillekin sen pisteille $x, y \in X$ pätee sekä $(x, y) \in R$, että $(y, x) \in R$. Tällöin kaavioon voidaan piirtää pisteiden x ja y välin kaksi nuolta suoraan edellä annettujen sopimusten mukaisesti:



Kuitenkin tällaisessa tapauksessa on paljon ekonomisempaa piirtää kysiesten pisteiden välin **viiva** eli **suuntaamaton** käyrä:



Juuri näin jatkossa yleensä tehdäänkin. Kun yhteys pisteiden x ja y välillä suhteikossa on yksisuuntainen (eli vain toinen pareista (x, y) tai (y, x) on suhteikon relaatiossa), kuvassa pirretään nuolenpäällä varustettu suunnattu nuoli. Kun yhteys on kaksisuuntainen - piirretään suuntaamaton viiva. Koska silmukka voidaan ajatella olevan erikoistapaus kaksisuuntaisesta yhteydestä, myöskin silmukkaan ei tarvitse piirtää nuolenpäätä.

Nuolet ja viivat formaalisti

Geometrisen kaavion muotoiseen suhteikon esitykseen liittyviä käsitteitä on hyödyllistä formalisoida myös joukko-opillisesti.

Olkoon X joukko ja $x, y \in X$ sen alkiot. Määrittellään

$$\overrightarrow{xy} = \{(y, x)\}.$$

Huomaa järjestys! Joukkoa $\overrightarrow{xy}$ sanotaan **nuoleksi**, jonka **alkupiste** on x ja **loppupiste** on y. Pannaan erityisesti merkille, että nuoli $\overrightarrow{xy}$ **ei ole sama asia kuin** pari (y, x) vaan se on on yhden alkion joukko (eli yksiö), jonka ainoa alkio on tämä järjestetty pari (y, x).

Viiva $\overline{xy}$ pisteiden x ja y välillä määritellään joukkona

$$\overline{xy} = \{(y, x), (x, y)\} = \overrightarrow{xy} \cup \overrightarrow{yx}.$$

Viiva on siis kahden alkion joukko, paitsi tapauksessa $x = y$, jolloin se yhtyy vastaavaan nuoleen $\overrightarrow{xx}$. Tällaisessa tapauksessa sitä sanotaan luonollisesti **silmukaksi** pisteessä x.

Viivan synonyymina alan kirjallisuudessa käytetään myös nimitystä **kaari**.
Pisteet x, y ovat viivan $\overline{xy}$ **päätepisteitä**.

Kun $G = (X, R)$ on suhteikko, joukkoa $\overline{xy} \cap R$ sanotaan **pisteiden** x **ja** y **väliseksi yhteydeksi suhteikossa** G. Tällöin on olemassa kolme eri tapausta:

(1) $\overline{xy} \cap R = \varnothing$. Tämä tarkoittaa sitä, että suhteikossa G ei ole nuolta pisteestä x pisteeseen y eikä nuolta pisteestä y pisteeseen x.

(2) $\overline{xy} \cap R = \overrightarrow{xy}$, $x \neq y$. Tällöin suhteikossa G on nuoli pisteestä y pisteeseen x, mutta tämä yhteys on yksisuuntainen eikä nuolta pisteestä y pisteeseen x enää ole.

(3) $\overline{xy} \cap R = \overline{xy}$. Tällöin suhteikossa G on viiva pisteiden x ja y välillä. Jos $x = y$, kyseessä on silmukka.

Jos suhteikossa G on nuoli $\overrightarrow{xy}$, solmua y sanotaan solmun x **seuraajaksi** suhteikossa G. Vastaavasi solmu x on tällöin solmun y **edeltäjä** suhtekossa G. Jos suhteikossa G on viiva $\overline{xy}$, pisteitä x ja y sanotaan toistensa **naapureiksi**

Suhteikon $G = (X, R)$ *nuolten joukko* N_G on joukko

$$N_G = \{\overrightarrow{xy} \mid \overrightarrow{xy} \subset R\},$$

viivojen joukko on joukko

$$V_G = \{\overline{xy} \mid \overline{xy} \subset R\}.$$

Huomaa, että

$$\overrightarrow{xy} \in N_G \Longleftrightarrow \overrightarrow{xy} \subset R \Longleftrightarrow (y, x) \in R \Longleftrightarrow xRy \Longleftrightarrow x \in R(y) \Longleftrightarrow y \in R^{-1}(x).$$

Suhteikon $G = (X, R)$ pisteiden joukkosta X käytetään jatkossa usein myös merkintää P_G.

