MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia, syksy 2015
Ratkaisuita harjoituksiin 9
Matti Palomäki

1. Suljetulla välillä jatkuva funktio on integroituva, joten tehtävänannon integraalit ovat olemassa.
   Olkoon $\epsilon > 0$. Koska $f_n \to f$ tasaisesti välillä $[a, b]$, niin on sellainen $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, että $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ kaikilla $x \in [a, b]$, $n > N_\epsilon$. Olkoon nyt $n > N_\epsilon$. Kun $x \in [a, b]$, on

$$\Big|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\Big| = \Big|\int_a^b f_n(x) - f(x)\,dx\Big| \leqslant \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx$$

$$< \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dx = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon,$$

   eli $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.
   Derivaatoille vastaava tulos ei päde, eli vaikka (f_n) ovat derivoituvia ja suppenevat tasaisesti kohti funktiota f, ei (f_n') välttämättä suppene kohti derivaattaa f'. Esimerkiksi tästä käyvät funktiot $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$. Nyt $f_n \to 0$ tasaisesti, mutta $f_n' = \cos(nx) \nrightarrow 0 = f'(x)$ kun vaikkapa $x = 0$.

2. (a) Kun U on pisteen $\mathbf{0}$ mielivaltainen ympäristö, kaikilla $z \in U \cap A \subset A$ on $f(z) = 1$, joten $\lim_{z\to 0, z\in A} = 1$.
   Vastaavasti kaikilla $z \in U \cap B \subset B$ on $f(z) = 0$, joten $\lim_{z\to 0, z\in B} = 0$.

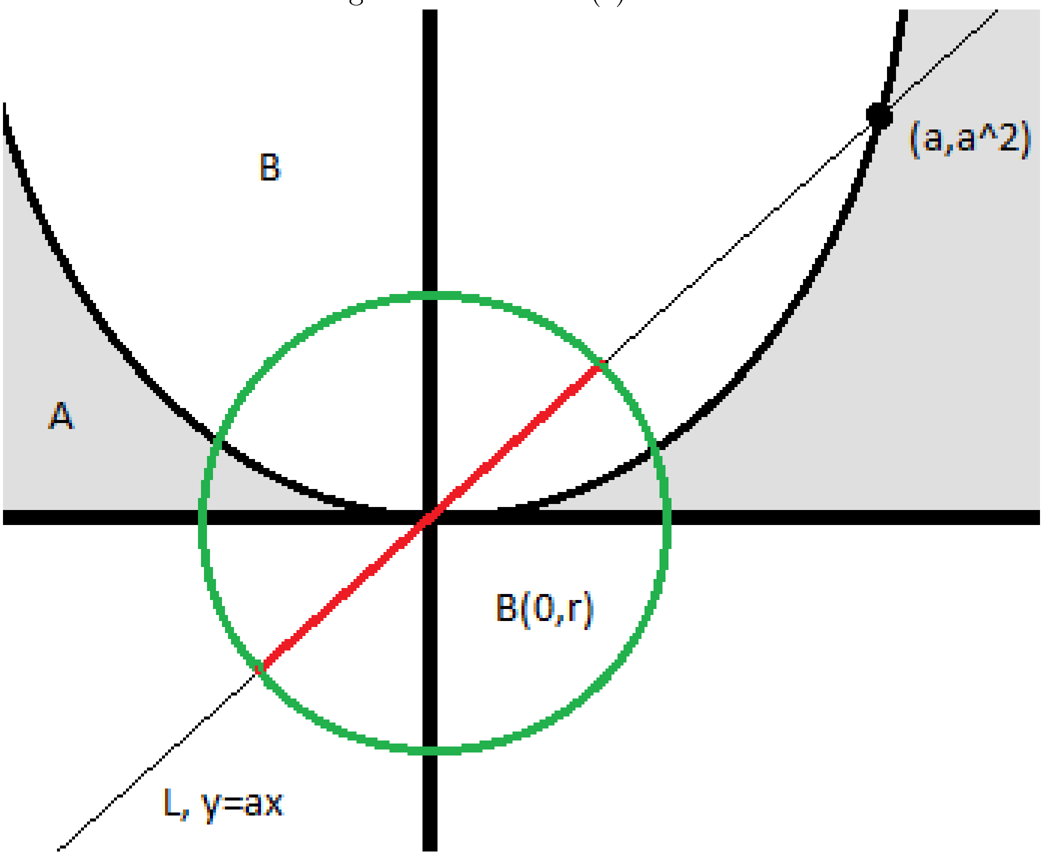
   (b) Koska $f(\mathbf{0}) = 0 \neq 1 = \lim_{z\to 0, z\in A}$, funktio ei ole jatkuva origossa (Väisälä, 11.28).

