Verkot, syksy 2015
Matematiikan- ja tilastotieteen laitos
Laskuharjoitus 1.
Palautetaan viimeistään to 29.10.2015.

1. Olkoon X kaikkien ihmisten joukko. Määritellään joukossa X relaatiot R, S ehdoilla

$$(x, y) \in R \iff y \text{ on } x\text{:n vanhempi},$$

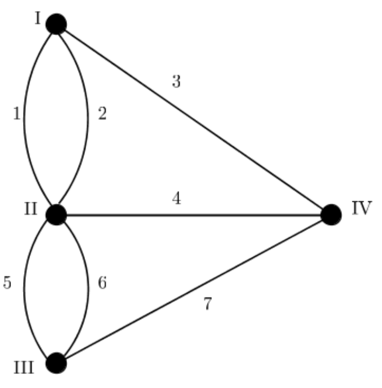
$$(x, y) \in S \iff y \text{ on } x\text{:n äiti}.$$

Tällöin esimerkiksi $R \circ R$ on relaatio "y on x:n isovanhempi". Tulkitse samalla tavalla sanallisesti relaatiot $R \circ S$, $S \circ R$, $S \circ S$, R^{-1}, S^{-1}, $(R \circ S)^{-1}$, $R^{-1} \circ S^{-1}$.

2. Olkoon S relaatio joukosta X joukkoon Y ja R relaatio joukosta Y joukkoon Z. Osoita, että
$$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}.$$

3. Olkoon $R \subset X \times Y$ relaatio joukolta X joukkoon Y. Olkoon $(a, b) \in X \times X$. Osoita, että $(a, b) \in R^{-1} \circ R$ jos ja vain jos $R(a) \cap R(b) \neq \emptyset$.

4. Lisää Könisbergin siltaongelmaan littyvään verkkoon G (Kuva 1) yksi uusi kaksisuuntainen yhteys (eli uusi silta). Etsi sen jälkeen tästä uudesta verkosta G' Eulerin kulku eli sellainen reitti, joka käy jokaisen sillan yli täsmälleen kerran.
HUOM. Tämän reitin loppupisteen ei tarvitse olla sama kuin sen alkupiste.



Kuva1

5. Jatkoa edellisen tehtävään: Lisää tehtävässä 1. konstruoimaasi verkoosi G' vielä yksi yhteys niin, että sen jälkeen uudessa verkossa G'' on olemassa Eulerin **kierros** eli sellainen reitti, joka käy jokaisen sillan yli täsmälleen kerran ja palaa alkupisteseen. Esitä kyseinen Eulerin kierros verkossa G''.

6. Määritellään reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$ relaatio R ehdolla

$$yRx \iff x^2 + y^2 = 2.$$

a) Määritä $R(]0,1[)$, $R^{-1}([2,4])$, $\operatorname{dom} R$, $\operatorname{Im} R$.
b) Osoita, että $(x,y) \in R \circ R$ jos ja vain jos $y = \pm x$ ja $x \in \operatorname{dom} R$.
c) Onko relaatio R refleksiivinen? Symmetrinen? Irrefleksiivinen? Transitiivinen? Antisymmetrinen?

7. Olkoon $A \subset \mathbb{N}$ äärellinen joukko, jolle pätee $|A| \geqslant 101$. Osoita, että joukosta A löytyy kaksi erilaista lukua, joiden erotus on jaollinen luvulla 100.
(Ohje: Käytä laatikkoperiaatetta. Kahden kokonaisluvun erotus on jaollinen 100:lla jos ja vain jos luvuilla on sama *jakojäännös* sadalla jaettaessa).

8. Kuvassa alla on esitetty erään Euroopan osan kartta. Väritä se neljällä eri värillä. Onnistuuko värittäminen kolmella eri värillä? Jos onnistuu, esitä yksi tapa värittää kartta kolmella värillä, jos ei onnistu selitä miksi.

9. Piirrä esimerkki kartasta, jossa on tasan neljä eri maata ja jota ei pysty värittämään kolmella eri värillä.

10. a) Anna esimerkki kuvauksesta $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ joka on surjektio, mutta ei ole injektio. Miksi tästä seuraa, että luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ ei ole äärellinen?
a) Anna esimerkki kuvauksesta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joka on injektio, mutta ei ole surjektio. Miksi tästä seuraa, että reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ ei ole äärellinen?

Laskuharjotustehtävistä on palautettava vähintään 50%.
Lisäpisteitä harjoitustehtävistä: 60% - 3 p., 70% - 4 p., 80% - 5 p., 90% - 6 p.