Pari (P_G, N_G) määrä suhteikon täysin, toisin sanoen suhteikko G voidaan antaa yhtä hyvin parina (P_G, N_G).

Erikoistapaukset. Verkot

Määritelmän mukaan suhteikko koostuu äärellisestä joukosta X ja **mistä tahansa** relaatiosta R joukossa X. Tarkastelemalla vain tietyntyyppisiä relaatioita saadaan erilaisia suhteikon erikoistapauksia.

Olkoon $G = (X, R)$ suhteikko. Suoraan suhteikon määritelmän mukaan tällöin

- R on refleksiivinen jos ja vain jos jokaiseen suhteikon pisteeseen liittyy silmukka.
- R on irrefleksiivinen jos ja vain jos suhteikossa ei ole silmukkoja. Tällöin suhteikko G on *silmukaton*
- R on antisymmetrinen jos ja vain jos kaikki suhteikon epätyhjät yhteydet ovat yhdensuuntaisia eli nuolia. Tällaista suhteikkoa sanotaan **yksisuuntaiseksi** tai **suunnistetuksi**, sillä siinä jokaiselle yhteydelle on annettu yksikäsitteinen suunta.

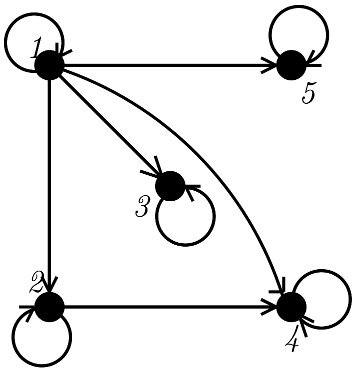
- R on symmetrinen jos ja vain jos suhteikon kaikki epätyhjät yhteydet ovat kaksisuuntaisia eli *viivoja*. Sanomme tällaista suhteikkoa **symmetriseksi**.

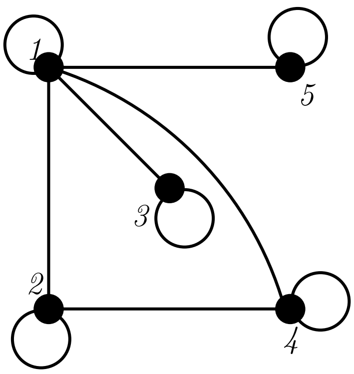
Verkko on silmukaton ja symmetrinen suhteikko. Suhteikko $G = (X, R)$ on siis verkko jos sen relaatio R on symmetrinen ja irrefleksiivinen.
Toinen yleisesti käytössä oleva nimitys verkoille on *graafi*. Emme juuri käytä sitä tällä kurssilla, mutta siihen voi helposti törmätä kirjallisuudessa.

Verkkoa G karakterisoi täysin sen solmujen joukko P_G ja sen viivojen joukko V_G. Tästä syystä verkko voidaan määritellä antamalla pari (P_G, V_G). Yleisen suhteikon tapauksessa tämä ei toimisi, sillä suhteikon verkkojen joukko ei kerro mitään mahdollisista suhteikon yksisuuntaisista yhteyksistä.

Olkoon $G = (X, R)$ suhteikko. Tällöin relaation R *symmetrinen sulkeuma* $S = R \cup R^{-1}$ on symmetrinen relaatio joukossa X, joten suhteikko $G^s = (X, S)$ on tällöin symmetrinen. Sanomme suhteikkoa G^s suhteikon $G = (X, R)$ **määräämäksi symmetriseksi suhteikoksi**. Suhteikko G^s on verkko jos ja vain jos suhteikossa G ei ole silmukkoja.

Suhteikon G^s geometrinen kaavio saadaan suhteikon G geometrisesta kaaviosta " muuttamalla kaikki nuolet viivoiksi " eli poistamalla nuolista nuolipäät.