   (c) Olkoon L suora $y = ax$, $a \neq 0$. Se leikkaa paraabelin $y = x^2$ pisteessä (a, a^2), ja pisteille $\{(x, y) \mid \; y = ax, |a| > |x|)\}$ pätee $y < x^2$. Siis $B(\mathbf{0}, r) \cap L \subset B$, kun $r < a$ (kts. kuvaa seuraavalla sivulla). Näin ollen $\lim_{z\to 0, z\in L} f(z) = 0$.
   Lisäksi x- ja y-akselia pitkin kulkevat suorat eivät kohtaa joukkoa A, joten myös niitä pitkin kuvauksen f raja-arvo origossa on 0.

3. Väite: Bilipschitz-kuvauksessa täydellisen avaruuden kuva on täydellinen.

   Todistus: Olkoot X, Y metrisiä avaruuksia ja $f : X \to Y$ M-bilipschitz. Bilipshcitz-kuvauksena f on upotus (Väisälä 9.19). Jokaisella pisteellä

Figure 1: Tehtävä 2(c). $r < a$



$y \in fX$ on siis yksikäsitteinen alkukuva $f^{-1}(y) \in X$.
Olkoon (y_n) jokin Cauchyn jono joukossa fX. Näytetään, että jonon jäsenten alkukuvien muodostama jono on Cauchyn jono avaruudessa X. Merkitään $f^{-1}(y_n) = x_n$.
Olkoon $\epsilon > 0$. Koska (y_n) on Cauchyn jono, löytyy $N \in \mathbb{N}$, jolla $e(y_k, y_l) < \frac{\epsilon}{M}$ kun $k, l > N$. Kuvauksen f M-bilipschitz-ominaisuuden mukaan

$$\frac{d(x_k, x_l)}{M} < e(y_k, y_l) < \frac{\epsilon}{M},$$

joten $d(x_k, x_l) < \epsilon$. Jono (x_n) on siis Cauchy täydellisessä avaruudessa X, joten se suppenee kohti pistettä $x \in X$. Koska f on jatkuva, jonojatkuvuuden nojalla jono (y_n) suppenee puolestaan kohti pistettä $f(x) \in fX$. Joukko fX on siis täydellinen.
Koska fX on täydellinen, se on myös suljettu avaruudessa Y. $\square$

4. (a) Väite kuten tehtävänannossa.

Todistus: Valitaan kustakin joukosta A_n jokin sen alkio x_n. Näytetään, että näiden alkioden muodostama jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee.
Olkoon $\epsilon > 0$. Jono $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ on laskeva, joten jonon (x_n) jäsen x_l kuuluu joukkoon A_k kun $l > k$. Koska joukkojen läpimitat $d(A_n)$ suppenevat kohti nollaa, on sellainen $M \in \mathbb{N}$, että $d(A_k) < \epsilon$ kun $k > M$, ja siten $d(x_p, x_s) < \epsilon$ kun $p, s > M$. Jono (x_n) on siis Cauchy. Koska avaruus X on täydellinen, sen Cauchyn jonona (x_n) suppenee kohti pistettä $x \in X$.
Joukkojen A_n leikkaukseen ei voi kuulua enempää kuin yksi piste: Oletetaan, että joukkojen A_n leikkaukseen kuuluu kaksi eri pistettä, x ja y. Nyt $d(x, y) = d > 0$ ja $x, y \in A_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta $d(A_n) \to 0$ kun $n \to 0$, joten jollain $N \in \mathbb{N}$ $d(A_k) < d$ kun $k > N$, mikä on ristiriita. Leikkaukseen ei siis kuulu kahta erillistä pistettä.
Toisaalta jonon (x_n) raja-arvo x kuuluu joukkojen A_n leikkaukseen: Olkoon U pisteen x ympäristö. Koska $x_k \to x$, riittävän suurilla k pätee $x_k \in U$ ja lisäksi $x_k \in A_s$ kaikilla $s < k$. Siis mielivaltaisille ympäristölle U ja $s \in \mathbb{N}$ on $U \cap A_s \neq \emptyset$, joten $x \in \bar{A}_s = A_s$ kaikilla s ja siten $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
Joukkojen A_n leikkaukseen kuuluu siis tasan yksi piste. $\square$

(b) Esimerkiksi avoimet välit, jotka muodostavat jonon $(\,]0, \frac{1}{n}[\,)_{n\in\mathbb{N}}$. Kaikilla $x \leqslant 0$ ei x kuulu mihinkään väleistä. Kaikilla $x > 0$ taas $x \notin]0, \frac{1}{n}[$ kun $n > \frac{1}{x}$. Välien leikkaus on siis tyhjä.

