Topologia I, syksy 2015
Ratkaisut 11
Juho Leppänen[1]

1. (a) *Väite.* Leikkaus $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ on epätyhjä ja kompakti.

Todistus. Kiinnitetään kullakin $n \in \mathbf{N}$ alkio $x_n \in A_n$. Koska X on kompakti, niin on olemassa jonon $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ suppeneva osajono $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$. Asetetaan nyt $x = \lim_k x_{n_k}$, jolloin $x \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$: Jos $n \in \mathbf{N}$, niin löytyy $k \in \mathbf{N}$ jolle $n_k \geq n$, ja nyt kaikilla $m \geq k$ pätee $n_m \geq n_k$ ja siis $x_{n_m} \in A_{n_m} \subset A_{n_k} \subset A_n$. Täten $x = \lim_k x_{n_k} \in \overline{A_n} = A_n$ ja on näytetty, että $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ on epätyhjä. Toisaalta $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ on kompaktin avaruuden suljettuna osajoukkona kompakti (lause 13.7). ∎

(b) Olkoon $X = \mathbf{N}$ varustettuna diskreetillä metriikalla, ja $A_n = \mathbf{N} \setminus \{1, \ldots, n\}$. Jokainen A_n on suljettu (ovathan kaikki X:n osajoukot) mutta $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n = \emptyset$.

2. *Väite.* Jono (f_k) suppenee tasaisesti kohti funktiota g.

Todistus. Todetaan aluksi, että koska jono (f_k) on kasvava ja suppenee pisteittäin kohti funktiota g, on kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $k \in \mathbf{N}$ voimassa $f_k(x) \leq g(x)$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. On siis löydettävä $k_0 \in \mathbf{N}$, jolle

$$\sup_{x\in X} (g(x) - f_k(x)) = \sup_{x\in X} |g(x) - f_k(x)| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0. \tag{*}$$

Määritellään kullakin $k \in \mathbf{N}$ joukko $A_k = \{x \in X : g(x) - f_k(x) \geq \varepsilon\}$. Koska f_k ja g ovat jatkuvia, on $A_k = (g - f_k)^{-1}[\varepsilon, \infty)$ lauseen 6.13 perusteella suljettu kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Lisäksi jonon (f_k) kasvavuudesta seuraa, että jono (A_k) on (inkluusion mielessä) laskeva. Seuraa, että jollain k täytyy päteä $A_k = \emptyset$: Muutoin tehtävän 1(a) nojalla $\bigcap_{k\in\mathbf{N}} A_k \neq \emptyset$, mutta tällöin mikä hyvänsä piste $x \in \bigcap_{k\in\mathbf{N}} A_k$ toteuttaa $f_k(x) \leq g(x) - \varepsilon$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$, joten $g(x) = \lim_k f_k(x) \leq g(x) - \varepsilon$, ristiriita.

Olkoon luvulle $k_0 \in \mathbf{N}$ voimassa $A_{k_0} = \emptyset$. Tällöin

$$X = A_{k_0}^c = \{x \in X : g(x) - f_{k_0}(x) < \varepsilon\},$$

joten (*) seuraa nyt jonon (f_k) kasvavuudesta. ∎

3. (a) Joukko E ei ole yhtenäinen, sillä se voidaan lausua kahden epätyhjän avoimen erillisen joukon yhdisteenä: $E = E_1 \cup E_2$, missä

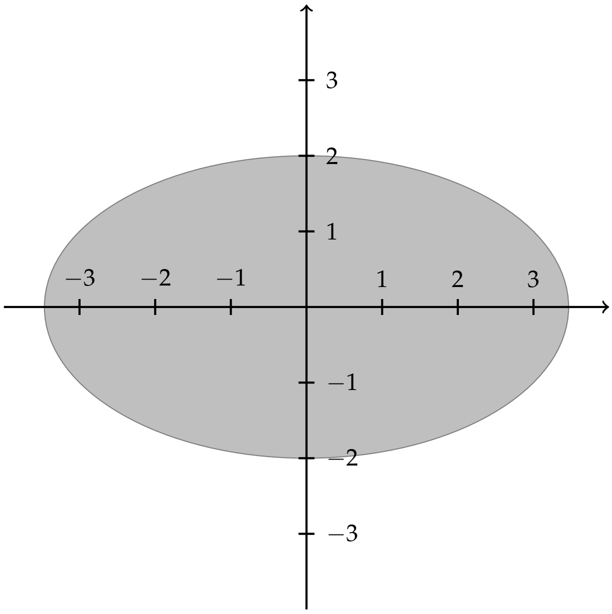
$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > |y|\}, \quad E_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < -|y|\}.$$

Osoitetaan, että E_1 on avoin $\mathbf{R}^2$:ssä, jolloin se on avoin myös E:ssä. Joukon E_2 avoimuus nähdään vastaavasti. Määritellään kuvaus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ kaavalla $f(x, y) = x - |y|$, jolloin f on jatkuva ja $E_1 = f^{-1}(0, \infty)$. Täten E_1 on lauseen 4.8 nojalla avoin $\mathbf{R}^2$:ssa.