Esimerkki 2. *Suhteikko G* *Suhteikko G^s*

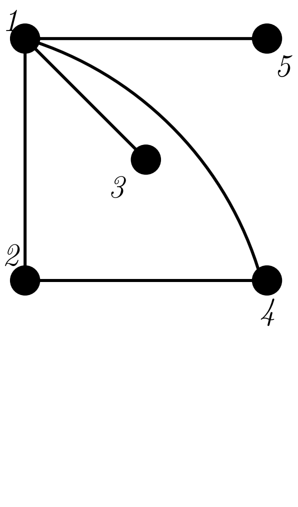
Kuvassa on esitetty suhteikko $G = ([5], R)$, missä

$$R = \{(x, y) \in [5] \times [5] \mid x \text{ on jaollinen } y\text{:llä}\}$$

ja sen symmetrinen sulkeuma G^s. Huomaa, että $G^s = ([5], S)$, missä

$$S = \{(x, y) \in [5] \times [5] \mid x \text{ on jaollinen } y\text{:llä tai } y \text{ on jaollinen } x\text{:llä}\}.$$

Suhteikko G^s on symmetrinen, mutta ei ole verkko, koska siinä on silmukkoja. Poistamalla kaikki silmukat saadaan verkko:

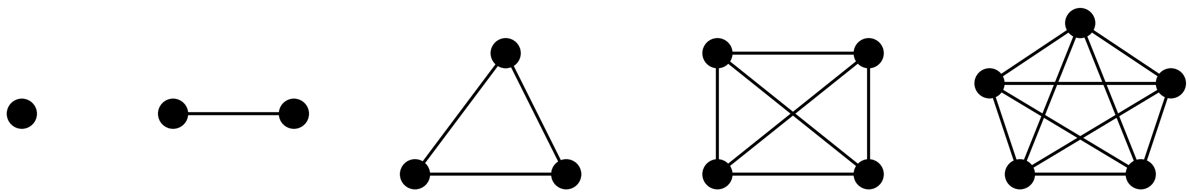


Täydelliset verkot ja suhteikot

Olkoon X äärellinen joukko. Tällöin karteesinen tulo $X \times X$ on relaatio X:ssä, suurin mahdollinen relaatio X:ssä. Tämä relaatio on symmetrinen, joten suhteikko $(X, X \times X)$ on symmetrinen suhteikko. Se ei kuitenkaan ole verkko (paitsi kun $X = \varnothing$), sillä se sisältää silmukoita jokaisen pisteen kohdalla. Poistamalla nämä silmukat saadaan verkko $G = (X, R)$, missä

$$R = \{(x, y) \in X \times X \mid x \neq y\} = (X \times X) \backslash \Delta_X.$$

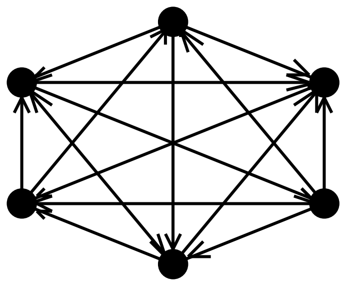
Tässä verkossa on mukana kaikki mahdolliset eri pisteiden väliset viivat, mistä syystä sitä sanotaan **täydelliseksi verkoksi**. Täydellistä verkkoa G, jonka pistejoukko P_G on $[n]$, merkitään jatkossa symbolilla K_n.



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Suhteikkoa G, jonka symmetrinen sulkeuma G^s on täydellinen verkko, sanotaan **täydelliseksi suhteikoksi**. Toisin sanoen suhteikko $G = (X, R)$ on täydellinen jos se on silmukaton ja kaikilla $x, y \in X$, $x \neq y$ ainakin toinen nuolista $\overrightarrow{xy}$ ja $\overrightarrow{yx}$ on suhteikossa.

Turnaus on yksisuuntainen täydellinen suhteikko G. Näin ollen turnaus on sellainen silmukaton suhteikko, jossa kaikilla $x, y \in X$, $x \neq y$, **tasan yksi** nuolista $\overrightarrow{xy}$, $\overrightarrow{yx}$ on suhteikossa. Nimitys tulee urheiluturnauksista, joissa jokainen pelaaja (tai joukkue) pelaa jokaiseen toisen pelaajan (joukkuen) kanssa kerran. Tällaisen kilpailun tuloksia voidaan mallintaa suhteikolla, jossa nuoli osoittaa hävittäjästä voittajaan. Tämä suhteikko on silloin turnaus, jos oletetaan, että tasapeli ei ole mahdollinen.



Eräs kuuden pisteen turnaus

Järjestämättömät parit

Verkko on siis meidän kannalta eräs suhteikon erikoistapaus. Kirjallisuudessa esiintyy usein myös toinen tapa määritellä verkko. Tämä tapa perustuu *järjestämättömien parien* käyttöön. Vaikka tätä lähestymistapaa ei oteta käyttöön tällä kursilla, tutustaan siihen kuitenkin yleissivistyksen vuoksi.

