Topologia I, syksy 2015
Ratkaisut 5
Juho Leppänen[1]

1. (a) *Väite.* Kiinteällä $f \in E$ kuvaus $\alpha(f) : [0,1] \to \mathbf{R}$ on jatkuva, ts. $\alpha(f) \in E$.

Todistus. Koska kuvaukset f ja $x \mapsto 5x$ ovat jatkuvia, on $\alpha(f)$ niiden tulona jatkuva lauseen 5.3 nojalla. ■

(b) *Väite.* Kuvaus $\alpha : E \to E$ on Lipschitz.

Todistus. Kiinnitetään $f, g \in E$. Tällöin kaikilla $x \in [0,1]$ on voimassa

$$|\alpha(f)(x) - \alpha(g)(x)| = |5x||f(x) - g(x)| \leq 5||f - g||_\infty,$$

joten $||\alpha(f) - \alpha(g)||_\infty \leq 5||f - g||_\infty$. Täten α on 5-Lipschitz. ■

2. *Väite* Jos A ja B ovat suljettuja $\mathbf{R}$:ssä, niin $A \times B$ on suljettu $\mathbf{R}^2$:ssa.

Todistus. Havaitaan, että

$$A \times B = (A \times \mathbf{R}) \cap (\mathbf{R} \times B) = pr_1^{-1}[A] \cap pr_2^{-1}[B].$$

Lauseen 5.6 nojalla projektiokuvaukset ovat jatkuvia, joten lauseen 6.13(2) perusteella joukot $pr_1^{-1}[A]$ ja $pr_2^{-1}[B]$ ovat suljettujen joukkojen jatkuvina alkukuvina suljettuja. Näin ollen $A \times B$ on kahden suljetun joukon leikkauksena suljettu (lause 6.3(1)). ■

3. (a) *Väite.* Joukko A_k on suljettu kaikilla $k \in \mathbf{N}$.

Todistus. Olkoon $k \in \mathbf{N}$. Tällöin $A_k = \bar{B}(\bar{0}, 1) \setminus B(\bar{0}, 1/(k+1))$. Lauseen 6.17 perusteella $\bar{B}(\bar{0}, 1)$ on suljettu, ja lauseen 3.2 perusteella $B(\bar{0}, 1/(k+1))$ on avoin. Siten A_k on suljetun ja avoimen joukon erotuksena suljettu (lause 6.4). ■

(b) *Väite.* Joukko $A = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k$ ei ole suljettu, ja $\overline{A} = \bar{B}(\bar{0}, 1)$.

Todistus. Ensin havaitsemme, että $A = \bar{B}(\bar{0}, 1) \setminus \{\bar{0}\}$: Jos $x \in \bar{B}(\bar{0}, 1) \setminus \{\bar{0}\}$, niin $1 \geq ||x|| > 0$, ja siten löytyy $k \in \mathbf{N}$, jolle $1/(k+1) \leq ||x||$; siis $x \in A_k \subset A$. Näin ollen $A \supset \bar{B}(\bar{0}, 1) \setminus \{\bar{0}\}$. Toisaalta selvästi $A_k \subset \bar{B}(\bar{0}, 1) \setminus \{\bar{0}\}$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$, minkä johdosta $A \subset \bar{B}(\bar{0}, 1) \setminus \{\bar{0}\}$.

Koska $A \subset \bar{B}(\bar{0}, 1)$, niin $\overline{A} \subset \overline{\bar{B}(\bar{0}, 1)} = \bar{B}(\bar{0}, 1)$ (lauseet 6.8(5) ja 6.17). Tarvitsee enää näyttää, että $\bar{0} \in \bar{A}$: Tällöin $\overline{A} = \bar{B}(\bar{0}, 1)$, joten todistuksen alkuosan ja lauseen 6.8(6) nojalla A ei voi olla suljettu. Olkoon V pisteen $\bar{0}$ ympäristö. Tällöin löytyy $r \in \mathbf{R}$, jolle $B(\bar{0}, r) \subset V$. Kiinnitetään $k \geq 1/r$, jolloin $1/(1+k) < r$ ja vaikkapa

$$\frac{1}{1+k}(1, 0) \in A_k \cap B(\bar{0}, r) \subset A \cap V.$$

[1]juho.leppanen@helsinki.fi

Tästä päättelemme, että $\bar{0}$ on joukon A kasautumispiste ja siis $\bar{0} \in \overline{A}$ (lause 6.21). $\blacksquare$

4. *Väite.* Jos $f, g : X \to Y$ ovat jatkuvia kuvauksia, ja jos $A \subset X$ on sellainen joukko, että $f|A = g|A$, niin $f|\overline{A} = g|\overline{A}$.

