MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia, syksy 2015
Ratkaisuita harjoituksiin 4
Matti Palomäki

1. (a) On. Esimerkiksi $]-1,1\frac{1}{2}[$ ja $]1\frac{1}{2},4[$.
   (b) Ei ole. Kaikki pisteen 1 sisältävät ympäristöt kohtaavat joukon $]1,3]$.

2. *Väite.* Löytyy pisteen a ympäristö U, jossa $f(x) > \frac{1}{2}f(a)$.

   Todistus. Funktio f on jatkuva (ja positiivinen) pisteessä a, joten kun $\epsilon = \frac{f(a)}{2}$, löytyy sellainen $\delta > 0$, että $|f(a) - f(x)| < \epsilon$ aina kun $d(a,x) < \delta$. Siis kun $x \in B(a,\delta)$,

$$|f(a) - f(x)| < \epsilon$$
$$\Rightarrow f(a) - f(x) < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow f(a) - \epsilon < f(x)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}f(a) < f(x),$$

   eli ympäristössä $U = B(a,\delta)$ kaikille pisteille x pätee $f(x) > \frac{f(a)}{2}$. $\square$

3. *Väite.* Annettu funktio f on epäjatkuva origossa.

   Todistus. Jos f on jatkuva origossa, origolle löytyy kuulaympäristö, jonka kaikille pisteille $\mathbf{u}$ pätee $|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})| < \epsilon$ kun $\epsilon = \frac{1}{2}$. Kuitenkin kaikki origon kuulaympäristöt sisältävät käyrän $y = \sqrt{x}$ pisteitä, ja näissä pisteissä (poislukien origo)

$$f(\mathbf{u}) = f(x,y) = f(x,\sqrt{x}) = \frac{x\sqrt{x}^2}{x^2 + \sqrt{x}^4} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

   Kuvatunlaista kuulaympäristöä ei siis löydy, joten f ei ole jatkuva. $\square$

4. (a) Olkoot $a, b \in [-2,2]$, $a < b$. Funktio $f(x)$ on derivoituva välillä $[-2,2]$ ja siten differentiaalilaskennan väliarvolauseen nojalla löytyy $c \in [a,b]$, jolle

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}.$$

   Välillä $[-2,2]$ voidaan derivaatan itseisarvoa arvioida ylöspäin

$$|f'(x)| = |x - \cos(x)| \leqslant |x| + |\cos(x)| \leqslant 2 + 1 = 3.$$

Yhdistämällä tämä arvio ja väliarvolause saadaan siis

$$\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = f'(c)$$

$$\Rightarrow |f(b)-f(a)| = |f'(c)(b-a)| \leqslant 3 * |(b-a)|,$$

ja siten f on $3-$Lipschitz.

(b) *Väite.* Annettu kuvaus h on jatkuva.

Todistus. Lipschitz-kuvaukset ovat jatkuvia, joten riittää osoittaa $h(t)$ Lipschitz-kuvaukseksi.
Merkitään välin $[0,1]$ tavallista metriikkaa d, avaruuden $(E, |*|)$ normin määräämä metriikkaa e ja tehtävänannossa kiinnitettyjen pisteiden x, y etäisyyttä $e(x,y)$ vakiolla M.
Olkoot $a, b \in [0,1]$, $a < b$. Nyt

$$e(\, h(b), h(a)\,) =$$

$$\begin{aligned}|h(b)-h(a)| &= |((1-a)x+ay)-((1-b)x+by)| \\ &= |(b-a)x+(a-b)y| = |(b-a)x-(b-a)y| \\ &= (b-a)|x-y| = |b-a| * M \\ &= M * d(b,a).\end{aligned}$$

Kuvaus $h(t)$ on siis $M-$Lipschitz ja siten jatkuva. □

5. *Väite.* Joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ on avoin.