Olkoon X joukko ja $x, y \in X$. **Järjestämätön pari** $\langle x, y\rangle$ määritellään X:n osajoukkona

$$\langle x, y\rangle = \{x, y\}.$$

Kun $x \neq y$ tämä on 2-alkioinen joukko, muuten 1-alkioinen.

Järjestämättömille pareille pätee

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$$

kaikilla x, y. Tämä ominaisuus erottaa niitä järjestetyistä pareista, sillä $(x, y) \neq (y, x)$, paitsi kun $x \neq y$.

Kaikkien joukon X alkioiden muodostamien järjestämättömien parien joukko merkitään $X^{(2)}$.

Usein kirjallisuudessa esiintyvä toinen tapa määritellä verkko on seuraava: sanotaan, että verkko on pari (X, V), missä $V \subset X^{(2)}$. Järjestämätön pari $\langle x, y\rangle \in V$ tällöin vastaa verkon viivaa $\overline{xy}$. Tällainen määritelmä sallii silmukoita verkossa (niitä ei sallita verkossa tämän kurssin edellä esitetyn virallisen määritelmän puitteissa). Niitä voidaan halutessaan/tarvittaessa erikseen kieltää tai sallia - kirjallisuudessa näkee molempia tapoja.

Tällä lähestymistavalla määriteltyä verkkoa kutsutaan joskus "suuntaamattomaksi verkoksi", kun taas sitä, mitä tällä kurssilla sanotaan "suhteikoksi" kutsutaan tällöin "suunnatuksi verkoksi".

Lähestymistavan huono puoli on siinä, että verkko tällöin ei enää ole suhteikon erikoistapaus, joten kaikki tarkastelut ja tulokset joudutaan käsittelemään tällöin verkoissa ja suhteikoissa erikseen. Näin ollen se sopii määritelmäksi esim. silloin kun ollaan kiinnostuneita vain ja ainoastaan verkkojen teoriasta.

Historiallisesta näkökulmasta suhteikon käsite voidaan ajatella olevan verkon käsitteen yleistyksenä, sillä verkon käsite keksittiin ensin. Tästä syystä alan nimeksi on ehtinyt vakiintua termi "verkkoteoria". Tälläkin kurssilla käytämme (hieman epäjohdonmukaisesti) tätä termiä kuvaamaan kaikkien suhteikkojen teoriaa.

Osa tuloksista ja määritelmistä, joita käymme läpi tällä kurssilla koskee suhteikkoja yleisesti, mutta osa - *ainoastaan verkkoja*. Voidaan sanoa siis, että tulemme "liikkumaan" jatkuvasti suhteikoista verkkoihin ja takaisin.

Historiallisista syistä verkkoteorian terminologia on varsin kirjava ja vaihtelee lähteestä toiseen huomattavasti. Erilaiset koulukunnat käyttävät erilaisia termejä ja määritelmiä. Tämä pätee sekä suomen- että englanninkielisiin lähteisiin. Ei siis kannata olla yllättynyt, jos törmää jossakin toisessa verkkoteoriaa käsittelevässä teoksessa eri määritelmiin ja lähestymistapoihin kuin mihin tällä kursilla tottuu.

Huomautus englanninkielisestä terminologiasta:
Englanniksi verkkoja kutsutaan yleensä sanalla **graph** (eikä vaikkapa net niin kuin ehkä voisi luulla!). Se mitä tällä kurssilla sanomme suhteikoksi on englanniksi yleensä **directed graph** tai lyhemmin **digraph**. Tosin yleisistä suhteikoistain voidaan käyttää nimitystä "graph".

Rinnakaisia yhteyksiä

Kurssin alussa mainitun Könisbergin siltaongelmaan liittyvä ”verkko” ei olekaan verkko tämän kurssin määritelmän mukaan, sillä tässä ”verkossa” kahden pisteen välillä saattaa olla enemmän kuin yksi viiva, mikä on tietenkin mahdotonta verkossa. Koska sovelluksissa usein nousee esille luonnollisella tavalla tilanteita, joissa esiintyy tällaisia **rinnakkaisia yhteyksiä**, on joskus myös tarpeellista laajentaa suhteikon käsitettä koskemaan tilanteita, jossa sallitaan nuolten tai viivojen toistoa.

Suhteikkoja, joissa (järjestettyyn) pistepariin voi liittyä enemmän kuin yksi nuoli, sanotaan **multisuhteikoiksi**. Samoin verkkoja, jossa kahden pisteen välillä voi kulkea kaksi tai enemmän viivaa, sanotaan **multiverkoiksi**. ”Tavallisia” suhteikkoja ja verkkoja, joita tutkimme tällä kurssilla sanotaan tällöin ”yksinkertaisiksi”.