5. (a) Myös tässä voisi ratkaisun pätellä väliarvolauseen avulla. Tässä kuitenkin annetaan suoraan yleinen vastaesimerkki.
Olkoot $\epsilon, \delta > 0$.
Valitaan $a = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\delta}}$ ja $b = a + \frac{\delta}{2}$. Nyt $d(a, b) = |b - a| < \delta$, mutta

$$\begin{aligned} d(f(b), f(a)) = |b^3 - a^3| &= |(a + \frac{\delta}{2})^3 - a^3| \\ &= |a^3 + 3a^2\frac{\delta}{2} + 3a(\frac{\delta}{2})^2 + (\frac{\delta}{2})^3 - a^3| \\ &= 3a^2\frac{\delta}{2} + 3a(\frac{\delta}{2})^2 + (\frac{\delta}{2})^3 > 3a^2\frac{\delta}{2} \\ &= 3\frac{2\epsilon}{\delta}\frac{\delta}{2} = 3\epsilon > \epsilon, \end{aligned}$$

joten f ei ole tasaisesti jatkuva avaruudessa $\mathbb{R}$.

(b) Tutkitaan derivaattaa $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. Sen derivaatan $f''(x) = \frac{(2x^3+2x)(x^2-3)}{(1+x^2)^4}$ nollakohdat ovat $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ ja $x = -\sqrt{3}$. Derivaatan

toisesta derivaatasta $f'''(x) = 6\frac{-x^4+6x^2-1}{(1+x^2)^4}$ todetaan, että $f'''(\sqrt{3}) = f'''(-\sqrt{3}) > 0$ ja $f'''(0) < 0$. Lisäksi, kun $x > |3|$, $f'(-\sqrt{3}) = f'(\sqrt{3}) < f(x) < 0 < f'(0)$, joten maksimi $f'(0)$ on globaali, samoin kuin minimit $f'(\sqrt{3})$ ja $f'(-\sqrt{3})$. Kaikille x pätee derivaatan itseisarvolle siis $|f'(x)| \leqslant M = \max\{f'(0), |f'(\sqrt{3})|\}$.
Olkoot $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ ja $b = a + \delta$. Koska $f(x)$ on derivoituva, väliarvolauseen nojalla on sellainen $c \in [a, b]$, että $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ja äskeisen tarkastelun nojalla siis $M(b-a) \geqslant |f(b) - f(a)|$ (ja siten f on M-Lipschitz).
Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{M}$. Kun $x > y$ ja $x - y < \delta_\epsilon$, on $\epsilon = M\delta_\epsilon > M(x-y) \geqslant |f(b) - f(a)|$, eli f on tasaisesti jatkuva.

6. Väite: Tehtävänannon F on homeomorfismi ja bilipschitz.

   Todistus: Olkoon $y \in E$ ja merkitään $g_y(x) = y - f(x)$. Koska f on kontraktio, on olemassa $0 \leqslant q < 1$ jolla $\|f(x) - f(y)\| \leqslant q\|x - y\|$. Myös g_y on kontraktio: $\|g_y(x) - g_y(z)\| = |(y - f(x)) - (y - f(z))| = |f(z) - f(x)| = \|f(x) - f(z)\| \leqslant q\|x - z\|$. Banachin kiintopistelauseen (Väisälä 12.8) nojalla on kontraktiolla $g_y : E \to E$ tasan yksi kiintopiste, merkitään sitä $G(y)$. Kuvauksen g_y kiintopisteenä sillä siis pätee
$$(\mathbf{1}): \quad y - f(G(y)) = g_y(G(y)) = G(y).$$
   Nyt $y \mapsto G(y)$ määrää kuvauksen $G : E \to E$.
   Todetaan, että
$$F \circ G(x) = F(G(x)) = G(x) + f(G(x)) \overset{(\mathbf{1})}{=} x - f(G(x)) + f(G(x)) = x.$$
   Kun $x \in E$, on $G(F(x))$ kuvauksen $g_{F(x)}$ kiintopiste. Toisaalta
$$g_{F(x)}(x) = F(x) - f(x) = x + f(x) - f(x) = x.$$
   Banachin kiintopistelauseen mukaan kuvauksen $g_{F(x)}$ kiintopiste on yksikäsitteinen, joten $G \circ F(x) = G(F(x)) = x$. Saatiin siis $F \circ G(x) = x = G \circ F(x)$, ja siten F on bijektio.

   Nähdään, että
$$\|F(x)-F(y)\| = \|f(x)-f(y)+x-y\| \leqslant \|x-y\|+\|f(x)-f(y)\| \leqslant (1+q)\|x-y\|$$
   ja
$$\|F(x)-F(y)\| = \|f(x)-f(y)+x-y\| \geqslant \|x-y\|-\|f(x)-f(y)\| \geqslant (1-q)\|x-y\|.$$
   Merkitään $M = \max\{\frac{1}{(1-q)}, (1+q)\}$, niin F on siis M-bilipschitz.

   Kuvaus F on siis bijektio $E \to E$ ja bilipschitz-kuvauksena upotus, joten F on homeomorfismi. $\square$