   Todistus. Tutkitaan tilanteen kannalta otollisia polynomeja

$$f(x,y) = y^3 - x^2 + x$$

ja

$$g(x,y) = -2x^2 - y^3.$$

Polynomeina ne ovat jatkuvia. Lisäksi $f(x,y) > 0$ kun $x^2 - x < y^3$ ja vastaavasti $g(x,y) > 0$ kun $y^3 < -2x^2$, toisin sanoen

$$A = f^{-1}\mathbb{R}_+ \bigcap g^{-1}\mathbb{R}_+.$$

Jatkuvassa kuvauksessa avoimen joukon alkukuva on avoin, joten $f^{-1}\mathbb{R}_+$ ja $g^{-1}\mathbb{R}_+$ ovat avoimia. Leikkaus äärellisen monesta avoimesta joukosta on avoin, joten $A = f^{-1}\mathbb{R}_+ \bigcap g^{-1}\mathbb{R}_+$ on avoin. □

6. (a) *Väite.* Jos f, g ovat jatkuvia reaaliarvoisia funktioita, niin $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ määrittää jatkuvan funktion h.

Todistus. Olkoon $a \in X$.
Oletetaan ensin $f(a) \neq g(a)$. On siis joko $f(a) < g(a)$ tai $f(a) > g(a)$, voidaan olettaa $f(a) > g(a)$, jolloin $h(a) = f(a)$.
Näytetään, että pisteellä a on ympäristö U, jossa $f(x) > g(x)$. Merkitään $\epsilon = (f(a) - g(a))/3 > 0$, jolloin $g(a) + \epsilon < f(a) - \epsilon$. Funktiot f, g ovat jatkuvia, joten löytyy luvut δ_f, δ_g, joilla $|f(a) - f(x)| < \epsilon$ kun $d_X(a, x) < \delta_f$ ja $|g(a) - g(x)| < \epsilon$ kun $d_X(a, x) < \delta_g$.
Nyt leikkauksessa $U = B(a, \delta_f) \cap B(a, \delta_g)$ pätee toisaalta

$$f(a) - f(x) < \epsilon \Rightarrow f(a) - \epsilon < f(x)$$

ja toisaalta

$$g(x) - g(a) < \epsilon \Rightarrow g(x) < g(a) + \epsilon,$$

joten

$$g(x) < g(a) + \epsilon < f(a) - \epsilon < f(x).$$

Pisteen a ympäristössä U on siis $h(x) = \max\{f(x), g(x)\} = f(x)$,
ja koska f on jatkuva, myös h on jatkuva pisteessä a
(funktion f jatkuvuuden nojalla mielivaltaiselle pisteen $f(a)$ ympäristölle V löytyy pisteen a ympäristö, joka sisältyy alkukuvaan $f^{-1}V$. Saman ympäristön leikkaus joukon U kanssa sisältyy joukkoon $h^{-1}V$, joten myös h on jatkuva pisteessä a).

Oletetaan sitten $f(a) = g(a) = h(a)$.
Olkoon V pisteen $f(a)$ ympäristö avaruudessa $\mathbb{R}$. Funktio f on jatkuva, joten löytyy sellainen pisteen a ympäristö $U_f \subset X$, että $U_f \subset f^{-1}V$. Samoin g on jatkuva, joten löytyy pisteen a ympäristö $U_g \subset X$, jolla $U_g \subset f^{-1}V$. Leikkaus $U = U_f \cap U_g$ on nyt pisteen a ympäristö ja sille pätee $U \subset h^{-1}V$, joten h on jatkuva pisteessä a.

Funktio h on siis jatkuva pisteissä, joissa $f(x) \neq g(x)$ ja pisteissä, joissa $f(x) = g(x)$, toisin sanoen koko määrittelyjoukossaan. $\square$

(b) *Väite.* Jatkuvan reaaliarvoisen funktion f itseisarvofunktio on jatkuva.

Todistus. Koska $|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$, on $|f(x)|$ (a)-kohdan nojalla jatkuva. $\square$