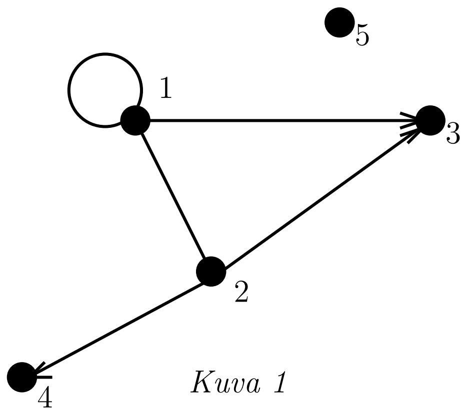
Verkot, syksy 2015
Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Laskuharjoitus 2.
Palautetaan viimeistään ke 04.11.15.

1. Olkoon $G = ([9], R)$, missä

   $R = \{(x, y) \in [6]\times[6] \mid y \text{ on jaollinen } x\text{:llä ja } y \neq x\} \cup \{(x, y) \in [9]\times[9] \mid |x-y| \leqslant 1, 6 \leqslant y \leqslant 9\}.$

   Piirrä suhteikko G geometrisen kaavion muodossa. Muodosta jokaisen suhteikon pisteen seuraajaluettelo. Onko G verkko? Onko G yksisuuntainen suhteikko? Onko G täydellinen suhteikko?

2. Kuvassa 1 alla on esitetty eräs suhteikko G geometrisen kaavion muodossa.



Kuva 1

   a) Anna suhteikolle G formaali määritelmä muodossa (X, R). Toisin sanoen esitä solmujen joukko X ja relaatio R joukkoina.
   b) Esitä suhteikon nuolten joukko N_G joukko-opillisessa muodossa **käyttämättä** yhdellekään nuolille merkintää $\overrightarrow{xy}$.
   c) Esitä suhteikon viivojen joukko V_G joukko-opillisessa muodossa **käyttämättä** yhdellekään viivalle merkintää $\overline{xy}$.
   d) Laske suhteikon G jokaisen pisteen tulo-ja lähtöasteet. Verifioi suoraan laskemalla, että Lemman II 2.1.(Junnila) väite on tosi suhteikossa G.

3. Jatkoa edelliselle tehtävälle.
   a) Muodosta Kuvassa 1 esitetyn suhteikon G jokaisen pisteen seuraajaluettelo.
   b) Muodosta suhteikon G yhteysmatriisi.
   Käytä solmuille "luonnollista järjestystä" $1, 2, \ldots, 5$.
   c) Onko suhteikon G insidenssimatriisi määritelty? Jos on, muodosta se, jos ei ole, selitä miksi.

4. Olkoon $G = (X, R)$, missä $X = [4]$ ja

$$R = \{(x, y) \in [4] \times [4] \mid x \text{ on jaollinen } y\text{:llä}, x \neq y\} \cup \{(2, 4)\}.$$

   Numeroi suhteikon nuolet jossakin järjestyksessä. Totea, että suhteikon G insidenssimatriisi on määritelty ja esitä suhteikon insidenssimatriisi. Käytä solmuille "luonnollista järjestystä" $1, 2, 3, 4$ ja nuolille yllä määriteltyäsi järjestystä.

5. Olkoon G kuten edellisessä tehtävässä. Tarkastellaan suhteikon G symmetristä sulkeumaa G^s.
a) Miksi G^s on verkko?
b) Piirrä geometrinen kaavio verkosta G^s. Esitä sen jälkeen verkon G^s verkkoinsidenssimatriisi jonkun viivojen järjestyksen suhteen (jonka saat määritellä itse vapaasti).
c) Esitä verkon G^s astejono. Mikä on G^s:n pisteiden asteiden summa? Kuinka monen pisteen aste on pariton? Ovatko tulokset sopusoinnissa Lauseen II 2.3. sekä Kättelylemman kanssa?

6. Olkoon $G = (X, R)$ kuten kahdessa edellisissä tehtävissä,

$$R = \{(x, y) \in [4] \times [4] \mid x \text{ on jaollinen } y\text{:llä}, x \neq y\} \cup \{(2, 4)\}.$$

a) Anna kolme erilaista esimerkkiä sellaisesta suhteikon G alisuhteikosta H, jonka solmujen joukko on $\{1, 2, 4\}$ ja joka on yksisuuntainen suhteikkona. Kaavio-esitys jokaisesta esimerkistä riittää.
b) Olkoon H_1 pistejoukon $\{1, 2, 3\}$ virittämä suhteikon G alisuhteikko. Olkoon H_2 nuolijoukon

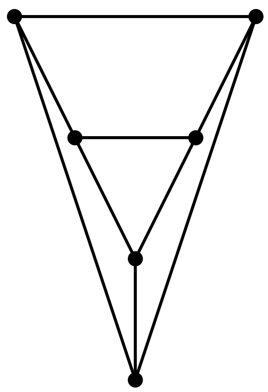
$$\{\overrightarrow{24}, \overrightarrow{12}\}$$

virittämä suhteikon G alisuhteikko. Piirrä H_1, H_2 ja yhdiste $H_1 \bigvee H_2$. Onko yhdiste $H_1 \bigvee H_2$ pistejoukkonsa virittämä alisuhteikko? Perustele.

7. Selvitä onko olemassa verkkoa, jonka astejono on
a) $(4, 3, 2, 1, 1)$
b) $(4, 2, 2, 1, 1)$

8. a) Osoita, että ei ole olemassa verkkoa, jonka astejono on $(3, 3, 3, 1)$.
b) Osoita a)-kohdan tuloksen avulla, että ei ole olemassa verkkoa, jonka astejono on $(3, 3, 3, 1, 0)$.
c) Onko olemassa verkkoa, jonka astejono on $(3, 3, 3, 3)$? Konstruoi esimerkki tai osoita, että verkko on mahdoton.

9. Olkoon verkko G kuten seuraavassa kuvassa:



a) Anna esimerkkejä kolmen alkion osajoukosta $A \subset P_G$, jonka virittämä G:n alisuhteikko on täydellinen verkko sekä kolmen alkion osajoukosta $B \subset P_G$, jonka

virittämä G:n alisuhteikko ei sisällä yhtäkään nuolta, tai osoita, että sellaista osajoukkoa ei ole olemassa.
b) Onko olemassa sellaista neljän alkion osajoukkoa $C \subset P_G$, jonka virittämä G:n alisuhteikko on täydellinen? Perustele.

Laskuharjotustehtävistä on palautettava vähintään 50%.
Lisäpisteitä harjoitustehtävistä: 60% - 3 p., 70% - 4 p., 80% - 5 p., 90% - 6 p.