Topologia I, syksy 2015
Ratkaisut 8
Juho Leppänen[1]

1. Määritellään $f : B^2 \to \mathbf{R}^2$ kaavalla $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$.

Väite. Kuvaus f on homeomorfismi.

Todistus. Ensinnäkin f on hyvin määritelty, sillä nimittäjän lauseke $1 - |x| \neq 0$, kun $x \in B^2$. Lisäksi f on jatkuva, sillä se on osamäärä jatkuvista funktioista (lauseet 4.13 ja 5.3). Määritellään $g : \mathbf{R}^2 \to B^2$ kaavalla

$$g(y) = \frac{y}{1+|y|}.$$

Myös g on hyvin määritelty, sillä $|g(y)| = \frac{|y|}{1+|y|} < 1$ kaikilla $y \in \mathbf{R}^2$. Lisäksi g on jatkuva. Huomataan, että kaikilla $x \in B^2$,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{1-|x|}\right) = \frac{\frac{x}{1-|x|}}{1+\left|\frac{x}{1-|x|}\right|} = \frac{\frac{x}{1-|x|}}{\frac{1}{1-|x|}} = x = \mathrm{id}_{B^2}(x),$$

ja kaikilla $y \in \mathbf{R}^2$,

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{y}{1+|y|}\right) = \frac{\frac{y}{1+|y|}}{1-\left|\frac{y}{1+|y|}\right|} = \frac{\frac{y}{1+|y|}}{\frac{1}{1+|y|}} = y = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^2}(y).$$

Nyt lauseen 9.9 nojalla f on homeomorfismi ja $f^{-1} = g$. ■

2. *Väite.* $\tau_e \subset \tau_d$.

Todistus. Koska kaikilla $f, g \in E$ pätee

$$e(f,g) = ||f-g||_1 = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx \leq \int_0^1 ||f-g||_\infty \, dx = ||f-g||_\infty = d(f,g),$$

niin funktio $\mathrm{id} : (E,d) \to (E,e)$ on 1-Lipschitz ja siis jatkuva. Väite seuraa (ks. Väisälän kirjan sivu 71). ■

Metriikat eivät ole ekvivalentit, sillä $\mathrm{id} : (E,e) \to (E,d)$ on epäjatkuva origossa: määritellään kaikilla $n \in \mathbf{N}$ kuvaus $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ asettamalla

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{kun } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{kun } x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Kuvaus f_n on hyvin määritelty, sillä $1 - nx = 0$, kun $x = 1/n$, ja nyt lauseen 7.13 avulla nähdään, että f_n on jatkuva ja siis $f_n \in E$. Nyt kaikilla $n \in \mathbf{N}$ pätee $||f_n - \bar{0}||_\infty = 1$, ja toisaalta $||f_n - \bar{0}||_1 = 1/2n \to 0$, kun $n \to \infty$, joten lauseen 11.8 nojalla f ei ole jatkuva origossa.

3. *Väite.* Jonon (x_k) kasautumisarvot kuuluvat sulkeumaan $\overline{A}$.

[1]juho.leppanen@helsinki.fi

Todistus. Olkoon $x \in X$ jonon (x_k) kasautumisarvo. Jos U on pisteen x ympäristö, niin kasautumisarvon määritelmän perusteella löytyy $k_0 \in \mathbf{N}$, jolle $x_{k_0} \in U$. Toisaalta $x_{k_0} \in A$, joten $U \cap A \neq \emptyset$. On näytetty, että x:n jokainen ympäristö kohtaa A:n, eli $x \in \overline{A}$. ■

4. (a) Koska $(1/5)^k \to 0$ ja $1^k = 1 \to 1$, kun $k \to \infty$, niin lause 11.11 implikoi $\lim_{k\to\infty}((1/5)^k, 1^k) = (0,1)$.

(b) Jono $((-1)^k)_k = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ ei suppene, joten myöskään jono $(2^{-k}, (-1)^k)$ ei voi supeta (jälleen lause 11.11). Toisaalta $2^{-k} \to 0$, kun $k \to \infty$, joten nähdään, että jonolla on kasaantumisarvot $(0,1)$ ja $(0,-1)$.

(c) Koska $k^{1/2} \to \infty$, kun $k \to \infty$, niin jono $(k^{1/2}, (-2)^{-k})$ ei suppene eikä sillä ole yhtäkään kasautumisarvoa.

5. *Väite.* Annetulle jonolle $(w_k)_k$ pätee $w_k \to 1$.

Todistus. Merkitään $z_k = (x_k, y_k) \in \mathbf{R}^2$, jolloin lauseen 11.11 sekä oletusten nojalla pätee $z_k \to (3\pi/4, \sqrt{\pi}/2)$. Määritellään kuvaus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ kaavalla $f(x,y) = \sin(x - y^2)$. Tällöin f on lauseen 4.12 nojalla jatkuva, sillä se on yhdiste jatkuvista funktioista $(x,y) \mapsto x - y^2$ ja $z \mapsto \sin(z)$. Nyt $w_k = \sin(x_k - y_k^2) = f(z_k)$, joten lauseen 11.8(2) perusteella

$$\lim_k w_k = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = f\left(\lim_{k\to\infty} z_k\right) = f(3\pi/4, \sqrt{\pi}/2) = \sin(\pi/2) = 1.$$

■

6. (a) Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Kiinnitetään $n_0 \in \mathbf{N}$, jolle $n_0 > x$, jolloin kaikilla $n \geq n_0$ on voimassa $x - n < 0$ ja siis $f_n(x) = \max\{0, x-n\} = 0$. Täten $f_n(x) \to 0$, joten pisteittäin funktiojono (f_n) suppenee kohti nollafunktiota.

(b) Jos (f_n) suppenee tasaisesti joukossa $\mathbf{R}$, on raja-arvona lauseen 11.21 (sekä raja-arvon yksikäsitteisyyden) nojalla oltava nollafunktio. Kuitenkin nähdään, että

$$||f_n - \bar{0}||_\infty \geq |f_n(2n)| = |\max\{0, n\}| = n \to \infty.$$

Päätellään, että funktiojono (f_n) ei suppene tasaisesti joukossa $\mathbf{R}$.

(c) Joukossa $D =]-\infty, 10^{10}[$ jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti nollafunktiota. Nimittäin jos $n \geq 10^{10}$, niin kaikilla $x \in D$ pätee $x - n \leq 0$, mistä johtuen

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in D\} = \sup\{|\max\{0, x-n\}| : x \in D\} = \sup\{0 : x \in D\} = 0.$$