Todistus. Olkoon $x \in \overline{A}$. Haluamme osoittaa, että $f(x) = g(x)$, ja tätä varten riittää näyttää, että kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee $e(f(x), g(x)) < \varepsilon$ (missä e on Y:n metriikka). Olkoon siis $\varepsilon > 0$. Koska f on jatkuva pisteessä x, niin löydetään $\delta_1 > 0$, jolle $fB(x, \delta_1) \subset B(f(x), \varepsilon/2)$. Samoin löydetään $\delta_2 > 0$, jolle $gB(x, \delta_2) \subset B(g(x), \varepsilon/2)$. Toisaalta $x \in \overline{A}$, joten löytyy $y \in B(x, \delta_1) \cap B(x, \delta_2) \cap A$. Nyt oletuksen $f|A = g|A$ nojalla $f(y) = g(y)$, joten metriikan postulaatteja soveltamalla saadaan

$$e(f(x), g(x)) \leq e(f(x), f(y)) + \underbrace{e(f(y), g(y))}_{=0} + e(g(y), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\blacksquare$

5. *Väite.* Jokainen suljettu joukko $F \subset X$ voidaan lausua leikkauksena laskevasta jonosta avoimia joukkoja $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$.

Todistus. Asetetaan $U_n = B(F, 1/n)$, jolloin kaikilla $n \in \mathbf{N}$ pätee $U_n \supset U_{n+1}$. Todistetaan, että $F = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} B(F, 1/n)$. Tällöin väite seuraa, sillä lauseen 4.11 nojalla joukot $B(F, 1/n)$ ovat avoimia.

Jos $x \in F$, niin $d(x, F) = 0 \leq 1/n$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$, joten $x \in B(F, 1/n)$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$, ja siis $x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} B(F, 1/n)$. Täten $F \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} B(F, 1/n)$.

Käänteisen inkluusion todistamiseksi oletetaan, että $x \notin F$ eli $x \in X \setminus F$. On näytettävä, että löytyy $n_0 \in \mathbf{N}$, jolle $x \notin B(F, 1/n_0)$. Koska $X \setminus F$ on avoin, niin löytyy sellainen $r > 0$, että $B(x, r) \subset X \setminus F$, toisin sanoen $B(x, r) \cap F = \emptyset$. Siten $d(x, y) \geq r$ kaikilla $y \in F$ eli $d(x, F) \geq r$. Valitaan $n_0 \geq 1/r$, jolloin $1/n_0 \leq r$ ja $x \notin B(F, 1/n_0)$, sillä $d(x, F) \geq r \geq 1/n_0$. $\blacksquare$

6. *Väite.* $A^\perp$ on suljettu.

Todistus. Havaitaan, että $A^\perp = \bigcap_{a \in A} A_a$, missä $A_a = \{x \in E : \langle x, a \rangle = 0\}$. Toisaalta kuvaus $f_a : E \to \mathbf{R}$, $f_a(x) = \langle x, a \rangle$ on jatkuva: Schwarzin epäyhtälön 1.4 perusteella kaikilla $x, y \in E$ pätee

$$|f_a(x) - f_a(y)| = |\langle x - y, a \rangle| \leq |x - y||a|,$$

joten f_a on $|a|$-Lipschitz. Nyt lausetta 6.13(2) soveltamalla nähdään, että $A_a = f_a^{-1}\{0\}$ on suljetun joukon jatkuvana alkukuvana suljettu kaikilla $a \in A$. Täten $A^\perp$ on leikkaus suljetuista joukoista, ja näin ollen lauseen 6.3(1) perusteella suljettu. $\blacksquare$