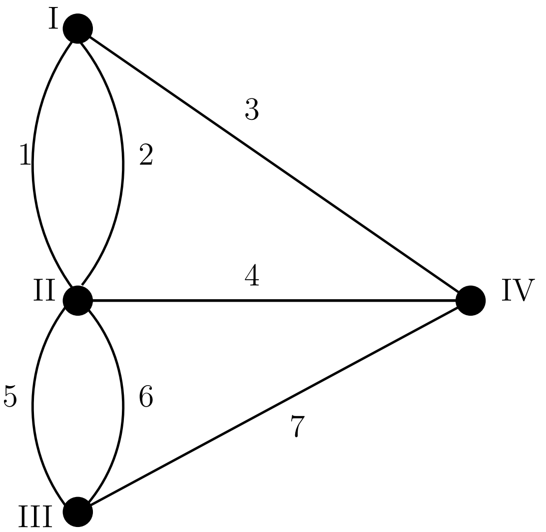
Yllä annetulla suhteikon määritelmällä ei pysty kuvaamaan rinnakkaisia yhteyksiä, sillä kaikilla x, y on olemassa vain yksi järjestetty pari (x, y). On olemassa eri toimivia tapoja mallintaa multisuhteikkoja ja multiverkkoja. Yksi tapa on antaa nuolten (viivojen) joukko erillisenä joukkona ja liittää jokaiseen nuoleen (viivaan) sen päätepisteitä *kuvauksen* avulla. Formaalisti multisuhteikko on tällöin kolmikko (X, E, ϕ), missä X ja E ovat äärellisiä joukkoja (”pisteiden joukko” ja ”nuolten joukko”) ja $\phi \colon E \to X \times X$ on kuvaus, joka liittää jokaiseen nuoleen $e \in E$ järjestetyn parin $(x, y) \in X \times X$. Tällöin tulkitaan, että y on nuolen e alkupiste ja x on sen loppupiste. Koska kuvauksen ϕ ei tarvitse olla injektio, tässä määritelmässä realisoituu juuri se mahdollisuus, että kaksi eri nuolta $e, e' \in E$ kuvautuvat samalle parille eli niillä on samat alku- ja loppupisteet.

Vastavaasti multiverkko voidaan antaa kolmikkona (X, E, ϕ), missä X ja E ovat äärellisiä joukkoja (”pisteiden joukko” ja ”viivojen joukko”) ja $\phi \colon E \to X^{(2)}$ on kuvaus, joka liittää jokaiseen viivaan $e \in E$ järjestämättömän parin $\langle x, y \rangle$ (sen päätepisteet).

Esimerkki: Könisbergin siltaongelmaan liityvä verkko voidaan määritellä kolmikkona (X, E, ϕ), missä $X = \{I, II, III, IV\}$ on pisteiden joukko (maa-alueet), $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ on viivojen joukko (sillat) ja kuvaus $\phi \colon E \to X^{(2)}$ on määritelty ehdoilla

$$\phi(1) = \phi(2) = \{I, II\}, \phi(3) = \{I, IV\}, \phi(4) = \{II, IV\},$$

$$\phi(5) = \phi(6) = \{II, III\}, \phi(7) = \{III, IV\}.$$



Painotetut suhteikot ja verkot

Kuten johdatuksessa kauppamatkustajan ongelman yhteydessä jo mainittiin, reaalielämän sovelluksessa suhteikon tai verkon yhteyksien hyväksikäyttö usein edellyttää tietynlaisten resurssien käyttöä eli vaatii kustannuksia (tai päinvastoin antaa ”voittoa”). Siksi sovelluksissa usein tarkastellaan ”painotettuja suhteikkoja”, joissa jokaiseen nuoleen liittyy reaaliluku, sen ”paino”.

Painotettu suhteikko voidaan määritellä kolmikkona (X, R, ϕ), missä $G = (X, R)$ on suhteikko ja $\phi\colon N_G \to \mathbb{R}$ on kuvaus, joka liittää jokaiseen suhteikon nuoleen sen painon.

Tällä kurssilla tutkitaan järjestelmällisesti vain yksinkertaisia (eli ei rinnakaisyhteyksiä) ja ei-painotettuja suhteikkoja ja verkkoja. Saatamme kuitenkin mainita monisuhteikkoja tai painotettuja suhteikkoja silloin tällöin tarpeen mukaan.