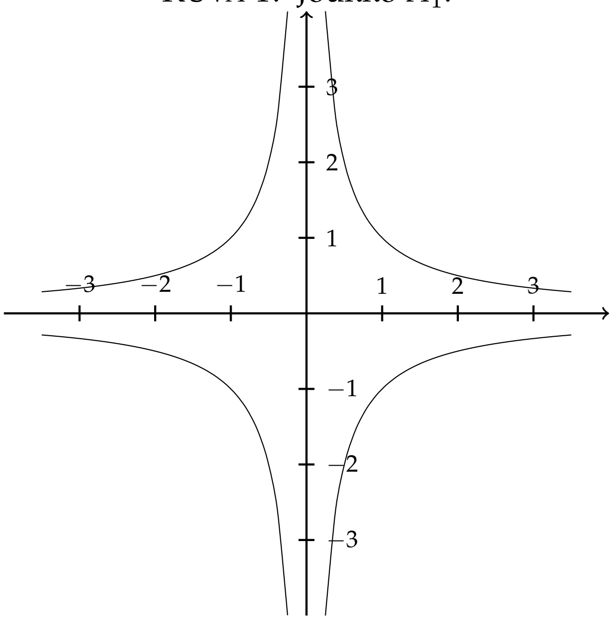
(b) Sulkeuma $\overline{E}$ on yhtenäinen.

[1] juho.leppanen@helsinki.fi

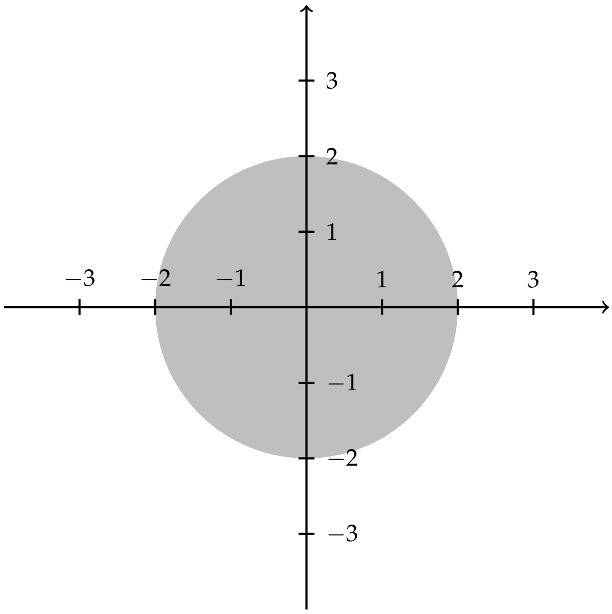
4. Joukot A_1 ja A_3 ovat yhtenäisiä mutta A_2 ei ole. Joukko A_3 on $\mathbf{R}^2$:n alue.



KUVA 1. Joukko A_1.



KUVA 2. Joukko A_2.



KUVA 3. Joukko A_3.

5. *Väite.* Kuvajoukko fX on yhtenäinen.

Todistus. Kiinnittämällä $a \in A$ saadaan jatkuva kuvaus $f_a : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ asettamalla $f_a(x) = f(a,x)$. Koska väli $[0,1]$ on yhtenäinen, niin myös kuvajoukko $f_a([0,1])$ on yhtenäinen (lause 14.16) ja

$$\bigcup_{a \in A} f_a([0,1]) = \bigcup_{a \in A} \{f(a,x) \ : \ x \in [0,1]\} = fX.$$

Koska toisaalta $f_a(0) = f(a,0) = \bar{0}$, niin $\bar{0} \in f_a([0,1])$ kaikilla $a \in A$. Näin ollen fX on yhtenäinen lauseen 14.12 nojalla. ∎

6. *Väite.* $f = g$.

Todistus. Asetetaan $A = \{x \in [a,b] \ : \ f(x) = g(x)\}$. Tällöin A on avoin: Jos $x \in A$, niin oletuksen nojalla x:llä on $[a,b]$:ssä ympäristö U, jolla $f|U = g|U$ eli $U \subset A$.

Toisaalta myös $[a,b] \setminus A$ on avoin: Olkoon $a \in [a,b] \setminus A$. Tällöin $f(a) \neq g(a)$, joten on olemassa $r > 0$, jolle $B(f(a),r) \cap B(g(a),r) = \emptyset$ (vaikkapa $r = d(f(a),g(a))/2$ kelpaa). Asetetaan nyt

$$U = f^{-1}B(f(a),r) \cap g^{-1}B(g(a),r),$$

jolloin U on avoin $[a,b]$:ssä, sillä f ja g ovat jatkuvia, ja lisäksi $a \in U$. Siis U on a:n ympäristö $[a,b]$:ssä. Lisäksi $U \subset [a,b] \setminus A$: Jos $y \in U$, niin $f(y) \in B(f(a),r)$ ja $g(y) \in B(g(a),r)$, joten erillisyydestä seuraa $f(y) \neq g(y)$.
Siispä A ja $[a,b] \setminus A$ muodostavat välin $[a,b]$ osituksen kahteen erilliseen ja avoimeen joukkoon. Koska $[a,b]$ on välinä yhtenäinen, on oltava $A = \emptyset$ tai $[a,b] \setminus A = \emptyset$. Toisaalta $x_0 \in A$, joten $[a,b] \setminus A = \emptyset$ ja siis $A = [a,b]$. Toisin sanoen $f = g$.

∎